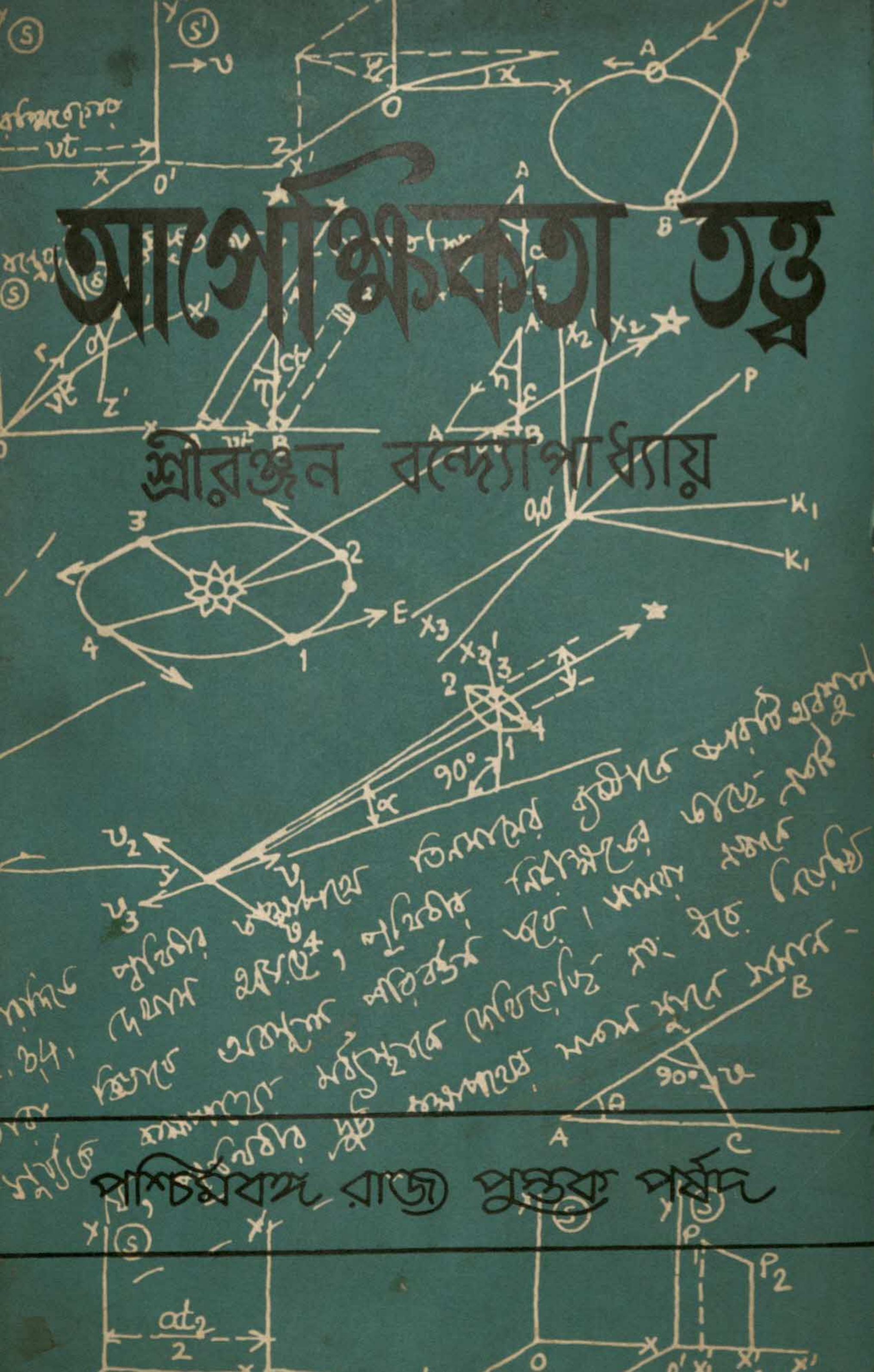


# আপেক্ষিকতা তত্ত্ব

শ্রীরঞ্জন বন্দ্যোপাধ্যায়

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

# আপেক্ষিকতা তত্ত্ব

[ Theory of Relativity ]



শ্রীরঞ্জন বন্দ্যোপাধ্যায়

অধ্যাপক, পদার্থবিদ্যা বিভাগ, বর্ধমান বিশ্ববিদ্যালয়

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

**APEKSHIKATA TATTVA**

**By Sriranjan Bandyopadhyay**



প্রকাশকাল ঃ অক্টোবর—১৯৮২

প্রকাশক ঃ পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ
( পশ্চিমবঙ্গ সরকারের একটি সংস্থা )
৬এ, রাজা সুবোধ মল্লিক স্কোয়ার,
নবম তল,
কলিকাতা-৭০০০ ১৩

মুদ্রক ঃ
শ্রীবংশীবদন ঘোষ
**পাইওনীয়ার প্রিন্টিং ওয়ার্কস্**
৪৭/এফ্ শ্যামপুকুর ষ্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০ ০০৪



প্রচ্ছদ ঃ নির্মল কর্মকার

Published by Prof Dibyendu Hota, Chief Executive Officer, West Bengal State Book Board under the Centrally Sponsored Scheme of production of books & literature in regional languages at the University level by the Government of India in the Ministry of Education & Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

# ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ যখন আমাকে বাংলাভাষায় আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে বই লিখতে অনুরোধ করে তখন প্রাথমিকভাবে আমার এই অনভ্যস্ত পথে অগ্রসর হবার ব্যাপারে দারুণ দ্বিধা ও সঙ্কোচ ছিল। কিন্তু আমার প্রাক্তন শিক্ষক অধ্যাপক রাজেন্দ্রলাল সেনগুপ্তের উৎসাহ ও প্রেরণা পেয়ে শেষ পর্যন্ত এ পথে অগ্রসর হই। বইখানি লেখা সম্পূর্ণ হলে আমার অন্য একজন শিক্ষক অধ্যাপক অমলকুমার রায়চৌধুরী পাণ্ডুলিপিটি যত্নসহকারে পরীক্ষা ক'রে নানাপ্রকার ত্রুটি বিচ্যুতির দিকে আমার দৃষ্টি আকর্ষণ করেন এবং এর উন্নতিসাধনের ব্যাপারে সুপরামর্শ দেন। সেজন্য আমি তাঁর কাছে গভীরভাবে কৃতজ্ঞ।

বইখানি পদার্থবিদ্যার স্নাতকস্তরের সাম্মানিক পাঠ্যক্রমের ছাত্রেরা তাদের প্রামাণিক গ্রন্থ হিসাবে ব্যবহার করতে পারবে। কোন কোন বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতকোত্তর শ্রেণীর পাঠ্যসূচীর বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সকল বিষয়ই এতে পাওয়া যাবে। বইখানিতে প্রধানতঃ বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। শুধু সপ্তম পরিচ্ছেদে সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব ও বিশ্বতত্ত্বের খুব সংক্ষিপ্ত আলোচনা দেওয়া হয়েছে। বিজ্ঞানের বিষয়বস্তু ছাড়া ইতিহাস সম্বন্ধেও কিছু কিছু আলোচনা করা হয়েছে। কয়েকটি ঐতিহাসিক বিষয় পরিশিষ্টে স্থান পেয়েছে। যে সমস্ত বিভাগ বা পরিচ্ছেদে এমন বিষয় সম্বন্ধে আলোচনা রয়েছে যা প্রথম শিক্ষার্থীর পক্ষে খুব প্রয়োজনীয় নয় সেগুলিকে তারকাচিহ্নিত করা হয়েছে। পাঠকের সুবিধার জন্য বই-এর শেষে একটি বর্ণানুক্রমিক বিষয়সূচী দেওয়া হয়েছে। তা ছাড়া প্রত্যেক পরিচ্ছেদের শেষে একটি বইএর তালিকা দেওয়া হয়েছে যা পাঠক আলোচিত বিষয়গুলি আরও বিশদভাবে জানার জন্য পড়তে পারেন।

বর্ধমান — শ্রীরঞ্জন বন্দ্যোপাধ্যায়

২রা সেপ্টেম্বর ১৯৮২

## উৎসর্গ

আমার জীবনের বিজ্ঞানের প্রথম শিক্ষক পিতৃদেব

৺ শ্রীযুক্ত শ্রীশচন্দ্র বন্দ্যোপাধ্যায়ের উদ্দেশ্যে

## সূচীপত্র

# আপেক্ষিকতা তত্ত্ব

## প্রথম পরিচ্ছেদ

# ঐতিহাসিক পটভূমিকা

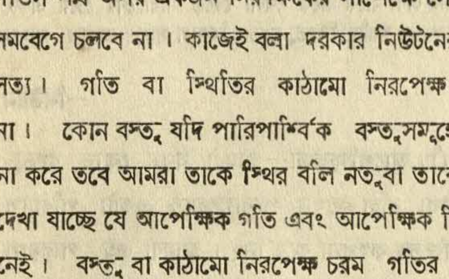
জানি না, জগতের লোক আমার সম্বন্ধে কি ভাবে, কিন্তু আমার নিজের মনে হয় যে, আমি শিশুর মত সমুদ্রের উপকূলে খেলা করছি এবং মাঝে মাঝে খেলা ছেড়ে সাধারণের চেয়ে একটু বেশী মসৃণ বা বেশী সুন্দর নুড়ি খুঁজে বার করছি, কিন্তু সত্যের বিশাল সমুদ্র আমার সামনে অনাবিষ্কৃত পড়ে রয়েছে।

—নিউটন

1-1. **নিউটনীয় ও গালিলীয় আপেক্ষিকতা**—আমরা যখন কোন বস্তুকণার "গতিপথ" বা "বেগের" কথা বলি তখন পরোক্ষভাবে একটা পরিমাপ কাঠামোর ( স্থানাঙ্ক সমষ্টি ) অস্তিত্ব কল্পনা করে নিই। আমরা এই পরিমাপ কাঠামোর সাপেক্ষে বিভিন্ন সময়ে বস্তুকণার অবস্থিতির তিনটি সংখ্যা দ্বারা নির্দেশ করতে পারি। তাছাড়া সময় পরিমাপের একটি যন্ত্র (ঘড়ি) দরকার যাতে আমরা সমান সমান কালের ব্যবধানে অবস্থিতির পরিবর্তনের পরিমাপ করে বলতে পারি, বস্তুকণার বেগ অবিচল কি না। ঘরের কোণে দেওয়াল ও মেঝের ছেদ রেখাত্রয় অথবা আকাশের "স্থির" তারাগুলি ও লম্বসূত্র পরিমাপ কাঠামোর কাজ করতে পারে। অনুরূপভাবে সময় পরিমাপের জন্য মানদণ্ড হিসাবে একটি পৌনঃপুনিক প্রক্রিয়ার প্রয়োজন। সাধারণতঃ পৃথিবীর সূর্যের চারদিকে পরিক্রমণ এই পৌনঃপুনিক প্রক্রিয়ার কাজ করে। আরও আধুনিক ঘড়িতে পরমাণুর কম্পন এই মানদণ্ডের কাজ করে। কাল নিরূপণের সময় দেখা হয় এই পৌনঃপুনিক প্রক্রিয়া কতখানি অগ্রসর হয়েছে। অবস্থান ও কালের পরিমাপের উপায় ও তার জন্য ব্যবহৃত মানদণ্ডগুলি নিয়ে দেশকালের পরিমাপ কাঠামো নির্দিষ্ট হয়।

বলবিদ্যা শাস্ত্র নিউটনের তিনটি সূত্রের উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছিল। কিন্তু নিউটনের সূত্রে বলা নেই যে কোন্ পরিমাপ কাঠামোর সাপেক্ষে এই সূত্রগুলি সত্য। আমরা প্রাচীন বলবিদ্যা থেকে জানি যে, সব পরিমাপ কাঠামোর সাপেক্ষে নিউটনের সূত্রগুলি সত্য নয়। এ ব্যাপারে পরে আমরা

বিশদভাবে আলোচনা করব। এখন আমরা নিউটনের প্রথম সূত্রটি একটু পরীক্ষা করে দেখলেই বুঝব যে, পরিমাপ কাঠামো নির্দেশ করা কত গুরুত্বপূর্ণ। প্রথম সূত্রের বক্তব্য: "বহিঃস্থ বল প্রয়োগ না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির অবস্থাতেই থাকবে এবং সচল বস্তু সমবেগে সরলরেখা অবলম্বন করে চলতে থাকবে।" একজন নিরীক্ষকের মতে কোন বস্তু যদি স্থির থাকে বা সমবেগে সরলরেখা অবলম্বন করে চলে তাহলে উক্ত নিরীক্ষকের সাপেক্ষে ত্বরণশীল গতিসম্পন্ন অপর একজন নিরীক্ষকের সাপেক্ষে সেই বস্তুই ত্বরণশীল হবে অর্থাৎ সমবেগে চলবে না। কাজেই বলা দরকার নিউটনের গতিসূত্র কোন্ কাঠামোয় সত্য। গতি বা স্থিতির কাঠামো নিরপেক্ষ কোন অর্থ থাকতে পারে না। কোন বস্তু যদি পারিপার্শ্বিক বস্তুসমূহের সাপেক্ষে স্থান পরিবর্তন না করে তবে আমরা তাকে স্থির বলি নতুবা তাকে গতিশীল বলি। কাজেই দেখা যাচ্ছে যে আপেক্ষিক গতি এবং আপেক্ষিক স্থিতির কথা বলা ছাড়া গত্যন্তর নেই। বস্তু বা কাঠামো নিরপেক্ষ চরম গতির কথা বলা নিরর্থক। কিন্তু নিউটন চরম বেগের অস্তিত্বে বিশ্বাসী ছিলেন। (এ ব্যাপারে গালিলেও এবং নিউটনের মতামতের জন্য পরিশিষ্ট দেখুন)।




চিত্র 1-1

যে কাঠামোয় নিউটনের সূত্রগুলি বলবৎ তাকে জাড্যিক কাঠামো বলা হয়। মনে করা যাক, $S$ একটি কার্টেজীয় পরিমাপ কাঠামো। গণনা সহজ করার জন্য আমরা প্রথমে ধরে নিই যে, $S'$ কাঠামোর $x'$, $y'$ ও $z'$ অক্ষরেখাগুলি যথাক্রমে $S$ কাঠামোর $x$, $y$ ও $z$ অক্ষরেখাগুলির সমান্তরাল। তা ছাড়া আমরা মনে করি যে, সময় পরিমাপের প্রারম্ভে অর্থাৎ যখন $t=o$ ছিল তখন মূল বিন্দুদ্বয় $O$ এবং $O'$ মিলিত হয়েছিল এবং ফলতঃ অক্ষরেখাগুলিরও সমাপতন হয়েছিল। $S'$ কাঠামো $S$ এর সাপেক্ষে ধনাত্মক $x$ অক্ষরেখার দিকে অবিচল বেগ $v$ নিয়ে এগিয়ে চলেছে। কাজেই কালাঙ্ক $t$ তে $O'$ এর $O$ বিন্দু থেকে $x$ এর দিকে দূরত্ব হবে $vt$। কাজেই কোন

বস্তুর $x'$ স্থানাঙ্ক $x$ স্থানাঙ্ক থেকে $vt$ কম হবে। কিন্তু $y'$, $y$ এবং $z'$, $z$ স্থানাঙ্কগুলি সমান হবে। অতএব

$$x'=x-vt,\ y'=y,\ z'=z \tag{1—1}$$

ব্যবকলন করে আমরা বেগের উপাংশগুলি পাই:

$$u_x'=u_x-v,\ u_y'=u_y,\ u_z'=u_z \tag{1—2}$$

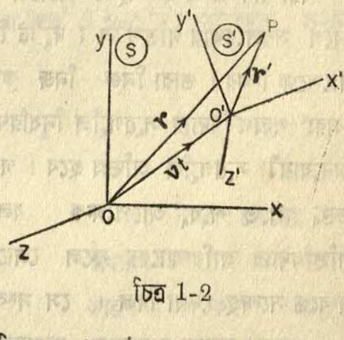
দ্বিতীয়বার ব্যবকলন করলে ত্বরণের উপাংশগুলি পাওয়া যায়:

$$a_x'=a_x,\ a_y'=a_y,\ a_z'=a_z \tag{1—3}$$

কারণ $v$ ধ্রুবক। কাজেই ত্বরণের উপাংশগুলি $S$ ও $S'$ দুই কাঠামোতেই সমান। নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী বল $F$ ত্বরণের সঙ্গে অনুপাতী:

$$F_x=ma_x,\ F_y=may,\ F_z=ma_z \tag{1—4}$$

কাজেই $S$ কাঠামোয় নিউটনীয় গতিসূত্রগুলি সত্য হলে $S'$ কাঠামোতেও সেগুলি সত্য। কাজেই সংজ্ঞা অনুযায়ী $S'$ কাঠামোকেও জাড্যিক কাঠামো বলা যায়। শুধু $S'$ ই নয়, যে সমস্ত কাঠামো $S$ এর সাপেক্ষে সরলরেখায় অবিচল বেগ-সম্পন্ন তারা সকলেই জাড্যিক কাঠামো। যদিও গণনা সহজ করার জন্য আমরা আপেক্ষিক বেগ $v$ কে $x$ অক্ষের সমান্তরাল ধরে নিয়েছি, কিন্তু তার কোন প্রয়োজন নেই। ভেক্টরের মাধ্যমেও আমরা দুই কাঠামোর স্থানাঙ্কগুলির মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করতে পারি। চিত্র 1-2 এ $S$ ও $S'$ কাঠামোর অক্ষগুলি সমান্তরাল নয় কিন্তু $t=o$ কালাঙ্কে মূল বিন্দুদ্বয় সমস্থানিক ছিল। $S$ ও $S'$ এর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ $\mathbf{v}$ $OO'$ এর দিকে। $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে কোন একটি বিন্দু $P$ এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ (ভেক্টরের জন্য মোটা অক্ষর ব্যবহৃত হয়েছে) দ্বারা সূচিত হয়। অনুরূপে $S'$ কাঠামোয় $\mathbf{P}$ এর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}'$ ভেক্টরের সংযোজন সূত্র অনুযায়ী



চিত্র 1-2

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{v}t \tag{1—5}$$

ব্যবকলন করে আমরা পাই

$$\dot{\mathbf{r}}'=\dot{\mathbf{r}}-\mathbf{v} \tag{1—6}$$

কোন অক্ষরের উপরে একটি বিন্দু $t$ এর সাপেক্ষে সেই রাশির একবার ব্যবকলন সূচিত করে, দু'টি বিন্দু দু'বার ব্যবকলন সূচিত করে, ইত্যাদি। দ্বিতীয়বার ব্যবকলন করলে পাওয়া যায়

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} \qquad (1-7)$$

অতএব এভাবেও দেখা যায় যে, ত্বরণ দুই কাঠামোতেই সমান, কাজেই $S'$ জাড্যিক কাঠামো। যেহেতু পুরো বলবিদ্যাই নিউটনের গতিসূত্রগুলির উপর ভিত্তি করে গঠিত কাজেই যান্ত্রিক কোন পরীক্ষা $S$ ও $S'$ এর মত দু'টি আপেক্ষিক অবিচল সরলরৈখিক বেগ সম্পন্ন কাঠামোর মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করতে অক্ষম। গালিলেই নিউটনের বহু পূর্বেই এই সত্য আবিষ্কার করেছিলেন। সেজন্য সমীকরণ (1—1) কে গালিলীয় রূপান্তর সূত্র এবং জাড্যিক কাঠামোকে গালিলীয় কাঠামো* বলা হয়। আমরা বলতে পারি যে, বলবিদ্যার সূত্রগুলি গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়। নিম্নলিখিত স্বীকার্যকে গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্ব নামে অভিহিত করা হয়ঃ

পদার্থবিদ্যার সূত্রগুলি প্রত্যেক গালিলীয় কাঠামোতেই অভিন্ন।

ধরা যাক $S$ ও $S'$ দু'টি কাঠামো যারা পরস্পর পরস্পরের সাপেক্ষে অবিচল বেগে সরলরেখায় গতিশীল। দু'টি নিরীক্ষক যথাক্রমে $S$ ও $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির। তারা নিজ নিজ কাঠামোয় কতকগুলি বৈজ্ঞানিক পরীক্ষা দ্বারা পদার্থবিদ্যার সূত্রগুলি নির্ধারণ করল। গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী সূত্রগুলি অভিন্ন হবে। গালিলেই ও নিউটনের যুগে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব বলতে শুধু আপেক্ষিক বলবিদ্যা বোঝাত। পরবর্তী যুগে তড়িৎ গতিবিদ্যার আবিষ্কারের ফলে লোকের মনে গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে সন্দেহ দেখা দিল। সে সম্বন্ধে আমরা পরে আলোচনা করব।

এতক্ষণ আমরা স্থানাঙ্ক রূপান্তর সূত্র নিয়ে আলোচনা করেছি এবং পরোক্ষভাবে ধরেই নিয়েছি যে, দুই কাঠামোতেই সময়ের পরিমাণও অভিন্ন হবে।

গালিলেই এবং নিউটনের যুগে কালের চরম অর্থের অস্তিত্ব স্বীকৃত হয়েছিল। আমরা এখন গালিলেইর রূপান্তর সূত্র (1-1) এর সম্পূরক হিসাবে লিখতে পারি

$$t' = t \qquad (1-1a)$$

* আইনষ্টাইন তাঁর লেখায় 'গালিলীয় কাঠামো' কথাটি ব্যবহার করেছেন।

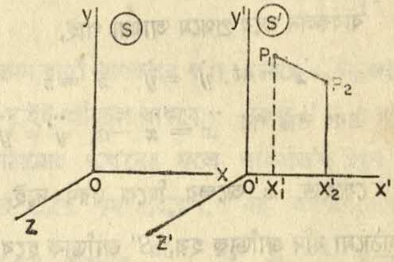
এখন গালিলেইর রূপান্তর সমীকরণের বিপরীত সমীকরণ হবে

$$x=x'+vt',\ y=y',\ z=z',\ t=t' \qquad (1-1b)$$

অনুরূপে সমীকরণ $(1-5)$ থেকে পাই

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{v}t, \qquad t=t' \qquad (1-5a)$$

গালিলীয় রূপান্তর সূত্রের অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে কোন বস্তুর দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকে। কারণ আমরা যদি দু'টি বিন্দু $\mathbf{P}_1$ ও $\mathbf{P}_2$ নিই তা হলে $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ভেক্টরের (চিত্র 1—3) উপাংশগুলি হবে ঃ




চিত্র 1-3

$$x_2'-x_1'=(x_2-vt)-(x_1-vt)=x_2-x_1$$

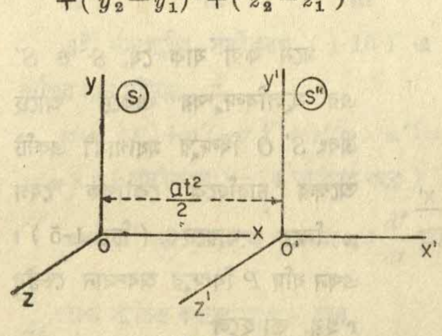
$$y_2'-y_1'=y_2-y_1,\quad z_2'-z_1'=z_2-z_1$$

এখানে আমরা একই কালাঙ্ক t তে $\mathbf{P}_1$ ও $\mathbf{P}_2$র স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$র দৈর্ঘ্য $S$ ও $S'$ কাঠামোতে সমান কারণ

$$(x_2'-x_1')+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \qquad (1—8)$$

এই বিশেষ ক্ষেত্রের মত সাধারণ ক্ষেত্রেও দৈর্ঘ্য সমান কারণ ( সমীকরণ 1-5$a$ ) ঃ

$$(\mathbf{r}_2'-\mathbf{r}_1')^2=(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2 \qquad (1—9)$$




চিত্র 1-4

**1-2. ত্বরণশীল ও ঘূর্ণায়মান কাঠামোয় গতিসূত্রের রূপ ঃ** এবার আমরা ত্বরণশীল কাঠামো নিয়ে আলোচনা করব। মনে করা যাক $S'$, $S$ এর সাপেক্ষে

$x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে $a$ ত্বরণ নিয়ে গতিশীল। পূর্বের মত আমরা মনে করব যে, অক্ষরেখাগুলি সমান্তরাল এবং $t=t'=0$ তে মূলবিন্দুদ্বয় সমস্থানিক ছিল।

$$x'=x-\frac{at^2}{2},\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t \qquad (1\text{—}10)$$

ব্যবকলন করে প্রথমে আমরা পাই,

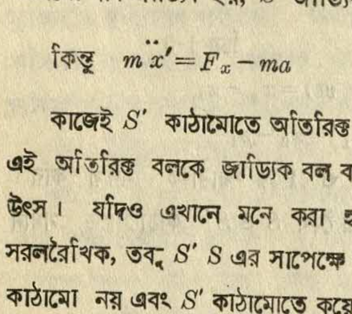
$$\dot{x}'=\dot{x}-at,\ \dot{y}'=\dot{y},\ \dot{z}'=\dot{z} \qquad (1\text{—}11)$$

এবং তার পর $\ddot{x}'=\ddot{x}-a,\ \ddot{y}'=\ddot{y},\ \ddot{z}'=\ddot{z}$ $\qquad (1\text{—}12)$

যেহেতু $x$ অক্ষের দিকে ত্বরণ দুই কাঠামোতে সমান নয়, অতএব $S$ কাঠামো যদি জাড্যিক হয়, $S'$ জাড্যিক হবে না, কারণ, $F_x=m\ddot{x}$

কিন্তু $m\ddot{x}'=F_x-ma$ $\qquad (1\text{—}13)$

কাজেই $S'$ কাঠামোতে অতিরিক্ত বল $-ma$ প্রযুক্ত হয়েছে বলে মনে হয়। এই অতিরিক্ত বলকে জাড্যিক বল বলা হয় এবং পরিমাপ কাঠামোর ত্বরণই এর উৎস। যদিও এখানে মনে করা হয়েছে যে, $S'$ ও $S$ এর আপেক্ষিক গতি সরলরৈখিক, তবু $S'$ $S$ এর সাপেক্ষে ঘূর্ণিত হলেও দেখান যায় যে. $S'$ জাড্যিক কাঠামো নয় এবং $S'$ কাঠামোতে কয়েকটি অতিরিক্ত বল ( যথা কেন্দ্রাতিগ বল, কোরিয়োলি (Coriolis) বল ইত্যাদি ) প্রযুক্ত হয়েছে বলে মনে হবে।




চিত্র 1-5

মনে করা যাক যে, $S$ ও $S'$ এর মূলবিন্দুদ্বয় একত্রে আছে এবং $S'$ $O$ বিন্দুর মধ্যগামী একটি অক্ষের চারদিকে কৌণিক বেগ $\boldsymbol{\omega}$ নিয়ে ঘুরছে ( চিত্র 1-5 )। এখন যদি $P$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}$ হয়, তা হলে

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x'\mathbf{j}'+y'\mathbf{k}'+z'\mathbf{k}' \qquad (1\text{—}14)$$

এখন $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ যথাক্রমে $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ এর দিকের একক

ভেক্টর। $x, y, z$ $P$ বিন্দুর $S$ কাঠামোর স্থানাঙ্ক। এবার $t$ এর সাপেক্ষে ব্যবকলনের ফলে পাই

$$\dot{\mathbf{r}}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}=\frac{dx'}{dt}\mathbf{i}'+\frac{dy'}{dt}\mathbf{j}'+\frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'+x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt}+y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt}+z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \qquad (1-15)$$

এখন $S$ কাঠামোর নিরীক্ষকের মতানুযায়ী ব্যবকলন করা হয়েছে। কাজেই $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ও $\mathbf{k}$ ভেক্টরের মান ও দিক দুইই অবিচল থাকবে। কিন্তু $\mathbf{i}'$ $\mathbf{j}'$ ও $\mathbf{k}'$ ভেক্টরের মান একক হলেও $S'$ কাঠামোর ঘূর্ণনের ফলে পরিবর্তিত হবে। যেহেতু ভেক্টরের দিক তার মানের চেয়ে কম গুরুত্বপূর্ণ নয়, অতএব দিক পরিবর্তিত হলেও ভেক্টরের পরিবর্তন হয়, অতএব $\frac{d\mathbf{i}'}{dt}$, $\frac{d\mathbf{j}'}{dt}$ ও $\frac{d\mathbf{k}'}{dt}$ শূন্য নয়। সমীকরণ (1-15) এর প্রথম তিনটি রাশি $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে বস্তুকণা $P$র বেগ সূচিত করে, শেষ তিনটি রাশি $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে এমন একটি বস্তুকণার বেগ সূচিত করে যেটি $P$ বিন্দুতে $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির আছে। অর্থাৎ বস্তুকণার মোট বেগ দুইটি বেগের লব্ধি : (1) $S'$ এর সাপেক্ষে বস্তুকণার বেগ এবং (2) $S$ এর সাপেক্ষে $S'$ এর ঘূর্ণন জনিত বেগ। আমরা জানি যে, কৌণিক বেগ $\boldsymbol{\omega}$ হলে

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}',\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}',\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}' \qquad (1-16)$$

এই মানগুলি সমীকরণ (1-15) এ প্রতিস্থাপন করলে শেষ তিনটি রাশির মান দাঁড়ায়

$$x'(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}')+y'(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}')+z'(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}')=\boldsymbol{\omega}\times(x'\mathbf{i}'+y'\mathbf{j}'+z'\mathbf{k}')$$

$=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ ( সমীকরণ 1—14 ব্যবহার করে )

এখন $S'$ এর সাপেক্ষে ব্যবকলনকে $\frac{d'}{dt}$ দ্বারা এবং $S$ এর সাপেক্ষে ব্যবকলনকে $\frac{d}{dt}$ দ্বারা সূচিত করলে পাওয়া যায়

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (1-17)$$

এই সমীকরণ যে কোন ভেক্টরের ক্ষেত্রে সত্য, অর্থাৎ $\mathbf{r}$ এর পরিবর্তে আমরা

যে কোন ভেক্টর প্রতিস্থাপন করতে পারি। প্রতীকের মাধ্যমে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{d}{dt}=\frac{d'}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times \qquad (1\text{—}18)$$

সমীকরণ (1—17) কে দ্বিতীয়বার ব্যবকলন করলে এবং উপরিউক্ত সূত্র ব্যবহার করে আমরা পাই

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d'}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d'}{dt}\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)+\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)$$

$$=\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}+2\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \qquad (1\text{—}19)$$

এখানে $\boldsymbol{\omega}$ ভেক্টরকে ধ্রুবক ধরা হয়েছে।

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র $S$ কাঠামোয় বলবৎ হলে আমরা পাই

$$\mathbf{F}=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=m\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}+2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right)+m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \qquad (1\text{—}20)$$

কাজেই $S'$ কাঠামোয় ভর × ত্বরণের মান দাঁড়ায়ঃ

$$m\frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}-2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right)-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \qquad (1\text{—}21)$$

কাজেই ডানদিকে বাহির থেকে প্রযুক্ত বল ছাড়াও আরও দু'টি অতিরিক্ত রাশি বলের মত কাজ করে। যেহেতু এই কাঠামোয় প্রযুক্ত বল ত্বরণের সঙ্গে অনুপাতী নয়, অতএব $S'$ কাঠামোয় নিউটনের গতিসূত্র বলবৎ নয় এবং $S'$ জাড্যিক কাঠামো নয়। সমীকরণ (1-21) এর ডানদিকের দ্বিতীয় রাশিকে কোরিয়োলি এবং তৃতীয় রাশিকে কেন্দ্রাতিগ বল বলে। আইনষ্টাইন প্রথমে ত্বরণবিহীন কাঠামোর সাপেক্ষে ভৌত সূত্রগুলির অভিন্নতার কথা বলেন। এই তত্ত্বকে বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব বলা হয়। পরে আইনষ্টাইন ত্বরণশীল কাঠামোর সাপেক্ষে ভৌত সূত্রগুলির রূপ নিয়ে আলোচনা করেন। একে সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব বলা হয়। এই পুস্তকে প্রধানতঃ বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে। শেষ পরিচ্ছেদে সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের অতি সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেওয়া হবে।

**1-3. তড়িৎ গতিবিদ্যা ও ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ:** নিউটনকে বাধ্য হয়ে স্বীকার করতে হয়েছিল যে, কোন অবিচল বেগ সম্পন্ন বস্তুর গতি তার অন্তর্গত কোন যান্ত্রিক পরীক্ষা দ্বারা নির্ণয় করা সম্ভব নয়। আলোর তরঙ্গ-

তত্ত্ব আবিষ্কারের ফলে চরম গতির সমস্যায় নিউটনের অজানা এক নূতন উপাদানের আমদানী হল।

ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎ গতিবিদ্যা সংক্রান্ত সমীকরণগুলি থেকে প্রমাণ করা যায় যে, শূন্যস্থানে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের বেগ মি. কি. সে. ( মিটার কিলো-গ্রাম সেকেন্ড ) একক প্রণালী অনুযায়ী $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ যেখানে $\mu_0$ ও $\epsilon_0$ যথাক্রমে শূন্যস্থানের চুম্বকীয় প্রবেশ্যতা ও অপারিবাহিতা ধ্রুবক। $c$ এর মান সেকেণ্ডে $3 \times 10^{10}$ সে. মি.।

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি নিয়ে প্রাথমিক সমস্যা হচ্ছে যে, সেগুলি গ্যালিলীয় রূপান্তর সূত্রের ( সমীকরণ 1—1$b$) সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় থাকে না। আমরা যদি আলোকে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ বলে ধরে নিই এবং তার তরঙ্গ মুখগুলিকে সমতল বলে মনে করি তা হলে সেটিকে নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা সূচিত করা যাবে ঃ

$$\psi = f(lx + my + nz - ct) = f(\mathbf{k}.\mathbf{r} - ct) \qquad (1-22)$$

যদি আলোক তরঙ্গের অভিলম্ব তিনটি অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তাদের কোসাইন যথাক্রমে $l$, $m$ ও $n$ হয় এবং $f$ একটি অপেক্ষক সূচিত করে। $\mathbf{k}$ ভেক্টরের উপাংশগুলি যথাক্রমে $l$, $m$ ও $n$। $S$ এর সাপেক্ষে $v$ বেগ সম্পন্ন $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে এই সমীকরণ হবে।

$$\psi' = f\{\mathbf{k}.(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) - ct\} = f\{\mathbf{k}.\mathbf{r} - (c - \mathbf{k}.\mathbf{v})\, t\} \qquad (1\cdot23)$$

অতএব এই নূতন কাঠামোর সাপেক্ষে তরঙ্গের বেগ হবে $c - \mathbf{k}.\mathbf{v}$ যার মান বিভিন্ন দিকে বিভিন্ন।

আমরা পূর্বেই বলেছি যে, ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ অনুযায়ী আলোর শূন্যস্থানের বেগ সব দিকেই $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ হবে। কাজেই সকল জাড্যিক কাঠামোয় ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ সত্য নয়, শুধু একটি বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোয় সত্য।

1-4. **বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর ধারণা ঃ**—আমাদের সাধারণ অভ্যাস যে, আমরা পৃথিবীকে স্থির বলে ধরে নিয়ে অন্য সকল বস্তুর গতি পৃথিবীর সাপেক্ষে নির্ণয় করি। তাই যখন বলি যে, একটি গাড়ী রাস্তা দিয়ে চলছে, তখন আমরা বোঝাতে চাই যে, রাস্তা এবং তার উপরের বাড়ীঘর সব কিছু

পৃথিবীপৃষ্ঠের সঙ্গে কঠিনভাবে আবদ্ধ এবং তাদের সাপেক্ষে গাড়ী গতিশীল। এই জন্যই মানুষ বহুদিন ধরে বিশ্বাস করত যে, সূর্য এবং অন্যান্য নক্ষত্র স্থির নয়। তারা পৃথিবীর চারদিকে আবর্তিত হচ্ছে। এখনও আমরা সাধারণ কথায় বলি যে, সূর্য পূর্ব দিকে উঠে পশ্চিমে অস্ত যায়, যেন সূর্যই পৃথিবীর চারদিকে একটি পথ পরিক্রমণ করছে।

কিন্তু এখন আমরা সকলেই মেনে নিয়েছি যে, পৃথিবীই তার অক্ষের চারদিকে ঘুরে আসছে, সূর্য ও তারা তার চারদিকে ঘুরছে না। এই যে, আপাত দৃষ্টিতে স্থিতিশীল পৃথিবীকে আমরা গতিশীল মনে করছি, তার কারণ কি? এখানে দুটি কারণের উল্লেখ করা যেতে পারে। প্রথমতঃ বিশ্বের সকল দূরবর্তী নক্ষত্রই পৃথিবীকে কেন্দ্র করে ঘুরছে, এরূপ গতির ব্যাখ্যা গতিবিদ্যার কোন সূত্রের সাহায্যে দেওয়া খুবই কঠিন। দ্বিতীয়তঃ ফুকোর (Foucault) দোলক এবং অন্যান্য পরীক্ষার ফলাফল থেকে আমরা জানতে পেরেছি যে, নিউটনের গতিসূত্র-গুলি পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির কাঠামোয় প্রযোজ্য নয়। এককথায় পৃথিবী জাড্যিক কাঠামো নয়। সেখানে বল ও ত্বরণের মধ্যে সমীকরণ হবে সমীকরণ (1 – 21) এর মত।

কাজেই আমাদের গতিশীলতা স্থির করবার মান হল এই যে, যদি কোন কাঠামোয় পদার্থবিদ্যার সূত্রগুলি বিশেষ রকম সরল হয়, তাহলে তাকেই আমরা বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামো বলে মনে করব। এই সরলতার নিদর্শন কি? অজাড্যিক কাঠামোর সমীকরণ (1 – 21) এর সঙ্গে জাড্যিক কাঠামোর সমীকরণ $\mathbf{F}=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ এর তুলনা করলেই বোঝা যাবে যে, অজাড্যিক কাঠামোয় এক বা একাধিক রাশি দেখা যায় যাদের কোরিয়োলি (Coriolis) এবং কেন্দ্রাতিগ বল বলা হয়। এই রাশিগুলিতে একটি ধ্রুবসংখ্যা $\omega$ বর্তমান, থাকে এই অজাড্যিক কাঠামোর কৌণিক বেগ বলা হয়। কাজেই সরলতার নিদর্শন হচ্ছে সমীকরণে রাশিসমূহের এবং ধ্রুবসংখ্যার স্বল্পতা।

যদি পৃথিবীর কৌণিক বেগ প্রবলতর হত তা হলে ফুকোর পরীক্ষা এবং অন্যান্য জটিল পরীক্ষা ব্যতিরেকেই আমরা অতিরিক্ত বলগুলি সম্বন্ধে সচেতন হতাম এবং মনে করতাম যে গতিসূত্রে একটি ধ্রুবসংখ্যা $\omega$ আছে। পরবর্তী কালে কোন বিচক্ষন বিজ্ঞানী হয়ত বিশ্লেষণ করে দেখাতেন যে, এখন একটি

কাঠামো কল্পনা করা যায় যেখানে গতিসূত্রে ঐরূপ ধ্রুবসংখ্যা নেই এবং তা অনেক সরলতর। তিনি আরও প্রমাণ করতেন যে, ঐ বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর সাপেক্ষে পৃথিবীর কাঠামোর কৌণিক বেগ উপরোক্ত ধ্রুবসংখ্যার সমান।

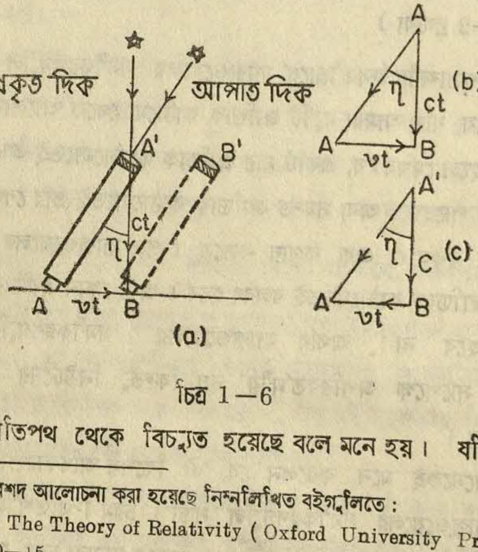
এইভাবে বিচার করলে, যদি একটি কাঠামো জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে সমবেগে সরলরেখায় চলে তা হলে কোনটিকেই বিশেষ করে স্থিতিশীল বলার কোন অর্থ হয় না কারণ গতিসূত্রগুলি দু'টি কাঠামোয় অভিন্ন রূপ নেয় (তুলনীয় সমীকরণ 1-7)। দৈনন্দিন জীবনের একটি সাধারণ উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটি আরও স্পষ্ট হবে। একটি ট্রেন যদি অত্যন্ত মসৃণ রেল লাইনের উপর দিয়ে নিঃশব্দে সমবেগে সরলরেখায় চলে তা হলে আমরা বাহিরের দিকে না তাকিয়ে বুঝতে পারব না যে ট্রেনের গতি আছে। কিন্তু যদি ট্রেনটি হঠাৎ থেমে যায় অথবা বেগ কমিয়ে বা বাড়িয়ে ফেলে তা হলে আমরা সামনে বা পিছন দিকে একটা বল অনুভব করব। আবার ট্রেনটি যদি বৃত্তাকার পথে ডান দিকে বা বাঁ দিকে বেঁকে যায় তা হলেও যাত্রীরা কেন্দ্রাতিগ বল অনুভব করবে। ( পরিশিষ্ট প-2 দ্রষ্টব্য )

ঊনবিংশ শতাব্দীর দ্বিতীয়ার্ধে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি আবিষ্কারের পর মনে হল যে, যদি আমরা দু'টি জাড্যিক কাঠামো থেকে আলোক তরঙ্গের বেগ লক্ষ করি তা হলে দেখব যে, একটি মাত্র জাড্যিক কাঠামোতেই আলোক সর্বদিকে সমবেগে যেতে পারে। অন্য সমস্ত জাড্যিক কাঠামোতেই তার বেগ হবে বিভিন্ন দিকে বিভিন্ন রকম। এক কথায় বলতে গেলে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি শুধু একটি জাড্যিক কাঠামোতেই বলবৎ হবে। অন্য কোন জাড্যিক কাঠামোতেই তা বলবৎ হবে না। অর্থাৎ ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় নয় কিন্তু নিউটনের সমীকরণগুলি অপরিবর্তনীয়।

তখন অনেকেই মনে করলেন যে, ঐ বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোকে ( যেখানে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি সত্য ) চরম স্থিতিশীল কাঠামো বলে মনে করা যায়। তার সাপেক্ষে অন্য বস্তুর বেগকে আমরা চরম বেগ বলে মনে করতে পারি। অনেকেই মনে করলেন যে, চরম বেগের একটা সংজ্ঞা পাওয়া গেল।

**1-5. বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর অনুসন্ধান :** আমরা দেখেছি যে, তড়িৎ গতিবিজ্ঞানের সূত্রগুলির আবিষ্কারের পর বিজ্ঞানীমহলের ধারণা হয় যে, তড়িৎচুম্বকীয় পরীক্ষাদি দ্বারা বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ নির্ণয় করা যায়। একেই বলা হবে চরম গতি। এই ধারণার ফলে আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রকাশের পূর্বে ও পরে বহু বৈজ্ঞানিক পরীক্ষা করা হয়। আমরা নিচে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ পরীক্ষার কথা আলোচনা করব। এই পরীক্ষাগুলির উদ্দেশ্য প্রধানতঃ অবিচল সরলরৈখিক বেগসম্পন্ন নিরীক্ষকের অথবা মাধ্যমের সাপেক্ষে আলোর বেগ নির্ণয়। এখানে বলা প্রয়োজন যে, প্রাক আইনষ্টাইন যুগে ধারণা ছিল যে, গতিশীল কাঠামোর সাপেক্ষে আলোক রশ্মির বেগের পরিবর্তন, বস্তুকণার বেগের পরিবর্তনের গালিলীয় সূত্র মেনে চলে। এই দুই ক্ষেত্রেই ভেক্টর সংযোজনের সামান্তরিক সূত্র প্রযোজ্য।†

**1-5·1 তারার আলোর অপেরণ (a) ব্র্যাডলের (Bradley) পরীক্ষা**— আলোর উৎস নিরীক্ষকের সাপেক্ষে গতিশীল হলে নিরীক্ষকের কাছে আলো




চিত্র 1—6

তার প্রকৃত গতিপথ থেকে বিচ্যুত হয়েছে বলে মনে হয়। যদি কোন তারা

† এ সম্বন্ধে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে নিম্নলিখিত বইগুলিতে :

C. Moller : The Theory of Relativity (Oxford University Press, London 1952)—পৃষ্ঠা 10—15.

W. G. V. Rosser : An Introduction to the Theory of Relativity (Butterworths, London 1964) পৃষ্ঠা 28—32.

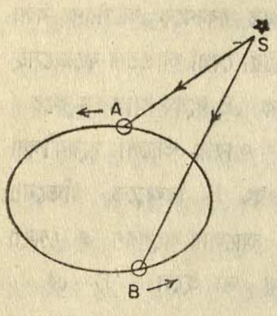
নিরীক্ষকের সুবিন্দুতে (zenith) অবস্থান করে তা হলে তার দূরবীক্ষণ যন্ত্রটি উল্লম্ব রেখা থেকে সামান্য বেঁকিয়ে রাখলে তবে তারাটিকে দেখা যায় ( চিত্র 1—6a )। প্রকৃত দিক ও আপাত দিকের মধ্যস্থিত কোণকে অপেরণ বলা হয়। যে সময়ে আলো দূরবীক্ষণ যন্ত্রের নলটির দৈর্ঘ্য অতিক্রম করে সেই সময়ে দূরবীক্ষণ যন্ত্র নিরীক্ষকের সঙ্গে ডান দিকে AB দূরত্ব অতিক্রম করে। BB′ এখন দূরবীক্ষণ যন্ত্রের নূতন অবস্থান। তারার আলো দূরবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য লেন্সে A′ বিন্দুতে প্রবেশ করে এবং B বিন্দুতে অভিনেত্র লেন্সের মধ্য দিয়ে নিরীক্ষকের চোখে পেঁছায়। আলোর অপেরণ এ ক্ষেত্রে $\eta$। আলো যদি $t$ সময়ে A′B দূরত্ব অতিক্রম করে তা হলে $A'B = ct$, $c$ এখানে আলোর বেগ। নিরীক্ষকের বেগ যদি $v$ হয়, তা হলে $AB = vt$ ( চিত্র 1—6b )। আলো ও নিরীক্ষক উভয়ের বেগ জানা থাকলে আলোর নিরীক্ষকের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ ত্রিভুজ সূত্র (চিত্র 1—6c) দ্বারা নির্ণয় করা যায়। যেহেতু নিরীক্ষক সব সময় নিজে স্থির আছে বলে মনে করে অতএব আমাদের সকল বেগের সঙ্গে উল্টোদিকে $\mathbf{v}$ বেগ $(-\mathbf{v})$ বেগ যোগ করতে হবে। তা হলে নিরীক্ষকের বেগ শূন্য হয়ে যায় কারণ $\mathbf{v}-\mathbf{v}=0$। এখন আলোর বেগ $\mathbf{c}$ এর সঙ্গে $-\mathbf{v}$ যোগ করলে আলোর আপেক্ষিক বেগ পাওয়া যায়। ভেক্টর সংযোজনের ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী চিত্র 1 – 11(c) এর A′A আলোর আপেক্ষিক বেগ। এখানে লক্ষ করতে হবে যে, দূরবীক্ষণ যন্ত্রটি নিরীক্ষকের বেগ ভেক্টরের দিকে বেঁকিয়ে রাখতে হয়।

দৈনন্দিন জীবনেও আমরা এই ধরণের ঘটনার সম্মুখীন হই। বাতাস না থাকলে বৃষ্টির জল উল্লম্ব রেখায় পড়ে। বৃষ্টির মধ্যে দৌড়ালে জলের ধারা বাঁকাভাবে পড়ছে বলে মনে হয় এবং ছাতাও বাঁকাভাবে ধরতে হয়।

চিত্র (1—6c) অনুযায়ী $\tan \eta = \dfrac{v}{c}$ (1—24)

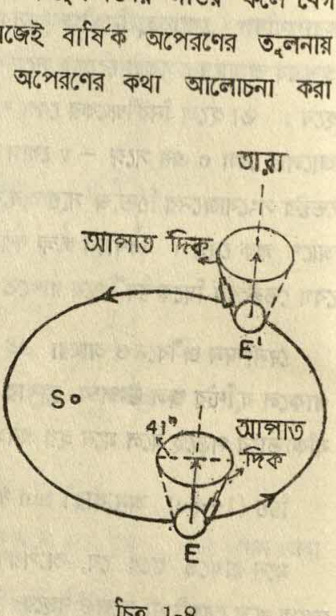
মনে রাখতে হবে যে, অপেরণ ও লম্বন এক নয়। তারার দূরত্ব পৃথিবী থেকে খুব বেশী না হলেও বছরের বিভিন্ন সময়ে তারাটিকে বিভিন্ন দিকে দেখা যায় ( লম্বন ) ( চিত্র 1—7)। পৃথিবী সূর্যের চারদিকে উপগোলকাকৃতি পথে ঘুরছে। কাজেই পৃথিবী ছয় মাস পরে তার কক্ষপথের বিপরীত দিকে অবস্থিত থাকে, কাজেই তারাটিকে দেখতে গেলে এখন দূরবীক্ষণ যন্ত্রটি অন্য দিকে

বেঁকিয়ে রাখতে হবে। কিন্তু তারাটি পৃথিবী থেকে বহু দূরে অবস্থিত থাকলে অর্থাৎ AB দূরত্ব তারার দূরত্ব $AS$ এর তুলনায় উপেক্ষণীয় হলে লম্বন দেখা যায় না। কিন্তু এই দূরত্বের (তথাকথিত নিশ্চল) তারাগুলির ক্ষেত্রেও অপেরণ দেখা যায়। কারণ অপেরণ আলোর উৎসের সাপেক্ষে নিরীক্ষকের বেগের উপর নির্ভর করে, অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।



চিত্র 1-7

পৃথিবীর উপরিভাগের নিরীক্ষকের তারার সাপেক্ষে দু'ধরণের বেগ আছে। পৃথিবীর আহ্নিক ও বার্ষিক গতির ফলে এই দুই বেগের সৃষ্টি হয়। কিন্তু প্রথম গতির জন্য বিষুবরেখা অঞ্চলের নিরীক্ষকের তারার সাপেক্ষে বেগ হবে প্রায় সেকেন্ডে 500 মিটার কিন্তু দ্বিতীয় গতির ফলে বেগ হবে প্রায় সেকেন্ডে 30 কিলোমিটার। কাজেই বার্ষিক অপেরণের তুলনায় আহ্নিক অপেরণ নগণ্য। এখন বার্ষিক অপেরণের কথা আলোচনা করা যাক। চিত্র (1—8)-এ সূর্যের চারদিকের কক্ষপথে পৃথিবীর দু'টি অবস্থান E ও E' দেখান হয়েছে। তীর চিহ্ন দিয়ে এই দুই স্থানে পৃথিবীর বেগের দিক নির্দিষ্ট করা হয়েছে। আমরা পূর্বেই বলেছি যে, দূরবীক্ষণ যন্ত্রটি নিরীক্ষকের বেগের দিকে বেঁকিয়ে রাখতে হয়। সেজন্য $E$ বিন্দুতে দূরবীক্ষণ যন্ত্রটিকে ডান দিকে এবং $E'$ বিন্দুতে বাঁ দিকে বেঁকিয়ে ধরতে হয়েছে। একটু চিন্তা করলেই দেখা যাবে যে, পৃথিবী যখন একবার সূর্যের চারদিকে প্রদক্ষিণ করে আসবে তখন তারাটিকেও আকাশে একবার বৃত্তাকার অথবা উপবৃত্তাকার পথে ঘুরে আসতে দেখা যাবে। অপেরণের পরিমাণ



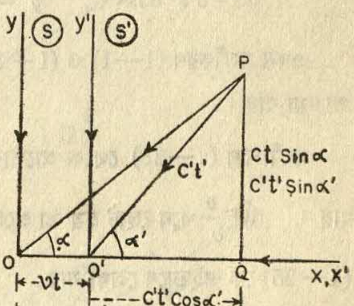
চিত্র 1-8

$$\eta=\tan^{-1}\frac{v}{c}=\tan^{-1}\frac{3\times10^{6}}{3\times10^{10}}=\tan^{-1}(10^{-4})=20''.5.$$

এতএব বৃত্ত বা উপবৃত্তের কৌণিক ব্যাস 41″হবে।

তথাকথিত নিশ্চল তারার এই বার্ষিক গতি প্রথম লক্ষ করেন 1727 খ্রীষ্টাব্দে জ্যোতির্বিজ্ঞানী ব্র্যাডলে। ব্র্যাডলে 1727 থেকে 1728 খ্রীষ্টাব্দ পর্যন্ত গ্যামা ড্র্যাকনিস ( $\gamma$—Draconis) তারার অবস্থান লক্ষ করে সিদ্ধান্ত করেন যে, তারাটি বছরে একবার 41″ পরাক্ষ বিশিষ্ট উপবৃত্তাকার পথে ঘুরে আসে। যেহেতু আমাদের গণনা দ্বারা নির্ণীত পরিমাপ পরীক্ষালব্ধ পরিমাপের সঙ্গে মিলে যায়, অতএব পৃথিবীর চরম বেগ প্রতি সেকেন্ডে 30 কিলোমিটার এবং সূর্য চরম স্থিতিশীল।

আমরা ইতিপূর্বে গণনা সহজ করার জন্য ধরে নিয়েছি যে, তারাটি নিরীক্ষকের সুবিন্দুতে অবস্থিত। এক্ষেত্রে তারাটির ক্রান্তিবৃত্ত তল থেকে উন্নতি 90°। যদি তারাটির উন্নতি 90° না হয় তা হলে অপেরণের পরিমাপ কত হবে সেই নিয়ে এখন আলোচনা করা যাক। তা হলে বোঝা যাবে কেন তারাগুলিকে কখনও বৃত্তাকার, কখনও উপবৃত্তাকার পথে ঘুরতে দেখা যায়।




চিত্র 1-9

চিত্র 1—9 এ $P$ তারাটির অবস্থান $S$ কাঠামোতে তারাটি স্থিতিশীল এবং $S'$ কাঠামোতে নিরীক্ষক স্থিতিশীল। $S'$ $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে $OO'$ দিকে $v$ বেগ সম্পন্ন। আমরা এখানে $y$ ও $y'$ অক্ষের নিচের দিক এবং $x$ ও $x'$ অক্ষের বাঁ দিককে ধনাত্মক ধরব। চিত্র 1—9 থেকে স্পষ্ট যে আলোর প্রকৃত বেগ ভেক্টর $OQ$ রেখার সঙ্গে $\alpha$ কোণ উৎপন্ন করে কিন্তু নিরীক্ষকের সাপেক্ষে তার আপেক্ষিক বেগ ভেক্টর $OQ$ রেখার সঙ্গে $\alpha'$ কোণ উৎপন্ন করে। $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে আলোর বেগের $x$ ও $y$ উপাংশ যথাক্রমে $c\cos\alpha$ ও $c\sin\alpha$। অতএব $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে আলোর

বেগের $x'$ ও $y'$ উপাংশ হবে যথাক্রমে $c \cos\alpha - v$ ও $c \sin\alpha$। $S'$ কাঠামোয় আলোর বেগের মান $c'$ হলে

$$c' \cos\alpha' = c \cos\alpha - v \qquad (1\text{—}25)$$

$$\text{এবং } c' \sin\alpha' = c \sin\alpha \qquad (1\text{—}26)$$

সমীকরণ $(1-25)$ কে $(1\text{—}26)$ দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায়

$$\cot\alpha' = \cot\alpha - \frac{v}{c} \operatorname{cosec} \alpha \qquad (1\text{—}27)$$

এই সমীকরণটি সরাসরি গালিলীয় রূপান্তর সূত্র [সমীকরণ $(1-1)$ ও $(1\text{—}1a)$ ] থেকেও পাওয়া যায়। $S$ কাঠামোয় আলোক রশ্মির সমীকরণ

$$x = ct \cos\alpha, \qquad y = ct \sin\alpha \qquad (1\text{—}28)$$

$S'$ কাঠামোয় আলোক রশ্মির সমীকরণ হল

$$x' = c't' \cos\alpha', \qquad y' = c't' \sin\alpha' \qquad (1\text{—}29)$$

এখন সমীকরণ $(1\text{—}1)$ ও $(1-1a)$ ব্যবহার করলে $(1-25)$ ও $(1-26)$ পাওয়া যায়।

সমীকরণ $(1\text{—}28)$ থেকে আলোর অপেরণ $\eta \equiv \alpha' - \alpha$ এর মান নির্ণয় করা যায়। যদি $\frac{v}{c}$ খুব ছোট হয় তা হলে $\eta$র মান খুব ছোট। সে ক্ষেত্রে সমীকরণ $(1-25)$ কে এইভাবে লেখা যায়

$$c'\cos(\alpha + \eta) = c \cos \alpha - v \qquad (1-30)$$

সমীকরণ $(1\text{—}25)$ ও $(1\text{—}26)$ থেকে পাই

$$c' = \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv \cos \alpha} = c\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - 2\frac{v}{c} \cos \alpha}$$

$$\simeq c\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right) \qquad (1\text{—}31)$$

আমরা এখানে $\frac{v}{c}$ এর দ্বিতীয় ও উচ্চতর ঘাতকে উপেক্ষণীয় বলে বাদ দিয়েছি।

সমীকরণ (1—25) ও (1—31) থেকে পাই

$$\cos(\alpha+\eta)=\left(\cos\alpha-\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\cos\alpha\right)^{-1}$$

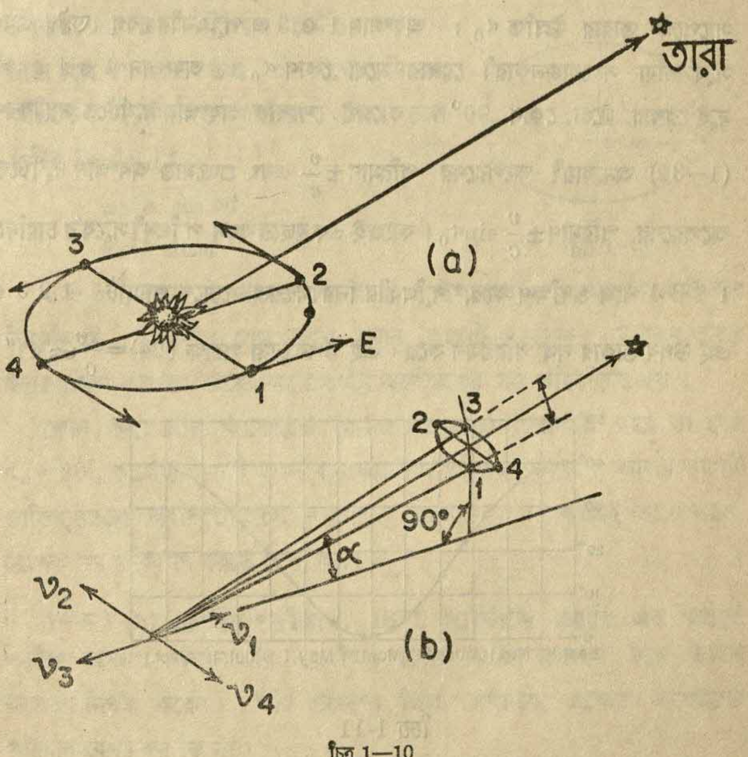
অথবা $\cos\alpha\ \cos\eta-\sin\alpha\ \sin\eta\simeq\left(\cos\alpha-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\cos\alpha\right)$

অর্থাৎ $\cos\alpha-\eta\sin\alpha\simeq\cos\alpha-\frac{v}{c}\sin^2\alpha$ কারণ $\cos\eta\simeq1$,

$\sin\eta\simeq\eta$

অর্থাৎ $\eta=\frac{v}{c}\sin\alpha$ (1—32)

চিত্র (1—10 $a$) তে সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর কক্ষপথে তিনমাসের

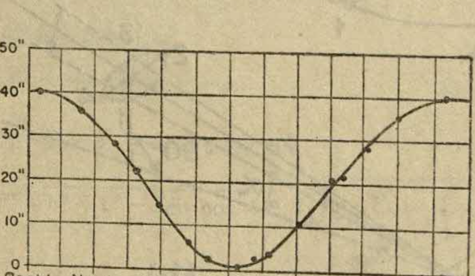



চিত্র 1—10

ব্যবধানে চারটি অবস্থান 1, 2, 3, 4 দেখান হয়েছে। চিত্র (1—10$b$) তে দেখান হয়েছে, পৃথিবীর নিরীক্ষকের কাছে একটি নিশ্চল তারা কিভাবে

অবস্থান পরিবর্তন করে। আমরা এখানে সূর্যকে কক্ষপথের মধ্যস্থানে দেখিয়েছি এবং ধরে নিয়েছি যে, পৃথিবীর দ্রুতি কক্ষপথের সকল স্থানে সমান। এই অনুমান যথাযথ না হলেও এর জন্য ভুলের পরিমাণ এক্ষেত্রে খুবই কম। কাজেই গণনা সহজ করার জন্য এ রকম ধরা চলে।

ব্র্যাডলে দেখলেন যে, তিনি তারার অবস্থানের যে পরিবর্তন লক্ষ করেছিলেন তা লম্বনের ফলে ঘটে নি। কারণ লম্বনের ফলে আমরা আশা করব যে, অবস্থান 2 এ তারার উন্নতি সবচেয়ে বেশী এবং অবস্থান 4 এ সবচেয়ে কম হবে। কিন্তু ব্র্যাডলে দেখলেন অবস্থান 3 এ তারার উন্নতি সবচেয়ে বেশী এবং 1 এ সবচেয়ে কম মনে হয়। পৃথিবীর ক্রান্তিবৃত্ততলের সাপেক্ষে তারার উন্নতি $\alpha_0$। অবস্থান 1 ও 3 এ পৃথিবীর বেগ ভেক্টর এবং সূর্য তারা সংযোজনকারী রেখার মধ্যে কোণ $\alpha_0$। অবস্থান 2 ও 4 এ এই দুই রেখার মধ্যে কোণ $90^\circ$। কাজেই শেষোক্ত অবস্থান দু'টিতে সমীকরণ (1—32) অনুযায়ী অপেরণের পরিমাণ $\pm\frac{v}{c}$ এবং প্রথমোক্ত অবস্থান দু'টিতে অপেরণের পরিমাণ $\pm\frac{v}{c}\sin\alpha_0$। কাজেই এক বছরে যখন পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 1 2 3 4 পথে প্রদক্ষিণ করে, পৃথিবীর নিরীক্ষকের চোখে তারাটি 1 2 3 4 এই উপবৃত্তাকার পথ পরিক্রমণ করে। এই উপবৃত্তের পরাক্ষ $(24)=\frac{2v}{c}\simeq 41''$




চিত্র 1-11

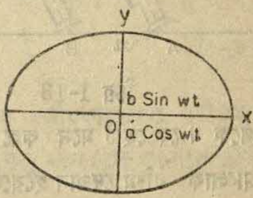
এবং উপাক্ষ $(13)=\frac{2v}{c}\sin\alpha_0$। ব্র্যাডলে পরীক্ষা দ্বারা বছরের বিভিন্ন সময়ে গ্যামা ড্র্যাকনিস তারার উত্তর দক্ষিণ দিকের অপেরণ নির্ণয় করেন।

পূর্ব-পশ্চিমদিকের অপেরণের পরিমাণ করায় তাঁর অসুবিধা ছিল। কাজেই ব্র্যাডলের পরীক্ষা থেকে উপবৃত্তের উপাক্ষ নির্ণয় করা সম্ভব হয়েছিল। এক্ষেত্রে $\alpha_0 = 75^\circ$ কাজেই $\frac{2v}{c}\sin\alpha_0 = 39{\cdot}6''$ ব্র্যাডলে। দেখেন যে, অপেরণের মান সারা বছরে সময়ের সঙ্গে সাইন অপেক্ষকের মত পরিবর্তিত হয় (চিত্র 1—11) এবং তার সর্বোচ্চ মান গণনালব্ধ মানের খুবই কাছাকাছি।

চিত্র 1—10 ($b$) থেকে স্পষ্ট যে, তারার অবস্থানের উত্তর দক্ষিণ রেখা (13) এর উত্তর অভিক্ষেপ $\pm\frac{v}{c}\sin\alpha_0$ এর মধ্যে থাকবে। একটি বিন্দু যদি উপবৃত্তাকার পথে অবিচল কৌণিক বেগ $\omega$ নিয়ে চলে তা হলে তার $x$ অক্ষের দিকের অভিক্ষেপ নিম্নলিখিত সমীকরণ মেনে চলে (চিত্র 1—12):

$$x = a\cos\omega t$$

$$y = b\sin\omega t$$




চিত্র 1-12

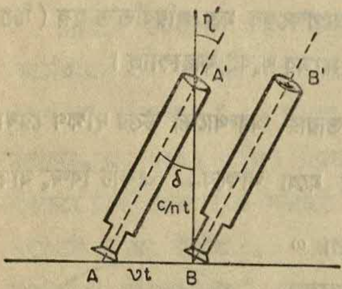
$a$ ও $b$ যথাক্রমে উপবৃত্তের পরাক্ষার্ধ ও উপাক্ষার্ধ। এখানে আমরা ধরে নিয়েছি যে, পৃথিবীর বেগ সর্বত্র সমান, কাজেই $\omega$ ধ্রুবক। অতএব তারার উত্তর-দক্ষিণ অপেরণ সময়ের সঙ্গে সাইন অপেক্ষকের মত পরিবর্তিত হয়।

কোন তারা যদি খ-মেরুতে (celestial pole) অবস্থিত থাকে তা হলে $\alpha_0 = 90^\circ$, কাজেই তারাটি এখন বৃত্তাকার পথ পরিক্রমণ করবে। আবার তারাটি ক্রান্তিবৃত্ততলে অবস্থিত হলে $\alpha_0 = 0$, $\sin\alpha_0 = 0$। কাজেই তাকে সরল-রৈখিক পথ পরিক্রমণ করতে দেখা যাবে।

**1—5·1 (b) এয়ারির পরীক্ষা:** 1871 খ্রীষ্টাব্দে এয়ারি এক অদ্ভুত পরীক্ষা করেন। তিনি তাঁর দূরবীক্ষণ যন্ত্রের নলটি জলপূর্ণ করে তারার অপেরণ নির্ণয় করেন। তাঁর উদ্দেশ্য ছিল, দেখা যে, এক্ষেত্রে অপেরণের পরিমাণ বেশী হয় কি না।

এয়ারির জানা ছিল যে, জলের মধ্যে আলোর বেগ শূন্যস্থানে তার বেগের চেয়ে কম। তারাটি যদি নিরীক্ষকের সুবিন্দুতে থাকে (চিত্র 1—13) তা হলে

এখন আলোর দূরবীনের নলের ভিতর যেতে বেশী সময় লাগবে কারণ জলের মধ্যে আলোর বেগ $\frac{c}{n}$, যেখানে $n$ $(>1)$ জলের প্রতিসরাঙ্ক। এখন আগের চেয়ে দূরবীনের নল অতিক্রম করতে আলোর বেশী সময় লাগবে, ফলে সেই সময় দূরবীনটি বাঁ দিকে আরও বেশী দূরত্ব AB $(=vt)$ অতিক্রম করবে। ফলে AA′ ও A′B এর মধ্যস্থ কোণ $\eta$-র চেয়ে বড় হবে। এখন অবশ্য আমাদের মনে রাখতে হবে যে, প্রতিসরণ কোণ আপতন কোণের চেয়ে ছোট হবে। পূর্বের আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে, আমরা অপেরণ কোণ থেকে $\eta$-কে ছোট মনে করতে পারি। চিত্র 1-13এ জলপূর্ণ দূরবীনের মধ্যে আলোক রশ্মি দেখান হয়েছে। এখানে অপেরণের পরিমাণ ধরা হয়েছে $\eta'$। জলের মধ্যে প্রতিসরণের ফলে প্রতিসরণ কোণ $\delta$ $\eta'$এর চেয়ে ছোট এবং স্নেলের (Snell) সূত্র অনুযায়ী




চিত্র 1-13

$$\frac{\sin \eta'}{\sin \delta} = n \qquad (1\text{-}33)$$

আমরা $\eta'$ ও $\delta$ কে ছোট ধরতে পারি কাজেই

$$\frac{\eta'}{\delta} \simeq n \qquad (1\text{-}33a)$$

এখন যে সময়ে আলো A′B দূরত্ব অতিক্রম করে সেই সময়ে দূরবীন পৃথিবীর সঙ্গে AB দূরত্ব অতিক্রম করে। কাজেই

$$\delta \simeq \frac{v}{c/n} = \frac{nv}{c} \qquad (1\text{-}34)$$

আমরা চিত্রে বোঝাবার জন্য কোণগুলিকে বড় করে এঁকেছি কিন্তু আসলে কোণগুলি খুব ছোট।

সমীকরণ (1-33a) ও (1-34) থেকে আমরা পাই

$$\eta' = n\delta = \frac{n^2 v}{c} \qquad (1\text{-}35)$$

সমীকরণ (1-24) থেকে $\eta = \frac{v}{c}$ কাজেই $\eta' > \eta$ কারণ $\eta^2 >$ ।

কিন্তু আশ্চর্যের বিষয় এই যে, এয়ারি দূরবীন জলপূর্ণ করেও একই স্থানে তারাগুলিকে দেখতে লাগলেন। লম্ব থেকে দূরবীনের নতি বাড়াতে হল না। এয়ারির পরীক্ষার যাথার্থ্য এমন ছিল যে, $\frac{v}{c}$-এর প্রথম ঘাত পর্যন্ত,কোণের পরিমাপ করা যায়, $\frac{v}{c}$- এর দ্বিঘাত নির্ণয় করা যায় না। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, $\eta'$ ও $\eta$ এর মধ্যে পার্থক্য $\frac{v}{c}$ এর প্রথম ঘাতের উপর নির্ভর করে না। আমাদের সমীকরণ অনুযায়ী পাই

$$\eta' - \eta = (n^2 - 1) \frac{v}{c} \tag{1-36}$$

কাজেই অপেরণের পরিবর্তন হলে এয়ারি বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ নির্ণয় করতে পারতেন। কিন্তু মনে হচ্ছে যেন সে চেষ্টা বানচাল করার জন্যই $\eta' = \eta$ দেখা গেল।

**1-6. ইথারতত্ত্ব ঃ** এখন আমরা মূল বক্তব্য থেকে একটু সরে এসে একটু ঐতিহাসিক পটভূমিকা নিয়ে আলোচনা করব। 1861-2 খ্রীষ্টাব্দে ম্যাক্স-ওয়েলের সমীকরণগুলির আবিষ্কারের ফলে দেখা গেল যে, তড়িৎ-চুম্বকীয় তরঙ্গ শূন্য স্থানে $c$ বেগে প্রবাহিত হয়। 1888 খ্রীষ্টাব্দে অর্থাৎ ম্যাক্স-ওয়েলের মৃত্যুর নয় বৎসর পরে হার্ট্স্ (Herz) পরীক্ষাগারে তড়িৎ-চুম্বকীয় তরঙ্গ উৎপন্ন করে এবং গ্রাহক যন্ত্রে তা গ্রহণ করে দেখালেন যে, আলো তড়িৎ-চুম্বকীয় তরঙ্গ। কাজেই এ থেকে বোঝা গেল যে, এই তরঙ্গ যখন দূরের নক্ষত্রগুলি থেকে পৃথিবীতে আসে তখন কোটি কোটি মাইল মহাশূন্য অতিক্রম করে আসে। তখন পর্যন্ত লোকে জলের তরঙ্গের কথা জানত এবং শব্দ তরঙ্গের কথাও জানত। এই দুই রকম তরঙ্গের জন্য একটি বস্তু মাধ্যমের প্রয়োজন। তখন বস্তু মাধ্যম ব্যতিরেকে তরঙ্গের পরিবহন কল্পনা করা কষ্টসাধ্য ছিল। তাই মনে করা হল যে, বিশ্বের সর্বত্র, এমন কি মহাশূন্যেও পরিব্যাপ্ত হয়ে আছে এক বিশেষ ধরণের বস্তু মাধ্যম যার নাম দেওয়া হল 'ইথার'। যে ইথারের ভিতর দিয়া আলো প্রবাহিত হয় রবার্ট হুক (Robert Hooke) তার

নাম দিয়েছিলেন 'আলোক পরিবাহী ইথার' (luminiferous aether)। সমস্ত গ্রহ নক্ষত্র এই ইথার মাধ্যমের ভিতর দিয়ে ছুটে চলেছে কিন্তু সাধারণ বস্তুর মত ইথার মাধ্যম তাদের গতিতে কোন বাধা সৃষ্টি করে না। কল্পনা করা হল যে, অণু ও পরমাণুর অভ্যন্তরের শূন্যস্থানগুলিতেও ইথার পরিব্যাপ্ত হয়েছে। বহু চেষ্টা করেও এই ইথার মাধ্যমের ওজন নির্ণয় করা গেল না। কাজেই ধরা হল যে, এর ওজন নেই। এই শান্ত সমুদ্রের মত বিশ্বব্যাপী ইথারের সাপেক্ষে স্থির কাঠামোকে শেষে বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামো বলে মনে করা হল।

আমরা দেখেছি যে, ব্র্যাডলের পরীক্ষা থেকে পৃথিবীর চরম বেগের যে মান নির্ণীত হয় তার সঙ্গে এয়ারির পরীক্ষার ফল মেলে না। এখন এয়ারির পরীক্ষার ফলাফল কিভাবে ব্যাখ্যা করা যায়? রেলগাড়ী যখন বায়ুর মধ্য দিয়ে প্রবল বেগে ছুটে চলে তখন বায়ুর মধ্যে আলোড়নের সৃষ্টি হয় এবং চার পাশের বায়ুও কিছুটা গতিশীল হয়। বায়ু রেলগাড়ীর সঙ্গে সমান বেগ নিয়ে ধাবিত হয় না। আমরা মনে করতে পারি যে, কোন বস্তু ইথার মাধ্যমের মধ্যে তার সাপেক্ষে গতিশীল হলে সে ইথারকে খানিকটা টেনে নিয়ে যায় অর্থাৎ সংলগ্ন ইথার মাধ্যমের বেগ পুরাপুরি $v$ না হলেও $fv$ হয় যেখানে $f<$। একটি ভগ্নাংশ। $f$ কে ইথার টান গুণাঙ্ক বলা হয়। এক্ষেত্রে ইথার ও গতিশীল বস্তুর আপেক্ষিক বেগ $v$ না হয়ে হবে $v(1-f)<v$। কাজেই $f$ এর মান উপযুক্ত হলে $\eta'=\eta$ হতে পারে।

এয়ারির পরীক্ষার ফলে আমরা জানতে পেরেছি যে, $\eta'=\eta=v/c$ কাজেই সমীকরণ (1-33a) থেকে (1-24) এর সাহায্যে পাই

$$\delta=\frac{\eta}{n}=\frac{v}{nc} \qquad (1\text{-}37)$$

দূরবীনের নলের দৈর্ঘ্য $l$ হলে আলোর এই দূরত্ব জলের মধ্যে অতিক্রম করতে সময় লাগে

$$t=\frac{nl}{c} \qquad (1\text{-}38)$$

যেহেতু ইথারের সাপেক্ষে বস্তুর বেগ এখন $v\,(1-f)$, অতএব আলোক রশ্মিকে অভিনেত্র লেন্সের মধ্যভাগ থেকে নির্গত হতে হলে দূরবীনের ডান দিকের মোট ভ্রংশকে প্রতিসরণজনিত ভ্রংশ $l\delta$র সমান হতে হবে অর্থাৎ

$$v\,(1-f)\,t=l\delta \qquad (1\text{-}39)$$

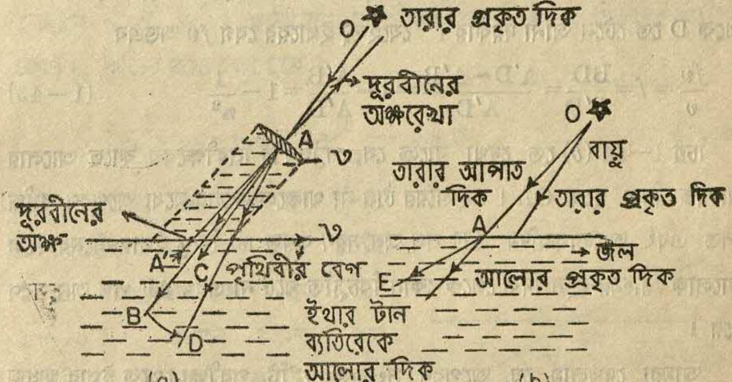
এখন সমীকরণ (1-37) ও (1-38) থেকে $\delta$ ও $t$ এর মান সমীকরণ (1-39)এ প্রতিস্থাপন করলে পাই

$$v\,(1\text{-}f)\,\frac{nl}{c}=\frac{lv}{nc}$$

অতএব

$$f=1-\frac{1}{n^2} \tag{1-40}$$

বহুদিন পূর্বে ফ্রেনেল (Fresnel) 1818 খ্রীষ্টাব্দে তদানীন্তন ইথারের স্থিতিস্থাপক ঘনবস্তু তত্ত্ব অনুযায়ী ইথার টান গুণাঙ্কের উপরিউক্ত মান নির্ণয় করেন*। এই জন্য একে ফ্রেনেলের ইথার টান গুণাঙ্ক বলা হয়। শুধু তাই নয় তিনি তাঁর সমদেশীয় বিজ্ঞানী আরাগোর (Arago) কাছে লেখা চিঠিতে উপরিউক্ত বৈজ্ঞানিক পরীক্ষার ফলাফলের সঠিক ভবিষ্যদ্বাণী করেন। ইতিপূর্বেই পরীক্ষাটি প্রস্তাব করেছিলেন 1776 খ্রীষ্টাব্দে বস্কোভিচ (Boscovich)।




চিত্র 1-14

যদিও আমরা উপরিউক্ত আলোচনায় ধরে নিয়েছি যে, তারাটি সুবিন্দুতে অবস্থিত, কিন্তু অপেরণের পরিমাণ খুব কম হওয়ায় এই অনুমানের কোন

* এ ব্যাপারের বিশদ আলোচনার জন্য নিম্নলিখিত বই দেখুন: W, G, V, Rosser: An Introduction to the Theory of Relativity (Butterworths 1964 পৃ 36—9.

প্রয়োজন নেই। আলোক রশ্মির গতিপথ চিত্র 1-14 ($a$) তে $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে এবং চিত্র 1-14 ($b$) তে $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে দেখান হয়েছে। $S$ হচ্ছে ইথার কাঠামো এবং $S'$ পৃথিবীর উপরস্থিত কাঠামো।

চিত্র 1—14($a$) তে AA' দূরবীনের অক্ষরেখা এবং OA তারা থেকে আপতিত আলোকরশ্মি। প্রতিসরণের পর আলো AB পথ অনুসরণ করে। AC, OA র বর্ধিত অংশ অর্থাৎ আলোর মূল দিক। কোণগুলি ছোট কাজেই তারা আনুভূমিক রেখার ছেদগুলির সঙ্গে সমানুপাতী। কাজেই স্নেলের সূত্রানুযায়ী

$$A'C = nA'B \qquad (1-41)$$

জলের মধ্যে আলোর বেগ কম হবার ফলে, যে সময়ে আলো দূরবীনের নল অতিক্রম করে সেই সময় অভিনেত্র লেন্স A' থেকে D বিন্দুতে পেঁছায়। এখানে

$$A'D = nA'C = n^2\ A'B \qquad (1-42)$$

কাজেই এখন যদি আলোকে D বিন্দুতে পেঁছতে হয় তা হলে ইথারকে B থেকে D তে টেনে আনা দরকার। যেহেতু ইথারের বেগ $fv$ অতএব

$$\frac{fv}{v} = f = \frac{BD}{A'D} = \frac{A'D - A'B}{A'D} = 1 - \frac{A'B}{A'D} = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad (1-43)$$

চিত্র 1—14 ($b$) তে দেখা যাচ্ছে যে, পৃথিবীর নিরীক্ষকের কাছে আলোর আপাত দিক হবে OA। ইথারের টান না থাকলে জলের মধ্যে অপেরণ বৃদ্ধি পেত এবং আলোকরশ্মি AE পথ অনুসরণ করত। কিন্তু ইথার টানের ফলে আলোক রশ্মির মূল দিক থেকে কোন বিচ্যুতি ঘটে না এবং AF পথ অনুসরণ করে।

আমরা দেখলাম যে, অপেরণ সংক্রান্ত দু'টি পরীক্ষা থেকে ইথার মাধ্যম সম্বন্ধে আমরা ভিন্ন ভিন্ন সিদ্ধান্তে উপনীত হই। ব্র্যাডলের পরীক্ষা থেকে সিদ্ধান্ত করতে পারি যে, পৃথিবী ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে সেকেণ্ডে 30 কিলোমিটার বেগ নিয়ে বিচরণ করা সত্ত্বেও সে পারিপার্শ্বিক ইথার মাধ্যমকে আলোড়িত করে না কিন্তু আমাদের পরীক্ষাগারের দূরবীনের নলের মধ্যস্থিত সামান্য পরিমাণ জলও ইথারকে টেনে নিয়ে যেতে সক্ষম। এ যেন ইথার কাঠামো নির্ণয় করার বিরুদ্ধে বিরাট এক ষড়যন্ত্র! এখন দেখা দরকার যে,

ইথার টানের ঘটনা এইরূপ না-ধর্মী পরীক্ষা ছাড়া হাঁ-ধর্মী পরীক্ষাতেও ধরা পড়ে কিনা। শেষোক্ত ধরণের পরীক্ষার কথা আমরা 1—5.2 (*b*) বিভাগে আলোচনা করব।

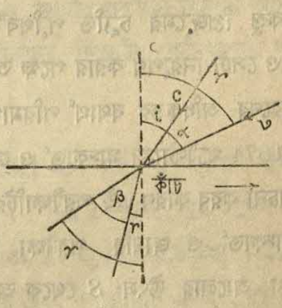
**1-5.2 বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর সাপেক্ষে গতিশীল বস্তু মাধ্যমে আলোর বেগ নির্ণয়: * (*a*) মাস্কার্ত (Mascart), জামাঁ (Jamin) ও হ্যোকের (Hoek) পরীক্ষা**—আমরা জানি যে, কাঁচের প্রতিসরাঙ্ক শূন্য স্থানে আলোর বেগ ও কাঁচের মধ্যে আলোর বেগের অনুপাতের সমান। তা ছাড়া আমরা 1—3 বিভাগে দেখেছি যে, প্রাচীন ইথার তত্ত্ব অনুযায়ী কাঁচের বাহিরে শূন্যস্থানে আলোর বেগ দিক নিরপেক্ষ নয়। অনুরূপভাবে দেখা যাবে যে, কাঁচের মধ্যেও আলোর বেগ বিভিন্ন দিকে বিভিন্ন রকম। ইথার কাঠামো $S$ এ শূন্যস্থানে আলোর বেগ যদি $c$ হয় তা হলে $v$ বেগ সম্পন্ন $S'$ কাঠামোয় আলোর বেগ হবে

$$c' = c - v \cos \alpha, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1\text{—}44)$$

যেখানে $\alpha$ $S'$ ও $S$ কাঠামোর আপেক্ষিক বেগ $\mathbf{v}$ এবং $\mathbf{c}$ ভেক্টরের মধ্যস্থিত কোণ। কাঁচের মধ্যে বেগ হবে

$$c_g' = c_g - v \cos \beta = \frac{c}{n} - v \cos \beta \qquad (1\text{—}45)$$

যদি $\beta$ কাঁচের মধ্যে আলোক রশ্মির বেগ ভেক্টর ও আপেক্ষিক বেগ ভেক্টর $\mathbf{v}$ এর মধ্যস্থিত কোণ হয় (চিত্র 1—15)। এখানে আমরা ধরে নিয়েছি যে, কাঁচ ইথারকে টানে না। স্পষ্টই বোঝা যাচ্ছে যে, এ ক্ষেত্রে $S'$ কাঠামোয় নির্ণীত প্রতিসরাঙ্ক



চিত্র 1-15

$$n' = \frac{c'}{c_g'} = \frac{c - v \cos \alpha}{\dfrac{c}{n} - v \cos \beta} \qquad (1-46)$$

কাজেই প্রতিসরাঙ্ক সাধারণতঃ আলোর আপতন কোণের উপর নির্ভর করবে।

চিত্র 1—15 এ $i=\gamma-\alpha$ আপতন কোণ এবং $r=\gamma-\beta$ প্রতিসরণ কোণ। কাজেই স্নেলের সূত্র অনুযায়ী

$$n'=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)} \tag{1—47}$$

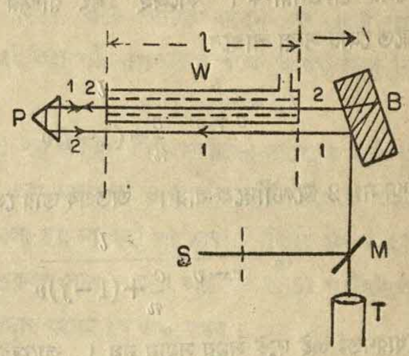
1810 খ্রীষ্টাব্দে আরাগো তাঁর দূরবীনের সামনে একটি অবার্ণ (achromatic) প্রিজ্‌ম্‌ রেখে পরীক্ষা করেন আকাশের বিভিন্ন দিকে দূরবীনটি ফেরালে, বিভিন্ন দিকের তারার আলোর প্রিজ্‌ম্‌ দ্বারা উৎপন্ন চ্যুতি কিভাবে বদলায়। আমরা দেখেছি যে, বিভিন্ন দিকের প্রিজ্‌মের প্রতিসরাঙ্ক বিভিন্ন কাজেই চ্যুতিও বিভিন্ন। এই চ্যুতির বিভিন্নতা থেকে নীতিগতভাবে ইথার কাঠামোর সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু আরাগো এ ধরণের কোন দিকনির্ভর চ্যুতি দেখতে পান নি এবং পৃথিবীর চরম বেগ নির্ণয় করা সম্ভব হয় নি।

আরাগো ফ্রেনেলকে তাঁর পরীক্ষার কথা জানালে তিনি 1811 খ্রীষ্টাব্দে তাঁর ইথার টান তত্ত্ব দ্বারা প্রমাণ করেন যে, $f=1-\frac{1}{n^2}$ ইথার টান গুনাঙ্ক হলে প্রিজ্‌মের চ্যুতি দিক নিরপেক্ষ হবে, অবশ্য যদি $\frac{v}{c}$ এর দ্বিতীয় ও উর্ধ্বতন ঘাতকে উপেক্ষা করা হয়।

কিন্তু প্রিজ্‌মের চ্যুতি পৃথিবীর ইথারের সাপেক্ষে বেগের উপর নির্ভর করলেও সেটা নিরূপণ করার পক্ষে আরাগোর পরীক্ষা যথেষ্ট যথার্থ ছিল না। এই ধরণের অধিকতর যথার্থ পরিমাপ করেন 1868 খ্রীষ্টাব্দে হ্যোক (Hoek) এবং 1874 খ্রীষ্টাব্দে মাস্কার্ত ও জামাঁ। আমরা নিচে শেষের পরীক্ষাটির কথা আলোচনা করব কারণ এই পরীক্ষাটির পরিমাপ অধিকতর যথার্থ।

মাস্কার্ত ও জামাঁর পরীক্ষা বিন্যাস চিত্র 1—16 এ দেখান হয়েছে। একরঙা আলোর উৎস $S$ থেকে আলোক রশ্মি একটি অর্ধস্বচ্ছ আয়না M এর উপর পড়ে। অর্ধেক আলো আয়নার উপরিভাগ থেকে প্রতিফলিত হয়ে সমান্তরাল তলবিশিষ্ট পুরু কাঁচ B র উপর পড়ে। এখানেও কিছুটা আলো B র উপরের তল থেকে প্রতিফলিত হয়ে 1 চিহ্নিত দিক অনুসরণ করে। আবার কিছুটা আলো কাঁচখণ্ডের মধ্যে প্রতিসরিত হয়ে পিছনের তল থেকে

প্রতিফলিত হয়ে 2 চিহ্নিত পথ অনুসরণ করে। 2 নং আলোক রশ্মি একটি জলপূর্ণ পাত্রের মধ্য দিয়ে গিয়ে একটি সমকোণী প্রিজমের উপর আপতিত হয়। প্রিজমের ভিতর হতে প্রতিফলিত হয়ে 2 নং রশ্মি 1 নং রশ্মির পথে উল্টোদিকে ধাবিত হয়। শেষে কাঁচ খণ্ড B র উপরিতলে প্রতিফলিত ও আয়না M এর ভিতর দিয়ে প্রতিসরিত হয়ে দূরবীন T র মধ্যে যায়। অপর দিকে 1 নং রশ্মি প্রিজম P র ভিতর প্রতিফলিত হয়ে জলপূর্ণ পাত্রের ভিতর দিয়ে উল্টোদিকে যায়।




চিত্র 1-16

শেষে কাঁচখণ্ডের পিছনের তল থেকে প্রতিফলিত হয়ে দূরবীনের মধ্যে 2 নং রশ্মির সঙ্গে মিলিত হয় এবং ব্যতিচার নকশার (interference fringe) সৃষ্টি করে। দূরবীনের মধ্য দিয়ে এই ব্যতিচার নকশা দেখা যায়। এখানে 1 নং রশ্মি জলের মধ্য দিয়ে দক্ষিণাবর্তে এবং 2 নং রশ্মি বামাবর্তে যাচ্ছে। চিত্র 1—16 থেকে সুস্পষ্ট যে, মাস্কার্ত ও জামাঁর পরীক্ষা বিন্যাস অনেকটা জামাঁর ব্যতিচার মাপকের মত, শুধু সেখানকার দ্বিতীয় কাঁচখণ্ডের স্থানে এখানে সমকোণী প্রিজম ব্যবহার করা হয়েছে।

এখানে আলোচনার সুবিধার জন্য আমরা মনে করি যে, পৃথিবী ইথারের সাপেক্ষে ডানদিকে $v$ বেগ নিয়ে ছুটে চলেছে। চিত্র 1—16 থেকে সুস্পষ্ট যে 1 ও 2 রশ্মির মধ্যে শুধু এই পার্থক্য যে, প্রথমটি $l$ দূরত্ব বায়ুর মধ্য দিয়ে বাঁ দিকে এবং জলের মধ্য দিয়ে ডানদিকে যায় এবং দ্বিতীয়টি একই দূরত্ব বায়ুর মধ্য দিয়ে ডানদিকে এবং জলের মধ্য দিয়ে বাঁ দিকে যায়। এই রশ্মিগুলির অপর অংশগুলি সমতুল্য। $l$ দূরত্ব বায়ুর মধ্য দিয়ে ডান দিকে যেতে 1নং রশ্মির সময় লাগবে $\dfrac{l}{c+v}$। জলের মধ্য দিয়ে $l$ দূরত্ব ডানদিকে যেতে সময়

লাগবে $\dfrac{l}{\frac{c}{n}-(1-f)v}$ কারণ ইথারের সাপেক্ষে জলের বেগ $(1-f)v$ এবং $n$ জলের প্রতিসরাঙ্ক। কাজেই 1নং রশ্মির $l$ দূরত্ব বায়ু ও জলের মধ্য দিয়ে যেতে মোট সময় লাগবে

$$t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{\frac{c}{n}-(1-f)v} \qquad (1\text{—}48)$$

রশ্মি নং 2 উল্টোদিকে যায়। অতএব তার মোট সময় লাগবে

$$t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{\frac{c}{n}+(1-f)v} \qquad (1\text{—}49)$$

সাধারণতঃ এই দুই সময় সমান নয়। কাজেই যন্ত্রটি এখন 180° ঘুরিয়ে দিলে রশ্মি নং 1 ও 2 পারস্পরিক স্থান বিনিময় করে এবং আমরা আশা করব যে, ব্যতিচার নকশার স্থান পরিবর্তন হবে। এই স্থান পরিবর্তনের পরিমাণ থেকে $v$ এর মান নির্ণয় করা যাবে। কিন্তু মাস্কার্ত ও জামাঁ যন্ত্রের কোন দিক বিন্যাসের ক্ষেত্রেই ব্যতিচার নকশার স্থান পরিবর্তন দেখতে পান নি। কাজেই $t_1 = t_2$ এই শর্ত থেকে পাই ( সমীকরণ 1—48 ও 1—49 ) ;

$$\frac{l}{c+v} + \frac{l}{\frac{c}{n}-(1-f)v} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{\frac{c}{n}+(1-f)v}$$

অর্থাৎ $$\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v} = \frac{1}{\frac{c}{n}-(1-f)v} - \frac{1}{\frac{c}{n}+(1-f)v}$$

অথবা $$\frac{2v}{c^2-v^2} = \frac{2(1-f)v}{\frac{c^2}{n^2}-(1-f)^2v^2}$$

অথবা $$c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(1-f) = c^2\left\{\frac{1}{n^2}-(1-f)^2\frac{v^2}{c^2}\right\}$$

আমরা যদি $\frac{v}{c}$ র দ্বিঘাতকে উপেক্ষা করি, তা হলে

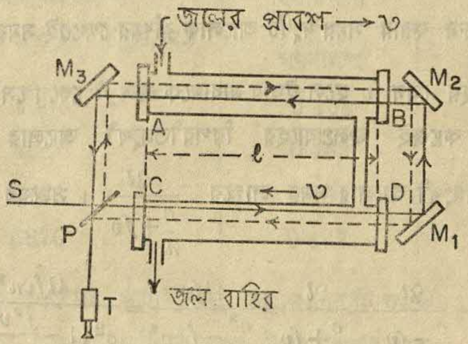
$$1-f = \frac{1}{n^2}$$

অর্থাৎ $$f = 1 - \frac{1}{n^2}$$

কাজেই আমরা ফ্রেনেলের ইথার টান গুণাংক ফিরে পেলাম এবং আর একটি না-ধর্মী পরীক্ষা ফ্রেনেলের তত্ত্বের সমর্থন করল।

হ্যোকও একই নীতির উপর ভিত্তি করে পরীক্ষা করেন এবং একই ফল পান। তবে তাঁর যন্ত্রের যাথার্থ্য এই ফল পরিমাপ করার পক্ষে যথেষ্ট ছিল কি না সন্দেহ।

**1-5·2(b) ফিজোর (Fizeau) পরীক্ষা** ঃ—ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে পৃথিবী স্থির থাকলেও এয়ারির পরীক্ষা এবং মাস্কার্ত ও জামাঁর পরীক্ষা থেকে একই ফল পাওয়া যেত। সেজন্য এদের বলা হয় না-ধর্মী পরীক্ষা। কিন্তু কোন হাঁ-ধর্মী পরীক্ষা দ্বারা কি ইথার টান প্রকল্প সমর্থন করা যায়? 1851 খৃষ্টাব্দে ফিজো তাঁর প্রসিদ্ধ পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করেন যে এও সম্ভব।




চিত্র 1-17

চিত্র 1—17 এ ফিজোর পরীক্ষা বিন্যাস দেখান হয়েছে। $S$ একরঙা অথবা প্রায় একরঙা আলোর উৎস। এই আলো প্রথমে একটি কাঁচের প্লেটের উপর পড়ে। ধাতুর প্রলেপ দ্বারা প্লেটটিকে অর্ধস্বচ্ছ করা হয়েছে। আলোর এক অংশ প্লেটের ভিতর দিয়ে একটি জলপাত্রের ভিতর প্রবেশ করে। জলের একটি বাঁকান নলের একদিকে জল প্রবেশ করে এবং অন্যদিকে বাহির হয়ে যায়। ইচ্ছামত বিভিন্ন বেগে জলকে নলের ভিতর দিয়ে প্রবাহিত করা যায়। নলের দুই অংশ AB ও CD র দুই প্রান্ত কাঁচের প্লেট দ্বারা বন্ধ যার উপরিভাগ সমতল। আলোক রশ্মির যে পথটি পূর্ণ রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে সে পথে আলো CD থেকে বেরিয়ে পর পর 45° কোণে অবস্থিত দু'টি আয়না

$M_1$ ও $M_2$ দ্বারা প্রতিফলিত হয়ে ABতে প্রবেশ করে এবং শেষে তৃতীয় আয়না $M_3$ তে প্রতিফলিত হয়ে দূরবীন T র ভিতর প্রবেশ করে। ফুটকি দেওয়া পথ দিয়ে আলোর অন্য অংশটি যায়। এটি প্রথমে অর্ধস্বচ্ছ কাঁচের প্লেটে প্রতিফলিত হয়ে $PM_3\ M_2\ M_1P$ পথে এসে পূর্ব রশ্মির সঙ্গে মিলিত হয় এবং ব্যতিচার নকশার সৃষ্টি করে। প্রথম রশ্মিটি $2l$ দূরত্ব জলপ্রবাহের বিপরীত মুখে এবং দ্বিতীয় রশ্মিটি একই দিকে অতিক্রম করে। ফিজো প্রথমে জলপ্রবাহ বন্ধ করে এবং পরে জলকে $v$ বেগে প্রবাহিত করে ব্যতিচার নকশার অপসরণ দেখতে পান এবং তার পরিমাপ করেন।

আমরা দেখেছি যে, জল স্থির থাকলে যে ব্যতিচার নকশা পাওয়া যায় তা পৃথিবী ইথার কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির থাকলেও পাওয়া যেত। কাজেই $2l$ দূরত্ব অতিক্রম করার সময় দু'টি আলোক রশ্মির ক্ষেত্রেই সময় লাগে $\frac{2ln}{c}$।

এখন জলপ্রবাহের বেগ $v$ হলে ইথার মাধ্যমকে জল $fv$ বেগে সেই দিকে টেনে নিয়ে যায়। কাজেই জলপ্রবাহের বিপরীতমুখী আলোর সময় লাগবে $\frac{2l}{\frac{c}{n}-fv}$ এবং সমমুখী আলোর সময় লাগবে $\frac{2l}{\frac{c}{n}+fv}$। সময়ের পার্থক্য হবে

$$\Delta t=\frac{2l}{\frac{c}{n}-fv}-\frac{2l}{\frac{c}{n}+fv}=\frac{4lfv}{\frac{c^2}{n^2}-f^2v^2}=\frac{4lfvn^2}{c^2\left(1-\frac{f^2v^2n^2}{c^2}\right)} \tag{1-50}$$

$\frac{v}{c}$ র দ্বিঘাতকে উপেক্ষা করলে পাওয়া যায়

$$\Delta t\simeq\frac{4lfvn^2}{c^2} \tag{1-50a}$$

অতএব ব্যতিচার নকশার অপসরণের পরিমাণ হবে

$$\Delta F=\frac{4lfv\nu n^2}{c^2}=\frac{4lfvn^2}{c\lambda}, \tag{1-51}$$

যেখানে $\nu$ আলোর কম্পাঙ্ক এবং $\lambda$ তার তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

ফিজোর পরীক্ষায় $l=1{\cdot}5$ মিটার, $v=7$ মি./সে., $\lambda=5300\ \text{Å}=5{\cdot}3\times10^{-7}$ মি., $n=1{\cdot}33$ (জলের প্রতিসরাঙ্ক) এবং $\Delta F=0{\cdot}23$ ব্যতিচার

রেখা। এই মানগুলি সমীকরণ (1—51) এ প্রতিস্থাপন করলে আমরা পাই $f \simeq 0 \cdot 48$। এখন ফ্রেনেলের সূত্র (1—40) অনুযায়ী জলের ক্ষেত্রে ইথার টান গুণাঙ্ক $f = 0 \cdot 43$। কাজেই পরীক্ষার ভ্রমসীমার মধ্যে $f$ নির্ণীত হয়েছে বলে ধরা যায় এবং এটাকে ফ্রেনেলের ইথার টান প্রকল্পের সমর্থন বলে মনে করা যায়।

1886 খ্রীষ্টাব্দে আমেরিকায় মাইকেলসন ও মর্লে এবং পরবর্তী যুগে 1914-22 খ্রীষ্টাব্দে হল্যাণ্ডে জীমান (Zeeman) ও তাঁর সহকারিগণ আরও সূক্ষ্ম যন্ত্রের সাহায্যে ফ্রেনেলের প্রকল্প প্রমাণ করেন। জীমানের পরীক্ষার কয়েকটি ফলাফল নিচে দেওয়া হল ঃ

| আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য ( এঙ্গস্ট্রম 1 এ = $10^{-8}$ সে.মি.) | ইথার টান গুণাঙ্ক | |
|---|---|---|
| | গণনালব্ধ | পরীক্ষালব্ধ |
| 4500 | 0·464 | 0·465 |
| 4580 | 0·463 | 0·463 |
| 5461 | 0·454 | 0·451 |
| 6870 | 0·447 | 0·445 |

ফ্রেনেলের প্রকল্পের মধ্যে কিছু তত্ত্বগত ত্রুটি আছে। আমরা দেখেছি যে, ইথার টান গুণাঙ্ক প্রতিসরাঙ্কের উপর নির্ভর করে। অন্যদিকে কোন বস্তুর প্রতিসরাঙ্ক আলোর রঙ অর্থাৎ কম্পাঙ্কের উপর নির্ভর করে। তার অর্থ এই যে, বিভিন্ন রঙের আলোর ক্ষেত্রে গতিশীল বস্তু ইথার মাধ্যমকে বিভিন্ন বেগে টানে। এ এক অদ্ভুত পরিস্থিতি। সাদা আলোর মধ্যে সব রঙ আছে। কাজেই প্রত্যেক রঙের আলোর জন্য একটি করে স্বতন্ত্র ইথার মাধ্যম কল্পনা করতে হবে।

পরবর্তী যুগে লোরেণ্ট্স্ তাঁর ইলেক্ট্রন তত্ত্বের সাহায্যে এই সমস্যার সন্তোষজনক সমাধান করেন। এই তত্ত্ব অনুযায়ী প্রতিসরণকারী বস্তুমাধ্যম ইথারকে আদৌ টেনে নিয়ে যায় না বরং ইথার সব সময় চরম পরিমাপ কাঠামো S এ স্থির থাকে। প্রত্যেক বস্তু অসংখ্য পরমাণুর সমষ্টি এবং পরমাণুগুলির মধ্যে আছে কতকগুলি ধণাত্মক ও ঋণাত্মক তড়িৎ আধানযুক্ত বস্তুকণা।

ধনাত্মক বস্তুকণাগুলির মোট ভর প্রায় সমস্ত পরমাণুর ভরের সমান এবং ঋণাত্মক বস্তুকণিকাগুলির নাম ইলেকট্রন এবং তারা অত্যন্ত হালকা। আপতিত আলোক তরঙ্গের তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রের প্রভাবে ইলেকট্রনগুলি তাদের সাম্যাবস্থানের চারদিকে স্পন্দিত হতে থাকে। এই কম্পমান ইলেকট্রন-গুলি নিজেরাই তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ নিক্ষেপ করে। এই তরঙ্গগুলির আপতিত তরঙ্গের সঙ্গে ব্যতিচারের ফলে উৎপন্ন তরঙ্গের কার্যকর বেগ $c$ র স্থলে $\frac{c}{n}$ হয়।

কাজেই এই তত্ত্ব অনুযায়ী প্রতিসরাঙ্ক $n$ সাধারণভাবে ইলেকট্রনগুলির স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সাপেক্ষে আপতিত তরঙ্গের কম্পাঙ্কের মানের উপর নির্ভর করে। তা ছাড়া লোরেন্ট্স্ দেখালেন যে, বস্তুমাধ্যমের গতির ফলে ইলেকট্রনগুলি থেকে নির্গত তরঙ্গগুলি এমনভাবে পরিবর্তিত হয় যে, গতিশীল বস্তুমাধ্যমের মধ্যে আলোর দশার বেগ ফ্রেনেলের প্রকল্প অনুসরণ করে। অর্থাৎ চরম কাঠামো $S$ এর সাপেক্ষে বেগ $v$ এর দিকে আলোর দশার বেগ হবে

$$c^* = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (1-52)$$

আমরা যদি মনে করি যে $S'$ কাঠামোয় বস্তুমাধ্যম স্থির আছে তা হলে $S'$ এর সাপেক্ষে আলোর বেগের প্রথম আসন্ন মান হবে

$$c^{*\prime} = c^* - v = \frac{c}{n} - \frac{v}{n^2} \qquad (1-53)$$

সমীকরণ (1—52) ও (1—53) এ বস্তু মাধ্যমের বেগের দিকে আলোর বেগ দেওয়া হয়েছে। ভেক্টর সমীকরণের সাহায্যে অন্য যে কোন দিকে আলোর বেগ সূচিত করা যায়

$$c^* = \frac{c}{n} + (\mathbf{v}.\mathbf{n})\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (1-54)$$

এখানে $\mathbf{n}$ আলোক রশ্মির দিকের একক ভেক্টর।

$$c^{*\prime} = \frac{c}{n} - \frac{\mathbf{v}.\mathbf{n}}{n^2} \qquad (1-55)$$

কাজেই লোরেন্ট্‌সের ইলেকট্রন তত্ত্ব ফ্রেনেলের তত্ত্বের ত্রুটিগুলি দূর করে। ফ্রেনেলের তত্ত্বে অপর একটি অনিশ্চয়তা আছে। আমরা জানি যে, ডপলার প্রক্রিয়ার ফলে গতিশীল বস্তুর সাপেক্ষে আলোর কম্পাঙ্কের পরিবর্তন হয়। বিচ্ছুরণকারী মাধ্যমে আলোর কম্পাঙ্কের উপর প্রতিসরাঙ্ক নির্ভর করে। কাজেই এখন প্রশ্ন উঠে যে, ফ্রেনেল ইথার টান গুণাঙ্কে ব্যবহৃত প্রতিসরাঙ্ক $n$ কোন্ কম্পাঙ্কের উপযুক্ত হবে। লোরেন্ট্‌স্ তাঁর ইলেকট্রন তত্ত্বে এই প্রশ্নেরও উত্তর দিলেন। বস্তু মাধ্যমের সাপেক্ষে স্থিতিশীল কাঠামো $S'$ এ দৃষ্ট আলোর কম্পাঙ্কের উপযুক্ত প্রতিসরাঙ্ক $n(\nu')$ ব্যবহার করতে হবে। আমরা এখানে লোরেন্ট্‌স্ ইলেকট্রন তত্ত্ব সম্বন্ধে আরও বিষদ আলোচনা করব না কারণ ভবিষ্যতে দেখান হবে যে, আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী এই সমীকরণগুলি অতি সহজেই পাওয়া যায়।

**1-5. 3. মাইকেলসন-মর্লে (Michelson-Morley) পরীক্ষা**—এতক্ষণ পর্যন্ত আমরা যে সব পরীক্ষার কথা আলোচনা করেছি সেগুলিতে $\frac{v}{c}$ এর প্রথম ঘাত পর্যন্ত পরিমাপ করা সম্ভব ছিল। এবার আমরা যে পরীক্ষাগুলির কথা আলোচনা করব, সেগুলিতে $\frac{v}{c}$ এর দ্বিঘাত পর্যন্ত নির্ণয় করা সম্ভব অর্থাৎ এই পরীক্ষাগুলির যাথার্থ্য এত বেশী যে $\frac{v}{c}$ এর দ্বিঘাতের উপর নির্ভরশীল রাশি দ্বারা সৃষ্ট ফল নির্ণয় করা সম্ভব। এটিও একটি না—ধর্মী পরীক্ষা কিন্তু তবু এই পরীক্ষা বিজ্ঞানীমহলে আলোড়নের সৃষ্টি করেছিল। এই না—ধর্মী পরীক্ষা এক সময়ে প্রকৃতির রহস্য উদ্ঘাটনের মূল সূত্র হিসাবে কাজ করেছিল যেমন অনেক সময় গোয়েন্দা কাহিনীতেও দেখা যায়। গোয়েন্দা "শার্লক হোম্‌সের (Sherlock Holmes) স্মৃতিকথায়" আছে ঃ

শার্লক হোম্‌স্ প্রশ্ন করলেন ঃ "এমন কোন বিষয় আছে, যেদিকে আপনি আমার দৃষ্টি আকর্ষণ করতে চান ?"

"কুকুরের রাত্রের অদ্ভুত ব্যবহারের দিকে। কুকুর রাত্রে কিছুই করে নি।"

"এই ঘটনাটা অদ্ভুত" শার্লক হোম্‌স্ মন্তব্য করলেন।

1879 খ্রীষ্টাব্দে ম্যাক্সওয়েল মার্কিন নৌসারণী অফিসের টডের (Todd) কাছে চিঠি লেখেন। তাতে তিনি মন্তব্য করেন, আলোকরশ্মিকে যদি একবার পৃথিবীর ইথার কাঠামোর সাপেক্ষে গতিপথের দিকে এবং আর একবার বিপরীত দিকে সমদূরত্ব অতিক্রম করান হয় তা হলে তার মোট সময় লাগবে ঃ

$$t=\frac{l}{c+v}+\frac{l}{c-v}=\frac{2lc}{c^2-v^2}\approx\frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (1-56)$$

কাজেই পৃথিবীর বেগের জন্য সময় কিছুটা বেশী লাগবে এবং এই অতিরিক্ত সময়ের পরিমাণ

$$\Delta t\approx\frac{2l}{c}\;\frac{v^2}{c^2} \quad (1-56a)$$

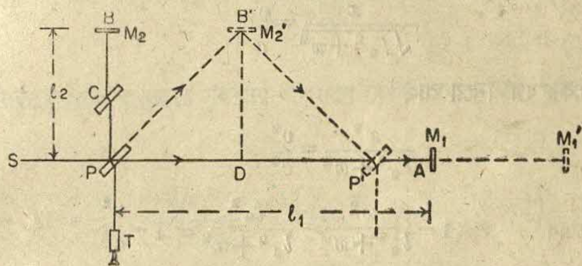
স্পষ্টতঃ $\frac{v}{c}$- এর দ্বিঘাতের উপর নির্ভর করে। পৃথিবীর কক্ষপথের বেগ 30 কি.মি./সে. এবং $\frac{v}{c}\approx10^{-4}$ কাজেই $\frac{v^2}{c^2}\approx 10^{-8}$। এটি তখনকার যুগের পরিমাপ পদ্ধতির যাথার্থ্যের সীমার বাহিরে ছিল।

ম্যাক্সওয়েলের লেখা এই চিঠিটি নৌসারণী অফিসে একজন তরুণ বিজ্ঞানী মাইকেলসনও পড়লেন। তিনি অল্পদিন পূর্বেই নৌবহরের শিক্ষকের পদ থেকে নৌসারণী অফিসে বদলী হয়ে এসেছিলেন। ইনি এক বছর আগে (1878) মাত্র 25 বছর বয়সে আলোর বেগ সম্বন্ধে খুব যথার্থ পরীক্ষা করেছিলেন। মাইকেলসন $\frac{v}{c}$- এর দ্বিঘাত পরিমাপ করা যে অসম্ভব সে কথা এক বাক্যে স্বীকার করতে প্রস্তুত ছিলেন না। তিনি এ ব্যাপারে চিন্তা করতে লাগলেন। দু'বছর পরে 1881 খ্রীষ্টাব্দে তিনি এই পরিমাপের প্রথম চেষ্টা করেন। এই পরীক্ষা পৃথিবীর চরম বেগ নির্ণয়ের সমস্ত প্রচেষ্টার মধ্যে সবচেয়ে প্রসিদ্ধ।

মাইকেলসন তাঁর পরীক্ষার জন্য এক অভূতপূর্ব সূক্ষ্ম যন্ত্র আবিষ্কার করেন যার ফলে তিনি 1907 খ্রীষ্টাব্দে নোবেল পুরস্কার বিজয়ীর সম্মান লাভ করেন। তাঁর যন্ত্রটি এখন মাইকেলসন ব্যতিচার মাপক নামে সুবিদিত। যন্ত্রের মূল অংশগুলির নকশা চিত্র 1-18 এ দেখান হয়েছে।

একরঙা আলোর উৎস S থেকে আলোক রশ্মিগুচ্ছ 45° ডিগ্রি কোণে হেলান একটি অর্ধস্বচ্ছ কাঁচের প্লেট P র উপর আপতিত হয়। এই প্লেটের বামদিকের

তলের উপর পারার হালকা প্রলেপ দেওয়া আছে। আলোর এক অংশ P র উপরিতল থেকে প্রতিফলিত হয়ে একটি অনুরূপ স্বচ্ছ কাঁচের প্লেটের ভিতর দিয়ে যায় এবং শেষে আয়না $M_2$-এ প্রতিফলিত হয়ে একই পথে দূরবীন T তে ফিরে আসে। কাঁচের প্লেট C কে ক্ষতিপূরণকারী প্লেট বলা হয় কারণ কাঁচের মধ্যে অতিক্রান্ত দূরত্ব দুই রশ্মির ক্ষেত্রে সমান করার জন্যই এটি ব্যবহৃত হয়।




চিত্র 1-18

অপর রশ্মিগুচ্ছ P তে প্রতিসরিত হয়ে $M_1$ আয়নায় প্রতিফলিত হয়ে ফিরে এসে পূর্ব রশ্মিগুচ্ছের সঙ্গে মিলিত হয়। পূর্বোক্ত রশ্মিটি P র মধ্য দিয়ে একবার এবং C র মধ্য দিয়ে দু'বার যায়, এবং পরোক্তটি P র মধ্য দিয়ে তিনবার যায়। C ও P সমান পুরু কাজেই কাঁচের মধ্যে অতিক্রান্ত দূরত্ব দুই ক্ষেত্রেই সমান।

আলোক রশ্মিদ্বয় প্রায় সমান পথ অতিক্রম করে। যদি সামান্য পার্থক্য থাকে, সেজন্য দৈর্ঘ্য দু'টিকে $l_1$ এবং $l_2$ ধরা হয়েছে। গণনায় সুবিধার জন্য আমরা মনে করি যে, পৃথিবীর ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে বেগ ডানদিকে এবং PA রশ্মির সমান্তরাল। তা হলে $l_1$ পথ যাওয়া আসা করতে আলোক রশ্মির মোট সময় লাগবে [ সমীকরণ 1 – 56 ]

$$t_1 = \frac{2l_1/c}{1-v^2/c^2} \qquad (1\text{—}57)$$

$M_2$ অভিমুখগামী আলোক রশ্মির বেগেরও কিছুটা পরিবর্তন হবে। কারণ যে সময়ে আলোক রশ্মি P থেকে B পর্যন্ত যায় সেই সময়ে $M_2$ পৃথিবীর সঙ্গে ডানদিকে $M_2$ থেকে $M_2'$ এ যায়। কাজেই আলোকে বাঁকা পথে PB' অভিমুখে যেতে হয় এবং ফেরার পথে B'P' পথে আসে কারণ ততক্ষণে কাঁচের

প্লেট P থেকে P′ এ যায়। স্পষ্টতঃ PB′ P′ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। B′D এই ত্রিভুজের মধ্যমা এবং ভূমি PP′ এর উপর লম্ব। $BB'=PD=x$ (ধর), $PB'=\sqrt{l^2{}_2+x^2}$ যেহেতু আয়না $M_2$ $v$ বেগ নিয়ে যে সময়ে $x$ দূরত্ব অতিক্রম করে, আলোকরশ্মি $c$ বেগ নিয়ে সেই একই সময়ে $\sqrt{l^2{}_2+x^2}$ দূরত্ব অতিক্রম করে। অতএব

$$\frac{x}{\sqrt{l_2{}^2+x^2}}=\frac{v}{c}$$

দুই দিকের বর্গ নিয়ে পাই

$$\frac{x^2}{l_2{}^2+x^2}=\frac{v^2}{c^2}$$

অতএব $$1-\frac{x^2}{l_2{}^2+x^2}=\frac{l_2{}^2}{l_2{}^2+x^2}=1-\frac{v^2}{c^2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{l_2{}^2+x^2}=\frac{l_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

এই আলোক রশ্মি মোট $2\sqrt{l_2{}^2+x^2}$ দূরত্ব অতিক্রম করে। কাজেই তার $PM_2{}'P'$ পথ ঘুরে আসতে সময় লাগে

$$t_2=\frac{2l_2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (1-58)$$

$t_1$ ও $t_2$ র মধ্যে পার্থক্যের ফলে ব্যতিচার নকশার সৃষ্টি হয়। $M_1$ ও $M_2$ আয়না দু'টির মধ্যে কোণ ঠিক এক সমকোণের সমান হলে ব্যতিচার নকশাটি বৃত্তাকার সমকেন্দ্রিক রেখার সমষ্টি হয়। কিন্তু এই পরীক্ষায় ঐ দু'টি আয়নার মধ্যে কোণ সমকোণের চেয়ে একটু কম রাখা হয়েছিল কাজেই ব্যতিচার নকশাটি ছিল কয়েকটি সমান্তরাল সরলরেখার সমষ্টি, একটি কীল থেকে যে ধরণের ব্যতিচার নকশা পাওয়া যায়। এখন

$$\Delta t=t_1-t_2=\frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-l_2\right) \quad (1-59)$$

এবার মাইকেলসন ব্যতিচার মাপকের দুই বাহু বিনিময় করা হয়, অর্থাৎ পুরা যন্ত্রটিকে 90° ঘুরিয়ে দেওয়া হয়। যেহেতু এখন প্রথম বাহুটি দ্বিতীয় বাহুর স্থানে আসে এবং দ্বিতীয়টি প্রথমটির স্থানে যায়, অতএব এখন

$$\bar{t}_1 = \frac{2l_1/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (1\text{—}60)$$

$$\bar{t}_2 = \frac{2l_2/c}{1-v^2/c^2} \quad (1\text{—}61)$$

$$\therefore \quad \Delta\bar{t} - \bar{t}_1 = \bar{t}_2 = \frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (1\text{—}62)$$

$\Delta t$ র পরিবর্তন হলে ব্যতিচার নকশার অপসরণ দেখা যাবে। এই পরিবর্তনের পরিমাণ

$$\Delta\bar{t} - \Delta t = -\frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (l_1 + l_2) \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (1\text{—}63)$$

আমরা এই সমীকরণের ডান দিককে $\frac{v}{c}$ এর ঘাত শ্রেণীতে সম্প্রসারিত করতে পারি। দ্বিঘাতের ঊর্ধ্বতন সমস্ত ঘাতকে উপেক্ষা করলে পাই

$$\Delta\bar{t} - \Delta t = -1/c\,(l_1 + l_2)\frac{v^2}{c^2} \quad (1\text{—}64)$$

ব্যতিচার রেখার বিস্তৃতিকে একক ধরলে ব্যতিচার নকশার অপসরণের পরিমাণ দাঁড়ায়

$$\frac{\Delta S}{S} = -\frac{v}{c}(l_1 + l_2)\frac{v^2}{c^2} = -\frac{1}{\lambda}(l_1 + l_2)\frac{v^2}{c^2} \quad (1\text{—}65)$$

যদি $l_1 = l_2 = l$ হয়, তাহলে

$$\frac{\Delta S}{S} = -\frac{2l}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (1\text{—}65a)$$

যদি $v$ এর স্থানে পৃথিবীর কক্ষপথের বেগ 30 কি.মি./সে. নেওয়া হয় তা হলে $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-8}$। মাইকেলসনের 1881 খ্রীষ্টাব্দের প্রথম পরীক্ষায় নেওয়া হয় $= 6000$এ°, $l = 1{\cdot}2$ মি. অতএব $\frac{\Delta S}{S} = 0{\cdot}04$, কাজেই ব্যতিচার নকশার অপসরণের পরিমাণ একটি ব্যতিচার রেখার বিস্তৃতির 25 ভাগের এক ভাগ। কিন্তু মাইকেলসনের সুনিপুণ হাতে এই সামান্য অপসরণেরও পরিমাপ করা

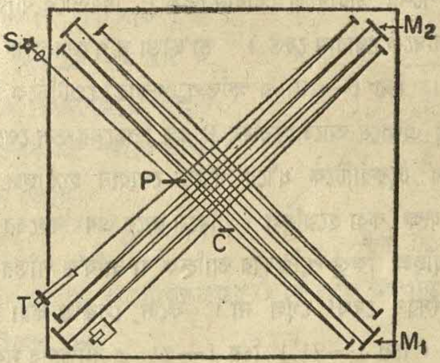
সম্ভব হয়েছিল। মাইকেলসন যন্ত্রটিকে পুরো 360° ঘুরিয়েও ব্যতিচার নকশার আশানুরূপ অপসরণ দেখতে পেলেন না। মাইকেলসনের মতে অপসরণ 0·02 ব্যতিচার রেখার বেশী হয় নি। তাঁর পরীক্ষার ফলাফল মাইকেলসন দু'টি বাক্যে প্রকাশ করলেন: "এই পরীক্ষার ফলাফল ভাষায় প্রকাশ করলে দাঁড়ায় যে, ব্যতিচার রেখাগুলির কোন অপসরণ হয় নি। কাজেই দেখা গেল যে, স্থিতিশীল ইথার প্রকল্পের ফলাফল ভুল।"*

যদি আমরা মনে করি যে, মাইকেলসনের পরীক্ষার সময় ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে পৃথিবী স্থিতিশীল ছিল। তা হলে ছয় মাস পরে পৃথিবী কক্ষপথে বিপরীত দিকে যাবে (চিত্র 1—8)। তখন পৃথিবীর ইথার কাঠামোর সাপেক্ষে বেগ হবে 60 কি. মি./সে.। কাজেই বছরের এক সময়ে ব্যতিচার নকশার অপসরণ না হলে তার ছয় মাস পরে দ্বিগুণ অপসরণ দেখতে পাওয়া উচিত। সেইজন্য মাইকেলসন সারা বছর ধরে পরীক্ষা করেন এবং কোন সময়েই আশানুরূপ অপসরণ দেখতে পান নি। সেইজন্য তিনি উপরোক্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হন।

এই নেতিবাচক ফল এতই অপ্রত্যাশিত ছিল যে, এর কারণ নির্ণয় করা পদার্থবিদ্‌গণের পক্ষে অত্যন্ত কষ্টকর হয়ে পড়ল। অনেক চেষ্টার পর প্রসিদ্ধ ওলন্দাজ পদার্থবিদ্‌ লোরেন্ট্‌স্‌ একটি প্রকল্পের প্রস্তাব করলেন যা দ্বারা অপেরণ পরীক্ষার ফলাফল অপরিবর্তিত রেখেও পৃথিবীর আংশিক ইথার টানের অস্তিত্ব কল্পনা করা যায়। কাজেই মাইকেলসনের পরীক্ষার যথার্থতর উপায়ে পুনরাবৃত্তি করার প্রয়োজন হয়ে পড়ে। তখন লর্ড র‍্যালে (Rayleigh) মাইকেলসনকে লেখা চিঠিতে তাঁর পরীক্ষাটির পুনরাবৃত্তি করার জন্য অনুরোধ করেন। 1887 খৃীষ্টাব্দে মাইকেলসন একজন সহকারী মর্লের সঙ্গে যথার্থতর পরীক্ষা করেন। এই পরীক্ষায় $l_1+l_2$ এর মান প্রায় দশগুণ বাড়িয়ে দেওয়া হল। সেজন্য চারিটি করে আয়নার সাহায্যে আলোক-রশ্মিকে আটবার একই পথে যাতায়াত করান হল (চিত্র 1—19)। এই

* উপরের গণনায় আমরা ধরে নিয়েছিলাম যে, পৃথিবীর বেগ $v$ ধ্রুবক কিন্তু প্রকৃত পক্ষে $v$ এর দিক ও মান দুইই পরিবর্তিত হয়। কিন্তু পরীক্ষাটি করতে যে সময় লাগে তার মধ্যে পৃথিবীর বেগকে ধ্রুবক বলে ধরা চলে।

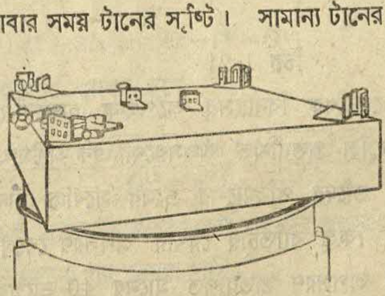
পরীক্ষায় $l_1 + l_2 = 22$ মি.। $\lambda = 5500$ এ°. কাজেই $\frac{v}{c} = 10^{-4}$ হলে $\frac{\Delta s}{s} = 0{\cdot}4$। মাইকেলসন-মর্লের পরীক্ষায় ব্যতিচার রেখার বিস্তৃতির 100




চিত্র 1-19

ভাগের এক ভাগ অপসরণ পর্যন্ত নির্ণয় করা যেত। মাইকেলসনের প্রথম পরীক্ষা সহরের মধ্যে করা হয়েছিল। কাজেই গাড়ী ঘোড়া চলাচলের জন্য কম্পনের ফলে গভীর রাত্রে ছাড়া পরীক্ষা করাই যেত না। আলোর গতিপথের দৈর্ঘ্য বাড়ানর ফলে এই অসুবিধা অনেকটা দূর করা গিয়েছিল।

মাইকেলসনের প্রথম পরীক্ষায় ভুলের প্রধান উৎস ছিল ব্যতিচার মাপকের বাহু দু'টি ঘোরাবার সময় টানের সৃষ্টি। সামান্য টানের সৃষ্টি হলেই সেজন্য



চিত্র 1-20

ব্যতিচার নকশার অপসরণ হয়। কাজেই সমস্যা হল কি ভাবে টান সৃষ্টি না করেই ব্যতিচার মাপককে ঘোরান যায়। এই সমস্যার সমাধান করা হল

এই ভাবে। যন্ত্রটি একটি 5 ফিট বর্গ ও 14 ইঞ্চি পুরু পাথরের উপর বসান হয়। তারপর পাথরটি একটি বলয়াকৃতি পারদপূর্ণ দ্রোণীর উপর ভাসমান একটি বলয়াকৃতি ভেলার উপর বসান হল ( চিত্র 1—20 )। ভাসমান ভেলাটি একটি পিনের চারদিকে ঘোরান যেত। এইভাবে ব্যতিচার মাপককে একই কেন্দ্রের চারদিকে ঘোরান যেত। তা'ছাড়া ঘূর্ণনের অক্ষ আপনাথেকেই উল্লম্ব হয়েছিল। চিত্র 1—19 এ ক্ষতিপূরণকারী প্লেটটিকে $M_1$ এর দিকে রাখা হয়েছে কারণ এখানে আলোকরশ্মি P এর পিছনের তল থেকে প্রতিফলিত হয়েছে। পাথরের টুকরাটিকে ধীরে ধীরে ঘোরান হয়েছিল এবং ব্যতিচার রেখার অবস্থান লক্ষ করা হয়েছিল। দিনে রাত্রে এবং বছরের সকল ঋতুতে পরীক্ষা করা হয়েছিল কিন্তু পৃথিবীর আহ্নিক বা বার্ষিক গতির জন্য ব্যতিচার রেখার কোন অপসরণ দেখা গেল না। ফলে সিদ্ধান্ত করা হল যে, কোন অপসরণ হয় না ( চিত্র 1—21 ) চিত্র 1—21 এ ব্যতিচার নকশার অবস্থান

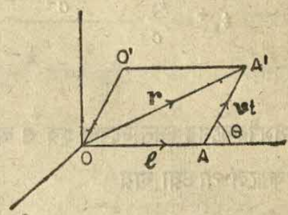



চিত্র 1-21

ব্যতিচার মাপকের কৌণিক বিন্যাসের অপেক্ষক হিসাবে দেখান হয়েছে। ফুটকি দেওয়া রেখাগুলি প্রত্যাশিত অপসরণের এক অষ্টমাংশ সূচিত করে। মাইকেলসন ও মর্লে তাঁদের পরিমাপের ভ্রমের সর্বোচ্চ মান 0·01 ব্যতিচার রেখা ধার্য করেন। কিন্তু ব্যতিচার রেখার অপসরণ বেগের বর্গের সহিত অনুপাতী। অতএব অপসরণ প্রত্যাশিত মানের 40 ভাগের 1 ভাগ হওয়ার অর্থ এই যে, বেগ প্রত্যাশিত মানের এক ষষ্ঠাংশের চেয়ে কম হবে। কাজেই পৃথিবীর ইথারের সাপেক্ষে ঊর্ধতম বেগ ধার্য হল 5 কি. মি./সে.।

আমরা আমাদের গণনা সহজ করার জন্য ধরে নিয়েছিলাম যে, পৃথিবীর

চরম বেগ ব্যতিচার মাপকের একটি বাহুর সমান্তরাল। এখন আমরা এই অনুমান ত্যাগ করে সাধারণভাবে ব্যতিচার রেখা অপসরণের মান নির্ণয় করব। চিত্র 1—22 এ OA ব্যতিচার মাপকের একটি বাহু। তাকে ভেক্টর **l** দ্বারা সূচিত করা যাক। ধরা যাক যে, পৃথিবীর বেগ ভেক্টরের দিক AA′। $t$ সময় পরে O′A′ OA বাহুর নূতন অবস্থান। অতএব এই বাহুর প্রান্ত A′ এর অবস্থান ভেক্টর



চিত্র 1-22

$$\mathbf{r}=\mathbf{l}+\mathbf{v}t \qquad (1\text{—}66)$$

কালাঙ্ক $t=0$ তে আলোকতরঙ্গের O বিন্দুতে উৎপত্তি হলে গোলকাকার তরঙ্গমুখের সমীকরণ হবে

$$\mathbf{r}^2=c^2t^2 \qquad (1\text{—}67)$$

কাজেই যদি কালাঙ্ক $t$ তে তরঙ্গমুখ A′ এ পৌঁছায়, তার শর্ত হবে

$$(\mathbf{l}+\mathbf{v}t)^2=c^2t^2$$

অর্থাৎ $l^2+v^2t^2+2(\mathbf{l}.\mathbf{v})\,t=c^2t^2$

ব্যতিচার মাপকের বাহু OA এবং পৃথিবীর বেগের দিকের মধ্যে কোণ $\theta$ হলে

$$\mathbf{l}.\,\mathbf{v}=lv\cos\theta$$

অতএব $(c^2-v^2)\,t^2-2lv\cos\theta t-l^2=0$ (1—68)

এই দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান হবে

$$t=\frac{lv\cos\theta\pm\sqrt{l^2v^2\cos^2\theta+(c^2-v^2)l^2}}{(c^2-v^2)}$$

আমরা ঋণাত্মক চিহ্ন বাতিল করে দেব কারণ $t$ এর ঋণাত্মক মান হওয়া অসম্ভব।

অতএব সরলীকরণের পর আমরা পাই

$$t=\frac{l}{c}\,\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}+\frac{v}{c}\cos\theta}{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (1\text{—}69)$$

যেহেতু ব্যতিচার মাপকের প্রথম বাহুর দৈর্ঘ্য $l_1$ অতএব P থেকে $M_1$ ( চিত্র 1-18 ) যেতে সময় লাগবে

$$t_1^+ = \frac{l_1}{c} \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta} + \frac{v}{c}\cos\theta}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1—70}$$

সমীকরণের ডানদিকের হর ও লব উভয়কে $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta} - \frac{v}{c}\cos\theta$ দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়

$$t_1^+ = \frac{l_1}{c\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta} - \frac{v}{c}\cos\theta\right)} \tag{1—71}$$

অতএব এইদিকে আলোর বেগ হবে

$$C(\theta) = \frac{l_1}{t_1^+} = c\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta} - \frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{1—72}$$

এই সমীকরণে $\theta = 0$ প্রতিস্থাপন করলে আমরা পাই $c\ (0) = c - v$, উল্টো-দিকে যাবার সময় পাওয়া যাবে $\theta$-কে $180° - \theta$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলে অর্থাৎ

$$t_1^- = \frac{l_1}{c} \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta} - \frac{v}{c}\cos\theta}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1—73}$$

প্রথম বাহুর দিকে একবার যাতায়াত করতে সময় লাগবে

$$t_1 = \frac{2l_1}{c} \frac{\sqrt{1-v^2/c^2\ \sin^2\theta}}{1-v^2/c^2} \tag{1—74}$$

এই সমীকরণে $\theta = 0$ বসালে সমীকরণ (1 – 57) পাওয়া যায়।

যেহেতু ব্যতিচার মাপকের দ্বিতীয় বাহু প্রথম বাহুর উপর লম্ব অতএব $t_2$ পেতে হলে $l_1$ কে $l_2$ দ্বারা $\theta$ কে $90° + \theta$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করতে হবে।

$$\therefore\quad t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1—75}$$

এই দুই সময়ের পার্থক্য হবে

$$\Delta t=t_1-t_2=\frac{2}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[l_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}-l_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}\right] \quad (1-76)$$

এখন ডানদিকের রাশিকে $\frac{v}{c}$-এর ঘাতশ্রেণীতে সম্প্রসারিত করে দ্বিঘাতের উর্ধ্বতন রাশিগুলিকে উপেক্ষা করলে পাই

$$\Delta t\simeq\frac{2}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)(l_1-l_2)+\frac{1}{c}\frac{v^2}{c^2}(l_2\cos^2\theta-l_1\sin^2\theta) \quad (1-77)$$

যদি $l_1=l_2=l$ ধরা হয় তাহলে

$$\Delta t=\frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2}\cos2\theta \quad (1-77a)$$

কাজেই স্থিতিশীল ইথার প্রকল্প অনুযায়ী ব্যতিচার মাপকের ঘূর্ণনের সঙ্গে ব্যতিচার নক্সার ভ্রংশ কোসাইন (cosine) অপেক্ষকের মত বাড়ে ও কমে। এইজন্য চিত্র 1—21 এ তরঙ্গাকৃতি রেখা আঁকা হয়েছে।

পরবর্তীকালে বহুবার মাইকেলসন মর্লে পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করা হয়েছিল। সব পরীক্ষাই নেতিবাচক উত্তর দিয়েছে। কেবল 1925-6 খ্রীষ্টাব্দে মাউণ্ট উইলসনের (Mt. Wilson) উপর কতকগুলি পরীক্ষা করে মিলার (Miller) প্রায় 10 কি. মি /সে. বেগের উপযুক্ত ব্যতিচার নক্সার অপসরণ লক্ষ করেন। তাঁর মতে এটা তাঁর যন্ত্রের ভ্রমসীমার চেয়ে বেশী ছিল। নিচের তালিকায় এই পরীক্ষাগুলির সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেওয়া হল।*

মিলারের পরীক্ষার ফল কিছুদিন বিজ্ঞানীদের চিন্তিত করেছিল কারণ মিলারের কয়েকটি পরীক্ষার ফলের মধ্যে সামঞ্জস্য ছিল। লেনার্ডের মত কয়েকজন পদার্থবিদের মত ছিল যে, পৃথিবী তার সংলগ্ন ইথার মাধ্যমকে পুরাপুরি টেনে নিয়ে যায় কিন্তু একটু দূরের ইথার মাধ্যম পৃথিবীকে পুরোপুরি অনুসরণ করে না। মিলার পরীক্ষা করেছিলেন পাহাড়ের উপরে, অর্থাৎ সমুদ্র-পৃষ্ট থেকে 1734 মিটার উপরে, সেজন্য সেখানে পৃথিবী ও ইথার মাধ্যমের মধ্যে কিছুটা আপেক্ষিক গতি থাকবে বলে মনে করা হয়েছিল। যাই হোক

* Shankland, McCuskey, Leone and Kuerti : Rev. Mod. Phys. 27,167 (1955)

তালিকা 1.

| বিজ্ঞানী | সন | ইথার প্রকল্প অনুযায়ী দৃষ্ট অপসরণ/ব্যতিচার রেখার বিস্তৃতি | অপসরণের ঊর্ধ্বতম মান/ ব্যতিচার রেখার বিস্তৃতি | পৃথিবীর চরম বেগের ঊর্ধ্বতম মান ( কি.মি./ সে. ) |
|---|---|---|---|---|
| মাইকেলসন | 1881 | 0·04 | 0·02 | 21 |
| মাইকেলসন ও মর্লে | 1887 | 0·40 | 0·01 | 5 |
| মর্লে ও মিলার | 1902-4 | 1·13 | 0·015 | 3 |
| মিলার | 1921 | 1·12 | 0·08 | 8 |
| মিলার | 1923-4 | 1·12 | 0·030 | 6 |
| মিলার ( সূর্যের আলো ) | 1924 | 1·12 | 0·014 | 3 |
| টোমাশেক ( তারার আলো ) | 1924 | 0·3 | 0·02 | 8 |
| মিলার | 1925-6 | 1·12 | 0·088 | 9 |
| কেনেডি | 1926 | 0·07 | 0·002 | 5 |
| ইলিংওয়ার্থ | 1927 | 0·07 | 0·0004 | 2 |
| পিকার্ড এবং স্টাহেল | 1927 | 0·13 | 0·006 | 7 |
| মাইকেলসন ও অন্যান্য | 1929 | 0·9 | 0·010 | 3 |
| যুস | 1930 | 0·75 | 0·002 | 1·5 |

1955 খ্রীষ্টাব্দে শ্যাঙ্কল্যান্ড ও তাঁর সহকারিগণ মিলারের উপাত্তগুলি বিশ্লেষণ করে দেখান যে, আলোকরশ্মির বড় সঞ্চারপথ থাকার ফলে সেই অঞ্চলে তাপমাত্রার হ্রাসবৃদ্ধির জন্য এইরূপ ফল পাওয়া সম্ভব। শ্যাঙ্কল্যান্ড এ সম্বন্ধে আইনষ্টাইনের সঙ্গে আলোচনা করেছিলেন এবং আইনষ্টাইন তাঁর সঙ্গে একমত হয়েছিলেন।

1930 খ্রীষ্টাব্দে য়ুস (Joos) অনেক যথার্থতর যন্ত্রের সাহায্যে এই নেতিবাচক ফল সমর্থন করেন। য়ুসের পরীক্ষায় $(l_1+l_2)$ র মান মাইকেলসন মর্লে'র 1887 খ্রীষ্টাব্দের পরীক্ষার প্রায় দ্বিগুণ (42 মি.) নেওয়া হয়েছিল। কিন্তু এই পথকে অনেকগুলি আয়নার সাহায্যে ভেঙ্গে ফেলা হয়েছিল যাতে যন্ত্রটির দৈর্ঘ্য খুব বড় না হয়। কারণ যন্ত্রটি অনেকখানি স্থান দখল করলে সেই অঞ্চলে বায়ুর মধ্যে পরিচলনের ফলে তাপমাত্রার হ্রাসবৃদ্ধি হওয়া সম্ভব। য়ুসের যন্ত্রে ব্যতিচার রেখাগুলির সামনে তাদের সঙ্গে সমকোণে একটি 0·2 মি. মি. প্রস্থবিশিষ্ট বিদার স্থাপন করা হয়েছিল। একটি ফোটোর কাগজ এই বিদারের সামনে ধীরে ধীরে সরিয়ে নিয়ে যাওয়া হয় এবং সমস্ত ব্যতিচার মাপকটিকে ধীরে ধীরে ঘোরান হয়। যদি ইথার প্রকল্প অনুযায়ী ব্যতিচার নকশার অপসরণ ঘটে তা হলে ফোটোর কাগজের উপর কোসাইনের তরঙ্গিত রেখা সমষ্টি দেখা যাবে। কিন্তু প্রকৃত পক্ষে কতকগুলি প্রায় সমান্তরাল সরল-রেখা দেখা গিয়েছিল। এই পরীক্ষার ফলে জানা গেল যে, পৃথিবীর যদি চরম গতি থাকে তা হলে তা 1·5 কি.মি./সে. র চেয়ে কম।

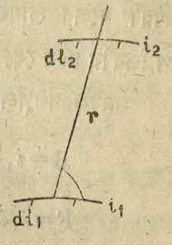
1932 খ্রীষ্টাব্দে কেনেডি ও থর্নডাইক (Kennedy and Thorndike) একটু অন্য ধরনের পরীক্ষা করেন। তাঁরা ব্যতিচার মাপকের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য $l_1$ ও $l_2$ যথাসম্ভব অসমান নিলেন। তাঁদের পরীক্ষায় $l_1-l_2=16$ সে. মি. ছিল। এই পরীক্ষায় সমস্ত যন্ত্রটিকে একই তাপমাত্রায় রাখা হয় এবং একটি বায়ুশূন্য বেষ্টনীর মধ্যে রাখা হয়। সমস্ত যন্ত্রটি একটি স্ফটিকের প্লেটের উপর বসান হয়েছিল কারণ তাপমাত্রা পরিবর্তনের সঙ্গে স্ফটিকের সম্প্রসারণ বা সঙ্কোচন অতি সামান্য। বছরের বিভিন্ন সময়ে দিনে ও রাত্রে পরীক্ষা করে কোন ব্যতিচার নকশার অপসরণ দেখা যায় নি। এই পরীক্ষার যাথার্থ্য থেকে প্রমাণ হয় যে পৃথিবীর চরম বেগ 10 কি. মি./সে. র. কম হবে। এই পরীক্ষার গুরুত্ব সম্বন্ধে আমরা পরে আবার আলোচনা করব (পৃ ৫৩—৪)।

গত দুই দশকে কতকগুলি নূতন নূতন ব্যাপার আবিষ্কারের ফলে পৃথিবীর চরম বেগ আরও অনেক বেশী যাথার্থ্যের সঙ্গে পরিমাপ করা সম্ভব হয়। 1958 খ্রীষ্টাব্দে সোডারহোল্‌ম্‌ (Soderholm), ব্ল্যাণ্ড (Bland), হ্যাভেন্‌স্‌ (Havens) এবং টাউন্‌স্‌ (Townes) দুইটি মেজার (Maser) রশ্মিগুচ্ছের সাহায্যে পরীক্ষা করে দেখান যে, পৃথিবীর বেগ $\frac{1}{30}$ কি. মি./সে. র চেয়ে কম। 1964 খ্রীষ্টাব্দে জসেজা, জাভান, মারে ও টাউন্স (Jaseja, Javan, Murray & Townes) লেজার রশ্মির সাহায্যে প্রমাণ করেন যে, ইথারের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ 1 কি.মি./সে, র চেয়ে কম। অতএব এই পরীক্ষার যাথার্থ্য যুসের পরীক্ষার চেয়ে খুব বেশী নয়। পরে এইভাবে 1978 খ্রীষ্টাব্দের শেষভাগে ব্রিলেট এবং হল প্রমাণ করেন যে পৃথিবীর বেগ 20 মি./সে. র চেয়ে কম। [Phys, Rey, Lett, 42, 549 (1979) তারপর ম্যোসবাওয়ার (Mossbauer) প্রক্রিয়ার আবিষ্কারের ফলে পরিমাপের যাথার্থ্য আরও বাড়ান সম্ভব হয়। 1963 খ্রীষ্টাব্দে আইজাক (Isaak), চ্যাম্পনে (Champeney) ও খাঁ (Khan) ম্যোসবাওয়ার প্রক্রিয়া ব্যবহার করে একটি পরীক্ষা করে সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে পৃথিবীর চরম বেগ 5 মি./সে. ব. চেয়ে কম হবে। একই নীতি অনুসরণ করে আইজাক 1970 খ্রীষ্টাব্দে সিদ্ধান্ত করেন যে, পৃথিবীর বেগ 5 সে. মি./সে. র. চেয়েও কম।

**1-5.4. ট্রাউটন-নোব্‌ল্‌ (Trouton-Noble) পরীক্ষা:** এতক্ষণ আমরা যে সমস্ত পরীক্ষার কথা আলোচনা করছিলাম তার সব ক্ষেত্রেই আলোক রশ্মি ব্যবহার করা হয়েছে। এবার আমরা এমন একটি পরীক্ষার কথা আলোচনা করব যাতে আলোক রশ্মি ব্যবহার করা হয় নি। অবশ্য তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রের ব্যবহার করা হয়েছিল।

1882 খ্রীষ্টাব্দে আইরিশ বিজ্ঞানী ফিট্‌জ্‌জেরাল্ড (Fitzgerald) প্রথম প্রস্তাব করেন যে, পৃথিবীর গতির ফলে তড়িৎ ক্ষেত্রের মানের কোন পরিবর্তন হয় কি না দেখা দরকার। লোরেণ্ট্‌সের ইলেকট্রন তত্ত্ব অনুযায়ী $v$ বেগে ধাবমান আধান $q$ একটি তড়িৎ প্রবাহ $qv$ র সমধর্মী। কাজেই যদি একটি গতিশীল দণ্ডের দুই প্রান্তে দুইটি বিপরীত-মুখী আধান থাকে তাহলে তড়িৎ প্রবাহ $+qv$ এবং $-qv$ আছে

বলে মনে হবে। বিদ্যুৎ প্রবাহদ্বয় চুম্বকীয় ক্ষেত্র সৃষ্টি করবে, ফলে পরস্পর পরস্পরের উপর দু'টি বল প্রয়োগ করবে যারা সমরেখীয় নয়। কাজেই দণ্ডের দুই প্রান্তে প্রযুক্ত দু'টি সমপরিমাণ বল একটি দ্বন্দ্বের সৃষ্টি করবে এবং দণ্ডটি ঘোরাবার চেষ্টা করবে।



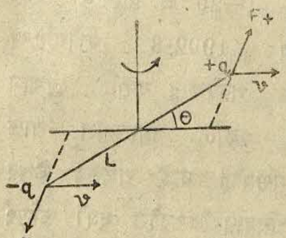

চিত্র 1-23

বিও সাভার্ট (Biot Savart) সূত্র অনুযায়ী একটি বিদ্যুৎ প্রবাহের অণু $i_1dl_1$ যে চৌম্বক ক্ষেত্রের সৃষ্টি করে তার মান

$$B=\frac{i_1dl_1\ \sin\theta}{cr^2}, \qquad (1-78)$$

যেখানে $\theta$ বিদ্যুৎ প্রবাহের অণুর সঙ্গে ক্ষেত্র বিন্দুর সংযোজনকারী রেখাদ্বারা উৎপন্ন কোণ এবং $r$ ক্ষেত্র বিন্দুর দূরত্ব।

অপর একটি বিদ্যুৎ প্রবাহাণু $i_2\ dl_2$ র উপর এই চৌম্বক ক্ষেত্রদ্বারা প্রযুক্ত বল




চিত্র 1-24

$$F=\frac{i_2\ dl_2B}{c}=\frac{i_1i_2\ dl_1\ dl_2\ \sin\theta}{c^2r^2} \qquad (1-79)$$

অতএব পূর্বোক্ত দণ্ডের দৈর্ঘ্য যদি L হয় এবং ইথারের বেগ $v$ হয় তা হলে

$$F=\frac{q^2v^2\ \sin\theta}{C^2L^2} \qquad (1-80)$$

চিত্র 1—24 অনুযায়ী দ্বন্দ্বের ভ্রামক

$$M=FL\ \cos\theta=\frac{q^2v^2}{c^2L}\ \sin\theta\ \cos\theta=\frac{q^2v^2}{2c^2L}\ \sin\ 2\theta \qquad (1-81)$$

এই ভ্রামকের সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে যখন $\theta=45°$, অর্থাৎ যখন দণ্ডটি পৃথিবীর ইথারের সাপেক্ষে বেগের দিকের সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। লক্ষ করবার বিষয় যে, এখানেও এই বেগজনিত ফল $\frac{v}{c}$ এর দ্বিঘাতের সঙ্গে অনুপাতী। যখন দণ্ডটি ইথারের সাপেক্ষে স্থির থাকে তখন তড়িৎ আধান-গুলির মধ্যে তড়িৎস্থৈতিক বল $\frac{q^2}{L^2}$ দণ্ডের সমান্তরাল হবে এবং তজ্জনিত ভ্রামক

শূন্য। উপরোক্ত ভ্রামক দণ্ডটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত মুখে ঘোরাবার চেষ্টা করবে এবং দণ্ডটি যে তার দিয়ে ঝোলান হয়েছে তাতে উৎপন্ন পুনরানয়ন-কারী বলের ভ্রামক দ্বারা বাধাপ্রাপ্ত হবে। মোট ঘূর্ণনের পরিমাণ থেকে পৃথিবীর চরম বেগের মান নির্ণয় করা যাবে।

সমীকরণগুলিকে ভেক্টর চিহ্নের মাধ্যমে লিখলে দাঁড়ায়

$$\mathbf{B}=i_1\frac{\mathbf{dl}_1\times\mathbf{r}}{cr^3} \qquad (1-78a)$$

$$\mathbf{F}=i_1i_2\frac{d\mathbf{l}_2\times\mathbf{B}}{c}=i_1i_2\,\frac{d\mathbf{l}_2\times(d\mathbf{l}_1\times\mathbf{r})}{c^2r^3} \qquad (1-79a)$$

L ভেক্টর দ্বারা দণ্ডের দিক ও দৈর্ঘ্য সূচিত করলে আমরা পাই

$$\mathbf{F}=q^2\frac{\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{L})}{c^2\mathbf{L}^3} \qquad (1-80a)$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{L}\times\mathbf{F} \qquad (1-81a)$$




চিত্র 1-25

চিত্র 1—25 এ ট্রাউটন এবং নোবলের 1902-3 খ্রীষ্টাব্দে অনুষ্ঠিত পরীক্ষার যন্ত্রটি দেখান হয়েছে। একটি সমান্তরাল পাত বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীর দুই পাতের উপর সমান পরিমাণ বিপরীত ধর্মী তড়িৎ আধান থাকে। এরূপ একটি বিদ্যুৎ সঞ্চয়ী পৃথিবীর উপর স্থির রাখা হয়। পৃথিবীর সঙ্গে বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীটিও ইথারের সাপেক্ষে $v$ বেগে গতিশীল। কাজেই একটি দ্বন্দ্বের সৃষ্টি হবে। বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীটিকে 37 সে. মি. দীর্ঘ একটি ব্রঞ্জ তারদ্বারা ঝোলান হয়েছিল। উইমস্হার্স্ট (Wimshurst) যন্ত্র দ্বারা বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীটিকে 200 ভোল্টে আহিত করা হয়েছিল। যন্ত্রটিকে বিভিন্ন দিকে ঘুরিয়ে দিনে ও রাত্রে বিভিন্ন সময়ে পরীক্ষা করা হয়। বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীটির নিচে একটি তার ঝোলান থাকে এবং এই তারটি একটি পারদপূর্ণ পাত্রে ডোবান থাকে এবং মাথার উপরও অপর একটি তার থাকে। এই তারগুলির সাহায্যে বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীটিকে আহিত বা অনাহিত করা যায়। আয়না ও আলোর সাহায্যে

ঝুলন্ত বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীটির ঘূর্ণনের পরিমাণ নির্ণয় করা যায়। ট্রাউটন এবং নোব্‌ল্‌ 1904 খ্রীষ্টাব্দে যথার্থতর যন্ত্রের সাহায্যে পরীক্ষাটির পুনরাবৃত্তি করেন। আলোক বিন্দুর প্রত্যাশিত অপসরণ 3 ও 6 সে. মি. র স্থলে অপসরণের পরিমাণ 0·35 সে. মি. অর্থাৎ শতকরা 5 ভাগের বেশী হয় নি। অতএব পৃথিবীর বেগের সর্বোচ্চ মান 7 কি. মি./সে. র চেয়ে কম হবে। কাজেই ট্রাউটন ও নোব্‌ল্‌ সিদ্ধান্ত করেন "নিঃসন্দেহে ফলটি নেতিবাচক"।

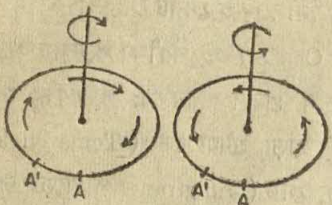
এর পর 1926-7 খ্রীষ্টাব্দে চেজ ( Chase ) এই পরীক্ষা পুনরায় করেন আরও যথার্থ ( বা সূক্ষ্ম ) ভাবে। তিনি প্রমাণ করেন যে, পৃথিবীর বেগ 3 কি. মি./সে. র চেয়ে কম হবে। এ ছাড়া টোমাশেক ( Tomaschek ) 1925-7 খ্রীষ্টাব্দে বিভিন্ন উচ্চতায় য়ুংফ্রাউ ( *Jungfrau* ) পাহাড়ের উপর ( 1 0, 570 ও 3457 মিটার ) পরীক্ষাটি করেন। তিনিও দেখেন যে, এই উচ্চতাগুলিতেও পৃথিবীর ইথারের সাপেক্ষে বেগ 3 কি. মি./সে. র চেয়ে কম। আমরা দেখেছি যে, মিলারের পরীক্ষার অস্তিবাচক ফল দেখে সন্দেহ করা হয়েছিল যে, ( পৃঃ ৪৩ ) পৃথিবী সংলগ্ন ইথার মাধ্যমকে পুরাপুরি টেনে নিয়ে যায় কিন্তু দূরের ইথার মাধ্যম কিছুটা পেছিয়ে পড়ে। টোমাশেকের পরীক্ষা থেকে প্রমাণিত হল যে, এই অনুমান ভিত্তিহীন।

আমরা দেখেছি যে, বিভিন্ন ধরণের পরীক্ষার ফলের মধ্যে কোন সামঞ্জস্য নেই। কাজেই ইথার কাঠামোর ধারণাদ্বারা এর ব্যাখ্যা করা খুব কষ্টসাধ্য। তথাপি বিভিন্ন বিজ্ঞানী বিভিন্ন প্রকল্পদ্বারা নেতিবাচক পরীক্ষাগুলির ব্যাখ্যা দেবার চেষ্টা করেন।

1—7. **পৃথিবীই কি বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামো ?** প্রস্তাব করা হল যে, ইথারের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ শূন্য, তার মানে পৃথিবীই সেই বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামো। কিন্তু ফুকোর ( Foucault ) পরীক্ষা থেকে আমরা জানি যে, পৃথিবী জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে ঘোরে, কাজেই পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির কোন কাঠামো জাড্যিক কাঠামো হতে পারে না। ফুকোর দোলক পরীক্ষা প্রমাণ করেছিল যে, পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির কাঠামোয় নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য নয়। এ ছাড়া বেগে ঘূর্ণায়মান জাইরোস্কোপ ( gyroscope ) দ্বারাও পৃথিবীর ঘূর্ণন প্রমাণ করা যায়। বলবিদ্যা সংক্রান্ত পরীক্ষা ছাড়াও আলোকরশ্মি দ্বারা পৃথিবীর ঘূর্ণন প্রমাণ করা যায়। অর্থাৎ

যে কাঠামোয় ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি সত্য তার সাপেক্ষে পৃথিবীর কৌণিক বেগ নির্ণয় করা যায়। আমরা নিচে এই ধরনের একটি পরীক্ষার কথা আলোচনা করব।

**স্যানিয়াক প্রক্রিয়া ( Sagnac effect )**—মূল পরীক্ষাটি বর্ণনা করার পূর্বে আমরা একটি দৃষ্টান্ত দ্বারা মূল নীতিটি ব্যাখ্যা করব।




চিত্র 1-26

মনে করা যাক যে, R ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি চাকতি $\omega$ কৌণিক বেগে তার অক্ষের চারদিকে ঘুরছে। ধরা যাক যে, চাকতির পরিধির বিভিন্ন স্থানে কতকগুলি আয়না এমনভাবে রাখা আছে যে, আলোক রশ্মি চাকতির পরিধি বরাবর যেতে বাধ্য হয়। চাকতিটি স্থির থাকলে একটি আলোর সংকেতের পরিধির উপর A বিন্দু ( চিত্র 1—26 ) থেকে যাত্রা করে আবার সেই বিন্দুতে ফিরে আসতে সময় লাগবে

$$t=\frac{2\pi R}{c} \qquad (1\text{—}82)$$

প্রথমে মনে করা যাক যে, ( চিত্র 1—26($a$) ) চাকতিটি দক্ষিণাবর্তে ঘুরছে এবং আলোক রশ্মিটিও পরিধি বরাবর একই দিকে যায়। A বিন্দুর পূর্ব অবস্থানে যখন আলোক রশ্মিটি ফিরে আসে তখন চাকতিটি ঘোরার ফলে A বিন্দু A′ পর্যন্ত এগিয়ে গেছে। ফলে এখন পুরা চাকতিটি ঘুরে আসতে আলোক রশ্মির $t$ র চেয়ে বেশী সময় লাগবে। এই বর্ধিত সময় $t_1$ দ্বারা সূচিত হলে

$$ct_1=2\pi R+\omega Rt_1,$$

অতএব

$$t_1=\frac{2\pi R}{c-\omega R}>t \qquad (1\text{—}83)$$

চাকতির পরিধির রৈখিক বেগ $\omega R$, অতএব একই দিকে আলোক রশ্মি যাত্রা করলে তার আপেক্ষিক বেগ হবে $c-\omega R$, অতএব পরিধিটি ঘুরে আসতে সময় লাগবে $\frac{2\pi R}{c-\omega R}$। এ ভাবেও $t_1$ এর মান নির্ণয় করা যায়।

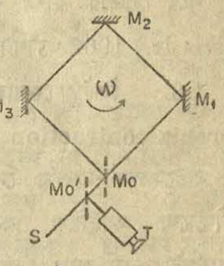
অনুরূপে চাকতি ঘোরার উল্টোদিকে যেতে আলোক রশ্মির কম সময় লাগবে কারণ এখন A র পূর্ব অবস্থানে পেঁছিবার পূর্বেই আলোক রশ্মি নূতন অবস্থানA'এ পেঁছায়। এই সময় $t_2$ হবে

$$t_2=\frac{2\pi R}{c+\omega R}<t \tag{1—84}$$

আলোর আপেক্ষিক বেগ $c+\omega R$ হলেও এই মান পাওয়া যায়।

$$t_1-t_2=2\pi R\left\{\frac{1}{c-\omega R}-\frac{1}{c+\omega R}\right\}=\frac{4\pi R^2\omega}{c^2-R^2\omega^2}\simeq\frac{4S\omega}{c^2} \tag{1—85}$$

যেখানে $S=\pi R^2=$ চাকতির ক্ষেত্রফল। এখানে আমরা $\frac{R\omega}{c}$ র তৃতীয় ঘাতকে উপেক্ষা করেছি।



চিত্র 1-27

সানিয়াকের 1913-4 খ্রীষ্টাব্দে অনুষ্ঠিত পরীক্ষার যন্ত্রবিন্যাসের নকশা চিত্র 1—27 এ দেখান হয়েছে। আলোর উৎস S, আয়নাগুলি ও দূরবীন সব কিছু একটি ঘূর্ণায়মান চাকতির উপর বসান হয়েছিল। আলোর উৎস থেকে যাত্রা করে আলোক রশ্মি একটি অর্ধস্বচ্ছ আয়না $M_0$ দ্বারা দু' ভাগে বিভক্ত হয়ে যায়। এক অংশ চাকতি ঘোরার দিকে পর পর $M_1$, $M_2$ ও $M_3$ আয়নায় প্রতিফলিত হয়ে একটি বর্গক্ষেত্রের সীমা বরাবর $M_0$ তে ফিরে আসে। অন্য অংশটি চাকতি ঘোরার উল্টোদিকে যাত্রা করে $M_0$ তে এসে প্রথমটির সঙ্গে মিলিত হয়। শেষে অপর একটি অর্ধস্বচ্ছ আয়না $M_0'$ এ প্রতিফলিত হয়ে দূরবীন T তে প্রবেশ করে। দূরবীনের মধ্য দিয়ে ব্যতিচার নকশা দেখা যাবে। প্রথমে চাকতিটির স্থির অবস্থায় ব্যতিচার নকশা লক্ষ করা হয়, এবং পরে চাকতিটিকে ঘুরিয়ে এই ব্যতিচার নকশার অপসরণের পরিমাপ করা হয়। এই অপসরণের পরিমাণ হবে

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{4S\omega\nu}{c^2}=\frac{4S\omega}{c\lambda} \tag{1—86}$$

যেখানে $\nu$ আলোর কম্পাঙ্ক এবং $\lambda$ তরঙ্গ দৈর্ঘ্য।

1926-8 খ্রীষ্টাব্দে পোগানি (Pogany) আরও সাবধানতার সঙ্গে সানিয়াকের পরীক্ষাটির পুনরাবৃত্তি করেন এবং সমীকরণ (1—86) এর

প্রতিপাদন করেন। 1925 খ্রীষ্টাব্দে মাইকেলসন ও গেল ( Gale ) সানিয়াকের ব্যতিচার মাপকের সাহায্যে পৃথিবীর ঘূর্ণনের পরিমাণ নির্ণয় করেন। পৃথিবীর কৌণিক বেগ প্রায় $0{\cdot}8 \times 10^{-4}$ রেডিয়ান/সে. এবং এই পরীক্ষায় আয়নাগুলির মধ্যে দূরত্ব ছিল প্রায় 1 কি.মি.। এক্ষেত্রে পৃথিবীকে পূর্বের চাকতির মত সুবিধা মত থামিয়ে দেওয়া যায় না। কিন্তু যেহেতু ব্যতিচার নকশার অপসরণ ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে, অতএব বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করে এই অপসরণ নির্ণয় করা হয়েছিল। ব্যতিচার নকশার অপসরণ $0{\cdot}230 \pm {\cdot}005$ পাওয়া যায় এবং তা তত্ত্বগত মান $0{\cdot}236 + {\cdot}002$ এর সঙ্গে ভ্রমসীমার মধ্যে মিলে গিয়েছিল।

পরে লেজার রশ্মি ব্যবহার করে মাসেক এবং ডেভিস ( Macek and Davis Jr.) 1963 খ্রীষ্টাব্দে এই পরীক্ষার যাথার্থ্য অনেকগুণ বাড়িয়েছিলেন।

**1-8. ফিট্জ্জেরাল্ড—লোরেণ্ট্স্ সঙ্কোচন ( Fitzgerald—Lorentz contraction. )**

মাইকেলসন-মর্লের নেতিবাচক ফলের ব্যাখ্যা করার উদ্দেশ্যে 1892 খ্রীষ্টাব্দে আইরিশ বিজ্ঞানী ফিট্জ্জেরাল্ড এবং ওলন্দাজ বিজ্ঞানী লোরেণ্ট্স্ দু'জনে স্বতন্ত্রভাবে একটি প্রকল্পের কথা চিন্তা করেন। তাঁরা বলেন যে, কোন বস্তু ইথারের সাপেক্ষে $v$ বেগে ছুটে গেলে তার চরম বেগের দিকের দৈর্ঘ্য সংকুচিত হয়ে যায়—$1 : \sqrt{1-v^2/c^2}$ অনুপাতে। বেগের সমকোণের দিকের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকে। যেহেতু সংকুচিত বস্তুর দিকে একটি পরিমাপ দণ্ড বা স্কেল্ স্থাপন করলে সেটিও একই অনুপাতে সংকুচিত হবে অতএব একই কাঠামোয় অবস্থিত কোন নিরীক্ষক, অর্থাৎ সমবেগ সম্পন্ন নিরীক্ষক এই সঙ্কোচনের কথা জানতে পারবে না।

যদি মাইকেলসন—মর্লের ব্যতিচার মাপকের $l_1$ বাহু ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগের দিকে থাকে এবং $l_2$ বাহু তার সমকোণে থাকে তা হলে $l_1$ সংকুচিত হয়ে হবে $l_1 = l_{10}\sqrt{1-v^2/c^2}$ এবং $l_2 = l_{20}$, যেখানে $l_1$ ও $l_{20}$ ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে স্থির অবস্থায় এই দুই বাহুর দৈর্ঘ্য সূচিত করে। তা হলে সমীকরণ (1—59) এর পরিবর্তিত রূপ হবে

$$\Delta t = \frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(l_{10} - l_2) \qquad (1\text{—}87)$$

$90^\circ$ ঘোরাবার পর $l_2$ বাহু $l_1$ এর স্থান অধিকার করে অতএব

$l_2 = l_{20}\sqrt{1-v^2/c^2}$, $l_1 = l_{10}$ কাজেই সমীকরণ (1—62) এর স্থলেও সমীকরণ (1—87 ) পাওয়া যায়। সুতরাং ব্যতিচার নকশার অপসরণ হবে না।

যেহেতু প্রথম থেকে পৃথিবীর চরম বেগ জানা নেই কাজেই $l_1$ বাহুর চরম বেগের সমান্তরাল হবার সম্ভাবনা কম, দৈবযোগে ঘটতে পারে। সাধারণতঃ $l_1$ চরম বেগ $v$র সঙ্গে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করবে। প্রমাণ করা যায় যে সে ক্ষেত্রেও ব্যতিচার নকশার কোন অপসরণ হবে না। $\Delta t$ $\theta$ কোণ নিরপেক্ষ।

কেনেডি ও থর্নডাইকের (Kennedy and Thorndike) পরীক্ষার নেতিবাচক ফল ফিট্‌জ্‌জেরাল্ড-লোরেণ্ট্‌স্‌ সংকোচন দ্বারা পুরাপুরি ব্যাখ্যা করা যায় না। মাইকেলসন-মর্লে ও অনুরূপ পরীক্ষাসমূহে দুই বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় সমান ধরা হয়েছিল। কাজেই সমীকরণ (1—87) থেকে এটা স্পষ্ট যে সময়ের পার্থক্য $\Delta t$ শুধু যে দিকনিরপেক্ষ তাই নয় $v$ এর পরিবর্তনের ফলেও কোন পরিমাপযোগ্য ব্যতিচার নকশার অপসরণ হবে না। কেনেডি ও থর্নডাইকের পরীক্ষায় $l_{10}$, $l_{20}$ দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের মধ্যে পার্থক্য 16 সে. মি. ছিল। কাজেই এই যন্ত্রের সাহায্যে দু'টি পরীক্ষা করা সম্ভব। প্রথমতঃ দেখা যায় যে, ব্যতিচার নকশা দিক নিরপেক্ষ কি না। তা থেকে বোঝা যাবে যে, আলোর বেগ সব কাঠামোয় দিক নিরপেক্ষ কিনা। দ্বিতীয়তঃ ইথার কাঠামোর সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগের পরিবর্তন হলেও সমীকরণ (1—87) অনুযায়ী ব্যতিচার নকশার অপসরণ ঘটবে। যদি অপসরণ না ঘটে তাহলে বোঝা যাবে যে, সকল জাড্যিক কাঠামোতেই আলোর বেগ সমান। পৃথিবীর দুই ধরণের গতি আছে, আহ্নিক গতি ও বার্ষিক গতি। প্রথমটির জন্য প্রতি 12 ঘণ্টা পরে পৃথিবীর বেগের মধ্যে পরিবর্তন সবচেয়ে বেশী হবে ( বিষুবরেখীয় অঞ্চলে সর্বোচ্চ মান প্রায় 1 কি. মি./সে.)। আবার বার্ষিক গতির জন্য প্রতি ছ'মাস অন্তর সবচেয়ে বেশী বেগের পরিবর্তন হবে ( সর্বোচ্চ মান প্রায় 60 কি. মি. / সে. )। কাজেই কেনেডি ও থর্নডাইক 12 ঘণ্টা অন্তর এবং ছয় মাস অন্তর ব্যতিচার নকশার সম্ভাব্য অপসরণ লক্ষ করেন। প্রথমে যদি পৃথিবীর বেগ $v$ থাকে, পরে $v'$ হয় তা হলে সমীকরণ (1—87) থেকে পাওয়া যাবে

$$\Delta t' - \Delta t = \left(\frac{2/c}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} - \frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)(l_{10}-l_{20})$$

$$\simeq 2/c\left(\frac{v'^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right)(l_{10}-l_{20}) \qquad (1-8)$$

পৃথিবীর বেগের বর্গ

$$v^2 = (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_S)^2 \qquad (1-89)$$

যেখানে $\mathbf{v}_E$ সূর্যের সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ, $\mathbf{v}_R$ পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য উপরিভাগের বেগ এবং $\mathbf{v}_S$ ইথার কাঠামোর সাপেক্ষে সূর্যের বেগ। 12 ঘণ্টা পরে $\mathbf{v}_R$ হয়ে যাবে $-\mathbf{v}_R$। কাজেই

$$\Delta v^2 = \{(\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_S) + \mathbf{v}_R\}^2 - \{(\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_S) - \mathbf{v}_R\}^2$$
$$= 4\,(\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_S).\,\mathbf{v}_R \qquad (1-90)$$

অনুরূপে প্রতি ছয়মাস অন্তর পরিবর্তন হবে

$$\Delta v^2 = 4\,(\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_R).\,\mathbf{v}_E \qquad (1-91)$$

কেনেডি ও থর্নডাইক এই দুই-এর মধ্যে কোন পরিবর্তনই দেখতে পান নি। তাঁদের পরীক্ষার যাথার্থ্য কত হবে তা নির্ভর করছে, আমরা কি দেখতে চাই তার উপর। প্রথম পরিমাপের ক্ষেত্রে বলা যায় যে, সূর্যের ইথারের সাপেক্ষে সর্বোচ্চ বেগ 15 কি. মি./সে.-র কম হবে। দ্বিতীয় পরিমাপের ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, পরস্পরের সাপেক্ষে 60 কি. মি./সে. বেগে গতিশীল দুটি জাড্যিক কাঠামোয় আলোর বেগের পার্থক্য 2 মি./সে.-র বেশী হবে না।

কেনেডি ও থর্নডাইকের পরীক্ষার দ্বিবিধ নেতিবাচক ফল ব্যাখ্যা করতে হলে দৈর্ঘ্য সঙ্কোচনই যথেষ্ট নয়। সেজন্য প্রস্তাব করা হল যে, গতিশীল বাহুর দিকে ঘড়ির গতি মন্থর হয়ে যায়। অতএব পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির ঘড়িগুলির এক সেকেণ্ড সময় ইথার কাঠামোর ঘড়ির $\sqrt{1-v^2/c^2}$ সেকেণ্ড সময়ের সমান হবে কাজেই

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{t_{10} - t_{20}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(l_{10} - l_{20})$$

অতএব $\Delta t_0 = 2/c\,(l_{10} - l_{20})$, $\qquad (1-92)$

যেখানে $t_{10}$ ও $t_{20}$ ইথার কাঠামোর ঘড়ির সময়। কাজেই এখন পৃথিবীর বেগের পরিবর্তন হলেও চরম কাল $\Delta t_0$ র কোন পরিবর্তন হবে না। এই

ঘড়ির গতির মন্থরীভবনকে কালের সম্প্রসারণ বলা হয়। লারমর ( Larmor ) 1900 খ্রীষ্টাব্দে প্রথম কালের সম্প্রসারণের প্রস্তাব করেন এবং তার পর লোরেণ্ট্স্ 1904 খ্রীষ্টাব্দে সঠিক রূপান্তর সূত্র প্রমাণ করেন। লারমরের কাল রূপান্তর সূত্রে একটি দ্বিতীয় ক্রমের ভুল ছিল।

আমরা দেখলাম যে, পৃথিবীর চরম বেগ নির্ণয়ের সকল চেষ্টা ব্যর্থ হয়েছে। বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী, আমরা যা নির্ণয় করার চেষ্টা করছি তার কোন অর্থ নেই। কারণ চরম গতি নিরর্থক, সব গতিই আপেক্ষিক। এবার আমরা ঐতিহাসিক পটভূমিকার আলোচনা স্থগিত রেখে সহজ ভাষায় আলোচনা করব, কিভাবে আইনষ্টাইন নেতিবাচক পরীক্ষাগুলির ব্যাখ্যা করেন।

## আরও পড়ার জন্য সুপারিশ


1. C. Moller—The Theory of Relativity ( Oxford University Press 1972 )

2. E. Whittaker—History of the Aether and Electricity Vol. 1 ( Thomas Nelson, Edinburgh 1951 )

3. Ma Born—Einstein's Theory of Relativity (Dover 1962)

4. W. G. V. Rosser—An Introduction to the Theory of Relativity ( Butterworths 1964 )

5. L. Janossy—Theory of Relativity based on Physical Reality ( Akademiai Kiado, Budapest 1971 )

6. A. P. French—Special Relativity ( Thomas Nelson, London 1968 )

7. C. W. Kilmister—Special Theory of Relativity ( Pergamon 1970 ) পৃষ্ঠা 91—104 এ মাইকেলসনের মূল প্রবন্ধটি পুনর্মুদ্রিত হয়েছে।

৪. W. K. H. Panofsky & M. Phillips—Classical Electricity Magnetism ( Addison Wesley 1962 )

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

# সাধারণ বুদ্ধিতে আইনষ্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব

"আমরা অজানা সমুদ্রের উপকূলে এক অদ্ভুত পদচিহ্ন আবিষ্কার করেছি। তার উৎপত্তি ব্যাখ্যা করবার জন্য আমরা উপর্যুপরি অনেক গূঢ় তত্ত্ব উদ্ভাবন করেছি। অবশেষে আমরা ঐ পদচিহ্নের সৃষ্টিতত্ত্ব বুঝতে পেরেছি। দেখুন, এটা আমাদের নিজেরই।" —এডিংটন

"সর্বশেষ লব্ধ জ্ঞানালোকে সিদ্ধান্তগুলি প্রায় স্বতঃসিদ্ধ বলে মনে হয় এবং যে কোন বুদ্ধিমান ছাত্র সহজে বুঝতে পারে। কিন্তু প্রারম্ভিক অন্ধকারে অনুসন্ধান, তার আকুল আকাঙ্ক্ষা, তার পর্যায় ক্রমিক আশা নিরাশা এবং অন্তিমে মেঘমুক্ত দিবালোকে প্রবেশ এ সমস্ত তিনিই অনুভব করতে পারেন যাঁর নিজস্ব অভিজ্ঞতা আছে।" —আইনষ্টাইন

**2-1. আইনষ্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দুইটি স্বীকার্য**—আমরা প্রথম পরিচ্ছেদের শুরু করেছিলাম গালিলীয় আপেক্ষিকতার আলোচনা দিয়ে। তার পর দেখেছি যে, ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎ গতিবিজ্ঞানের সমীকরণগুলির আবিষ্কারের ফলে ঊনবিংশ শতাব্দীর শেষভাগে বিজ্ঞানীদের মনে গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে সন্দেহ দেখা দিল। তাঁরা মনে করলেন যে, বলবিদ্যার সূত্রগুলি সকল গালিলীয় কাঠামোতে অভিন্ন হলেও তড়িৎ গতিবিজ্ঞানের সূত্রগুলি নয়। কাজেই তাঁদের মতে আলোক বা অন্য ধরণের তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গ অথবা ক্ষেত্র সম্পর্কিত পরীক্ষার সাহায্যে কোন গালিলীয় কাঠামোর চরম বেগ নিরূপণ করা সম্ভব। তারপর আমরা নানা প্রকারের পরীক্ষার ফলাফল বিশ্লেষণ করে দেখেছি, যেন প্রকৃতি দেবী আমাদের চরম বেগ না জানতে দেবার জন্য ষড়যন্ত্র করেছেন। কাজেই এটা মনে করা স্বাভাবিক যে, গালিলেওর কথাই ঠিক এবং কোনভাবেই চরম বেগ নির্ণয় করা সম্ভব নয়। সেজন্য আইনষ্টাইন প্রথমেই গালিলীয় আপেক্ষিকতাকে তাঁর বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের প্রথম স্বীকার্য হিসাবে গ্রহণ করলেন :

**পদার্থ বিদ্যার সূত্রগুলি প্রত্যেক গালিলীয় কাঠামোতেই অভিন্ন থাকে।***

* আইনষ্টাইনের ভাষায় এই স্বীকার্যটি ছিল : তড়িৎ গতিবিদ্যা ও আলোক বিদ্যার সূত্রগুলি সেই সব কাঠামোয় অভিন্ন হবে যেগুলিতে বলবিদ্যার সূত্রগুলি সত্য।"

এই উক্তি সত্য হলে ইথারের অস্তিত্ব বজায় রাখা দুরূহ হয়ে পড়ে। কারণ ইথারের মত অদ্ভুত গুণসম্পন্ন বস্তুর ( পরিশিষ্ট দেখুন ) অস্তিত্ব কোন প্রকার পরীক্ষা দ্বারাই প্রমাণ করা যাবে না। কারণ পদার্থ বিদ্যার সকল সূত্রই দু'টি গালিলীয় কাঠামোতে অভিন্ন থাকলে কোন বৈজ্ঞানিক পরীক্ষা দ্বারাই এই দু'টি কাঠামোর মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করা অসম্ভব এবং সেজন্য ইথার কাঠামোর সাপেক্ষে তাদের বেগ নির্ণয় করাও অসম্ভব। আমরা জানি যে, ইথার মাধ্যমের ওজন বা সান্দ্রতা নির্ণয় করা সম্ভব হয় নি। সেইজন্য আইনষ্টাইন তাঁর 1905 খৃষ্টাব্দের বিখ্যাত প্রবন্ধে লিখেছিলেন, "দেখান হবে যে, আলোক পরিবাহী ইথারের প্রবর্তন অনাবশ্যক কারণ আমরা যে মতের আলোচনা করব তাতে 'চরম স্থিতিশীল বিশেষ গুণসম্পন্ন দেশের' প্রয়োজন হবে না এবং শূন্যস্থানের যেখানে তড়িৎ চুম্বকীয় প্রক্রিয়া ঘটে তার প্রত্যেক বিন্দুতে বেগ ভেক্টর আরোপ করব না।"

মাইকেলসন মর্লে পরীক্ষা এবং পরবর্তী যুগের যথার্থতর পরীক্ষাগুলি (পৃষ্ঠা ৩৩-৪৬) প্রমাণ করেছে যে, সকল গালিলীয় কাঠামোর সাপেক্ষে আলোর বেগ সমান ও দিক নিরপেক্ষ। এটিকে আইনষ্টাইন তাঁর বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বিতীয় স্বীকার্যের মর্যাদা দেন ঃ

**শূন্যস্থানে আলোর বেগ ধ্রুবক, এটি শুধু যে দিক নিরপেক্ষ তাই নয়, উৎস ও দর্শকের মধ্যে আপেক্ষিক বেগের উপর ও নির্ভর করে না।**

আইনষ্টাইন তাঁর গভীর সজ্ঞার সাহায্যে বুঝে ফেললেন যে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি সকল জাড্যিক কাঠামোয় সত্য, অর্থাৎ তারা এই ধরণের কাঠামো রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়। আমরা দেখেছি যে, ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় নয়। কাজেই আইনষ্টাইন এই সিদ্ধান্তে পেঁছিলেন যে, গালিলীয় রূপান্তর সমীকরণগুলি জাড্যিক কাঠামোর রূপান্তর সঠিকভাবে সূচিত করে না। আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কারের এক বছর পূর্বেই 1904 খৃষ্টাব্দে লোরেণ্টস্ এমন এক রূপান্তর সমীকরণের সন্ধান পান যার সাপেক্ষে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি অপরিবর্তনীয়। এই সমীকরণগুলিই পরে আইনষ্টাইন স্বতন্ত্রভাবে আবিষ্কার করেন। আইনষ্টাইন দাবী করেন যে, এগুলিই সঠিক রূপান্তর

সমীকরণ। লোরেন্ট্স্ এগুলি প্রথমে আবিষ্কার করেন বলে এদের লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণে কাল কাঠামো নিরপেক্ষ নয় এবং $t \neq t'$। একথা মেনে নিতে আমাদের অসুবিধা হয় কারণ আমরা শৈশব থেকে চরম কালের কথা চিন্তা করতে অভ্যস্ত।

অপর একটি অসুবিধা হল যে, আমরা দেখেছি নিউটনীয় গতিসূত্র গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়। এখন দেখা গেল যে, সেগুলি লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় নয়। তবে কি বলবিদ্যা সংক্রান্ত পরীক্ষা-দ্বারা আবার আমরা চরম বেগ নির্ণয় করতে পারব? আইনষ্টাইন বললেন, না। নিউটনীয় গতিসূত্রের মধ্যে কতকগুলি ত্রুটি আছে। সেগুলি দূর করলেই সঠিক গতিসূত্র পাওয়া যাবে যা লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়। কাজেই চরম বেগের ধারণা চিরতরে বিলুপ্ত হল। বলবিদ্যার সূত্রগুলির পরিবর্তনের কথা আমরা পঞ্চম পরিচ্ছেদে আলোচনা করব।

যে পথে লব্ধপ্রতিষ্ঠ বিজ্ঞানীরা বিফল হয়েছিলেন সে পথে আইনষ্টাইন গেলেন না। তিনি তাঁদের মত গালিলীয় রূপান্তরকে ধ্রুব সত্য বলে মেনে না নিয়ে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণের অপরিবর্তনীয়তাকে স্বীকার্য হিসাবে ধরে নিলেন। ফলে পরিবর্তিত হল বহু শতাব্দীর পুরাতন বলবিদ্যার সূত্র সমূহ।

আইনষ্টাইনের তত্ত্ব সম্বন্ধে সাধারণ লোকের ধারণা যে, উচ্চতর গণিতের জ্ঞান না থাকলে এটি বোঝা যায় না। তাই জনসাধারণের কাছে এটি দুর্বোধ্য। এই ধারণা দূর করবার জন্য আমরা এই পরিচ্ছেদে সহজ ভাষায় আইনষ্টাইনের তত্ত্বের ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করব। তাছাড়া অন্য একটি কারণও আছে। প্রথমেই গণিতের ব্যবহার করলে, গণিতের চিহ্নগুলি মূল বক্তব্যকে অনেক সময় আড়াল করে থাকে এবং প্রকৃত ঘটনা বুঝতে অসুবিধা হয়। কাজেই এই পরিচ্ছেদে যথাসম্ভব কম গণিত ব্যবহার করে মূল বক্তব্যটি তুলে ধরার চেষ্টা করব। পরবর্তী পরিচ্ছেদে আমরা প্রচলিত প্রথানুযায়ী গাণিতিক সমীকরণের সাহায্যে আলোচনা করব।

**2-2. যুগপত্তা ও কালক্রম**—মনে করা যাক যে, পৃথিবীর উপরিস্থিত নিরীক্ষক দেখল যে, আলোর শূন্যের বেগ প্রতি সেকেণ্ডে 3 লক্ষ কিলোমিটার। এখন মনে করা যাক যে, অপর একজন নিরীক্ষক রকেটে করে তুমুল বেগে

আলোক রশ্মির দিকে ছুটে চলেছে। সমীকরণ (1-2) অনুযায়ী রকেটের কাঠামোয় নির্ণীত আলোর বেগ হওয়া উচিত ছিল সেকেণ্ডে $(300{,}000 - v)$ কি. মি., যেখানে রকেটের বেগ $v$ কি. মি./সে.। কিন্তু আইনষ্টাইনের মতে এটি অপরিবর্তনীয় থাকবে। আমরা জানি যে, রকেটের কাঠামোয় দেশাঙ্ক $x'$-এর মান পৃথিবীর কাঠামোর দেশাঙ্কের মান $x$ থেকে কম। কিন্তু আলোর বেগ $c = \frac{x}{t} = \frac{x'}{t'}$। যেহেতু $x' > x$, অতএব $t' > t$ কারণ আলোর বেগের মান দুই কাঠামোয় সমান হতে পারে না যদি দুই কাঠামোয় কালের মান সমান হয়। আমরা প্রথম পরিচ্ছেদে ধরে নিয়েছি যে, কালের চরম অর্থ আছে, অর্থাৎ সকল কাঠামোর ঘড়ি দুটি ঘটনার একই কাল নির্দেশ করবে। আমরা বিনা প্রমাণে ধরে নিয়েছি যে, রকেটের মহাকাশচারীর ঘড়ি এবং পৃথিবীর ঘড়ি দ্বারা নির্দিষ্ট সময় এক হবে। সেইজন্য আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বিতীয় স্বীকার্য মেনে নিতে আমাদের অসুবিধা হয়। এক কথায়, প্রথম পরিচ্ছেদ থেকে আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি ঃ

চরম কাল এবং মাইকেলসন-মর্লে পরীক্ষার ফল আমাদের সিদ্ধান্ত করতে বাধ্য করেছে যে, যদি ইথার থাকে তাহলে তার গুণাগুণ এমন যে, আমরা কোন পরীক্ষার সাহায্যেই ইথারের সাপেক্ষে আমাদের বেগ নিরূপণ করতে পারি না। এর একমাত্র বিকল্প হচ্ছে, চরম কালের ধারণা পরিত্যাগ করা, কারণ এইটাই আমাদের আপাত আত্মবিরোধী সিদ্ধান্তে উপনীত করেছে।

আইনষ্টাইন প্রথম সাহস করে বললেন যে, বিভিন্ন কাঠামোর ঘড়িগুলি একভাবে চলে না। শ্যাঙ্কল্যাণ্ডকে আইনষ্টাইন বলেন, "আমি অনেক নিষ্ফল চেষ্টা করেছি, কিন্তু শেষে আমার খেয়াল হল যে, সময়ই সন্দেহভাজন।"* এখন প্রশ্ন উঠে, তা হলে কি আমরা দুই-কাঠামোর ঘড়িকে সমলয় করতে পারি না? আমরা এখন আলোচনা করব যে, চরম কালের ধারণা নিয়ে দূরবর্তী দু'টি ঘড়িকে সমলয় করা যায় কিনা।

মনে করা যাক যে, কলিকাতা এবং নিউইয়র্কে দু'টি বিস্ফোরণ ঘটল। আমরা

---

* Conversations with Albert Einstein by R. S. Shankland—Am. J. Phys. **31**, **47**-57 (1963)

জানতে চাই, ঘটনা দু'টি যুগপৎ ঘটেছে কিনা অথবা কোন্‌টি আগে এবং কোন্‌টি পরে ঘটেছে। ঘটনাস্থল দু'টিতে যদি দু'টি ঘড়ি থাকে তাহলে আমরা ঐ ঘটনা দুটির সময় জানতে পারি এবং এই প্রশ্নের উত্তর দিতে পারি। কিন্তু ঐ ঘড়ি দু'টি যদি সমলয় না হয় তাহলে আমাদের উত্তর ঠিক হবে না। ঘড়িগুলি সাধারণতঃ মেলান হয় রেডিও সংকেতের সাহায্যে। কোন মানমন্দির থেকে সময় সংকেত রেডিও তরঙ্গের সাহায্যে প্রেরণ করা হয়। রেডিও তরঙ্গও তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ, কাজেই আলোর বেগে যায়। মনে করা যাক যে, কলিকাতা রেডিও স্টেশনের সংকেত দ্বারা ঘড়িগুলি সমলয় করা হয়েছে। কিন্তু সময়ের খুব সূক্ষ্ম পরিমাপের প্রয়োজন হলে রেডিও স্টেশন থেকে ঘটনাস্থলে পৌঁছতে রেডিও তরঙ্গের যে সময় লাগে তার জন্য কিছুটা সংশোধন করা দরকার। কিন্তু তার জন্য কলিকাতা থেকে নিউইয়র্ক পর্যন্ত আলোর বেগ জানা দরকার। হয়ত মনে হতে পারে, 'কলিকাতা থেকে নিউইয়র্ক পর্যন্ত আলোর বেগ' কেন বলছি, শুধু 'আলোর বেগ' না বলে। চরম কালের প্রচলিত ধারণা অনুযায়ী পৃথিবীর উপরে আলোর বেগ সর্বদিকে সমান নয়, কাজেই কলিকাতা থেকে নিউইয়র্ক যেতে আলোর যে সময় লাগবে, নিউইয়র্ক থেকে কলিকাতা ফিরে আসতে সে সময় লাগবে না। কিন্তু প্রচলিত যে সমস্ত পদ্ধতিতে আলোর বেগ নির্ণয় করা হয় তাতে একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করে আলো আবার প্রেরকের কাছে ফিরে আসতে কত সময় লাগে তার পা মাপ করা হয়। কাজেই আলোর যে বেগ নির্ণীত হয় তা দু' দিকের গড় বেগ, একদিকের নয়। আলোর একদিকের বেগ নির্ণয় করতে হলে প্রেরকের কাছ থেকে গ্রাহক যন্ত্র পর্যন্ত শুধু যাবার সময় নির্ণয় করতে হবে। কিন্তু এজন্য আলোক সংকেত প্রেরণ করার সময় ও গ্রাহক যন্ত্রের গ্রহণ করার সময় দুই-ই জানা দরকার। কিন্তু সেজন্য প্রেরক যন্ত্রের নিকট একটি এবং গ্রাহক যন্ত্রের নিকট অপর একটি ঘড়ি থাকা দরকার। কিন্তু এই দুই ঘড়িরও সমলয় হওয়া দরকার। আমাদের সমস্যা ছিল, দু'টি ঘড়ি সমলয় কিভাবে করা যায়। কিন্তু আলোর একদিকের বেগ নির্ণয় করার জন্য ধরে নেওয়া হচ্ছে যে, দু'টি ঘড়ি ইতিপূর্বেই সমলয় করা হয়েছে। কাজেই আমরা একটি যৌক্তিক চক্রে পড়েছি।

বিকল্প ব্যবস্থা হিসাবে একটি ক্রনোমিটারকে কলিকাতা থেকে নিউ ইয়র্ক নিয়ে গিয়ে দু'টি ঘড়িকে তার সঙ্গে মিলিয়ে নেওয়া যায়। কিন্তু ক্রনোমিটারটিকে

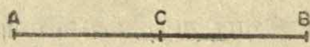
বিভিন্ন দিকে এবং বিভিন্ন স্থানে নিয়ে গেলেও যে তার চলার হার সমান থাকবে তার প্রমাণ কি? এটা প্রমাণ করতে হলে এমন নূতন অনুমানের প্রয়োজন, পূর্বে যার সত্যতা পরীক্ষা করা সম্ভব নয়।

আমরা যদি রেডিও তরঙ্গ ব্যবহার না করে অন্য কোন উপায়ে সময় সংকেত অসীম বেগে প্রেরণ করি তা হলে আলোর বেগ নির্ণয় করার মত কোন সমস্যা থাকবে না। কিন্তু আমরা এখনও পর্যন্ত আলোর অধিক বেগে কোন সংকেত একস্থান থেকে অন্যস্থানে প্রেরণ করতে পারি না। আইনষ্টাইনের মতে ভবিষ্যতেও এটা সম্ভব হবে না। এখন যদি কলিকাতা থেকে একটি পাথর অসীম বেগে নিউ ইয়র্কের দিকে ছোঁড়া যায় তাহলে সেখানে পেঁছিতে পাথরটির কোন সময়ে লাগবে না এবং আমরা অসীম বেগে সময় সংকেত পাঠাতে পারি। আইনষ্টাইন বললেন, এও সম্ভব নয়। কোন বস্তুকে আলোর শূন্যস্থানের বেগের খুব কাছাকাছি বেগে ছোঁড়া নীতিগতভাবে সম্ভব, কিন্তু আলোর শূন্যের বেগের সমান বা বেশী বেগে ছোঁড়া সম্ভব নয়।

আমরা দেখলাম যে, চরম কালের ধারণা নিয়ে আমরা বিভিন্ন কাঠামোর ঘড়িগুলিকে সমলয় করতে পারি না। আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বিতীয় স্বীকার্য অনুযায়ী আলোর বেগ সর্বদিকে এবং সব কাঠামোতেই সমান কাজেই আমাদের ঘড়ি মেলানর কাজ আরও সহজ হয়ে গেল। A ও B দুই বিন্দুতে যদি দু'টি ঘড়ি থাকে (চিত্র 2-1), তা হলে ঘড়ি দু'টিকে মেলাতে হলে নিম্নলিখিত পদ্ধতি অনুসরণ করা যায়। A ও B-র ঘড়িতে এমন স্বয়ংক্রিয় ব্যবস্থা করা হল যে, যখন সাতটা বাজে তখন সেখান থেকে একটি আলোর ঝলক নির্গত হয়। এখন একজন নিরীক্ষক A B দূরত্বের ঠিক মধ্যস্থল C বিন্দুতে দাঁড়িয়ে রইল। সে যদি A ও B থেকে আগত আলোক সংকেত দু'টি যুগপৎ দেখে তাহলে ঘড়ি দু'টি সমলয় বলে ধরা যায়। আর আলোক সংকেতের মধ্যে যেটি আগে আসবে সেইদিকের ঘড়ি অপেক্ষাকৃত দ্রুত হারে চলে। এবার দেখা যাক যে, এই পদ্ধতিতে ঘড়ি সমলয় করা হলে, সময় কাঠামো নিরপেক্ষ হয় কি না।

এই ব্যাপারটা বোঝাবার জন্য আইনষ্টাইন একটি খুব দীর্ঘ ট্রেনের কথা

কল্পনা করতে বলেন।* মনে করা যাক যে, ট্রেনটি সরল সমান্তরাল লাইনের উপর দিয়ে অবিচল বেগে ছুটছে। ট্রেনের মধ্যে একজন নিরীক্ষক আছেন এবং রেল লাইনের ধারে মাটির উপর আর একজন নিরীক্ষক দাঁড়িয়ে আছেন। মনে করা যাক যে, ট্রেনের দুই প্রান্ত A ও B-তে দুটি বজ্রপাত হল। কিন্তু এমন ব্যবস্থা করা আছে যে, ট্রেনের বিজ্ঞানী যাত্রীটির কোন ক্ষতি হল না। বজ্রপাত হওয়ায় ট্রেনের দুই প্রান্তে এবং তৎসংলগ্ন জমির উপর দাগ পড়ল। বজ্রপাতের মুহূর্তে মাটির ও ট্রেনের দাগ দু'টির সমাপতন ঘটেছে। পৃথিবীর উপরিভাগের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট পরিমাপ কাঠামো এবং ট্রেনের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট কাঠামো দু'টিকে আমাদের বর্তমান আলোচনার জন্য জাড্যিক কাঠামো বলে ধরতে পারি। প্রথমটির নাম দেওয়া হোক $S$ এবং দ্বিতীয়টির $S'$। মনে করা যাক যে, উভয় দর্শকের কাছেই একটি করে পরিমাপ দণ্ড এবং আলোক সংকেত গ্রাহক যন্ত্র আছে। পরে পরিমাপ করে দু'জন নিরীক্ষকই দেখেছিলেন যে, তাঁরা বজ্রপাত দ্বারা সৃষ্ট দাগ দু'টির মধ্যস্থলে তাঁদের আলোক সংকেত গ্রাহক যন্ত্রটিকে স্থাপন করেছিলেন।




চিত্র 2-1

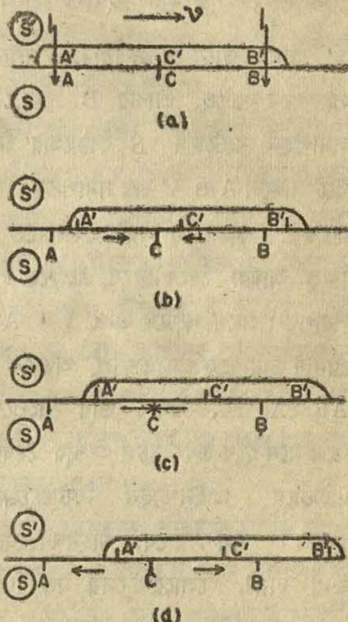
চিত্র 2-2-তে বজ্রপাত দ্বারা সৃষ্ট দাগগুলি S কাঠামোতে A ও B এবং $S'$ কাঠামোতে $A'$ ও $B'$ দ্বারা চিহ্নিত হয়েছে। নিরীক্ষকদ্বয় এই দাগগুলির মধ্যবিন্দু C ও $C'$-এ অবস্থান করছেন।

বজ্রপাতের আলোর ঝলক দু'টি যদি C বিন্দুতে একই সময়ে পৌঁছায় তাহলে S কাঠামোর নিরীক্ষক ঘটনা দু'টিকে সমকালীন বলে মনে করবে। অনুরূপে আলোক সংকেতদ্বয় যদি $C'$ বিন্দুতে একই সময়ে পৌছায় একই সময়ে তাহলে $S'$ কাঠামোর নিরীক্ষক তাদের সমকালীন বলে মনে করবে। মনে করা যাক যে, ট্রেনটি ডান দিকে $v$ বেগে ছুটে চলেছে, S কাঠামোর সাপেক্ষে।

---

* Albert Einstein: Relativity—The Special and the General Theory (Methnen 1960) পৃষ্ঠা 25-7,

এখানে আমরা ধরে নিয়েছি যে আলোক সংকেত দু'টি C বিন্দুতে একই সঙ্গে পৌঁছায় ( চিত্র 2—2 ($c$) )। কিন্তু ডান দিকের আলোক সংকেত C′ বিন্দু পার হয়ে ( চিত্র 2—2 ($b$) ) তবে C বিন্দুতে পৌঁছায়। কাজেই $S'$-এর নিরীক্ষকের কাছে B-এর বজ্রপাত আগে ঘটেছে বলে মনে হবে কিন্তু S-এর নিরীক্ষকের কাছে দু'টি ঘটনা সমকালীন। চিত্র 2—2 ($d$) তে A-র আলোক সংকেত অনেক পরে C′ বিন্দুতে পৌঁছেছে।



চিত্র 2-2

অনুরূপভাবে আমরা মনে করতে পারি যে, আলোক সংকেত দু'টি C′ বিন্দুতে একই সঙ্গে পৌঁছায়। A-র আলোক সংকেতকে C বিন্দু পার হয়ে C′ বিন্দুতে পৌঁছতে হয় কাজেই S-এর নিরীক্ষক এখন A-র বজ্রপাত আগে ঘটেছে বলে মনে করবে।

উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে, $S$ ও $S'$ দুই কাঠামোর নিরীক্ষকের পক্ষে এক মত হওয়া সম্ভব নয় কারণ আলোক সংকেতের পক্ষে যুগপৎ C ও C′ দু'টি পৃথক বিন্দুতে থাকা সম্ভব নয়। কাজেই দু'টি ঘটনার যুগপত্তার ধারণা আপেক্ষিক, চরম নয়।

এবার আমরা দেখব, $S$ ও $S'$-এর নিরীক্ষক কোন বস্তুর দৈর্ঘ্য সম্বন্ধে একমত হতে পারে কি না। আমরা জানি যে, কোন একটি স্থির বস্তুর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ করতে হলে আমরা একটি পরিমাপ দণ্ডকে সেই বস্তুর পার্শ্বে স্থাপন করে বস্তুটির দুই প্রান্তের সঙ্গে পরিমাপ দণ্ডের কোন কোন চিহ্নের সমাপতন হয় তা নির্ণয় করি। উদাহরণস্বরূপ যদি একটি প্রান্ত পরিমাপ দণ্ডের 1·4 সে. মি. চিহ্ন ও অন্য প্রান্তটি 84·5 সে. মি. চিহ্নের উপর পতিত হয় তাহলে বস্তুর দৈর্ঘ্য হবে $84{\cdot}5-1{\cdot}4=83{\cdot}1$ সে. মি.। কিন্তু একটি গতিশীল বস্তুর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ কিভাবে করা যাবে? সেক্ষেত্রে পরিমাপ দণ্ড ও

বস্তুটির মধ্যে আপেক্ষিক গতি আছে, কাজেই দুই প্রান্তের সঙ্গে পরিমাপ দণ্ডের যে বিন্দুগুলির সমপেতন হয় সেগুলির অবস্থান সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়। কাজেই এখন দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হলে কোন দু'টি বিন্দুর সঙ্গে বস্তুর প্রান্তদ্বয়ের যুগপৎ সমাপতন ঘটে তা নির্ণয় করা দরকার।

আমরা জানি যে, A বিন্দুতে যখন বজ্রপাত হয়েছে তখন A ও A′ বিন্দুর সমাপতন ঘটেছে, আবার B বিন্দুতে বজ্রপাত হবার সময় B ও B′-এর সমাপতন ঘটেছে। *S* কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে এই দুই ঘটনা যুগপৎ ঘটে থাকলে A ও A′-এর সমাপতন এবং B ও B′-এর সমাপতন যুগপৎ ঘটেছে। কাজেই *S* কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে AB র দৈর্ঘ্য A′ B′-এর দৈর্ঘ্যের সমান। কিন্তু আমরা দেখেছি যে, এক্ষেত্রে *S*′ কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে B ও B′-এর সমাপতন আগে ঘটেছে এবং A ও A′-এর সমাপতন পরে ঘটেছে। যেহেতু ট্রেনটি ডানদিকে গতিশীল, অতএব *S*′-এর নিরীক্ষকের কাছে মনে হবে, $AB<A'\ B'$, অর্থাৎ তার সাপেক্ষে স্থির বস্তুর (ট্রেন) দৈর্ঘ্য বড় বলে মনে হবে এবং সচল বস্তুর দৈর্ঘ্য সংকুচিত হয়েছে বলে মনে হবে। এইভাবে আইনষ্টাইন ফিট্‌জ্‌জেরাল্ড—লোরেন্ট্‌স্‌ সঙ্কোচনের ব্যাখ্যা করেন। লক্ষণীয় যে, আইনষ্টাইনের মতে আমাদের পরিমাপ পদ্ধতিই এর জন্য দায়ী, লোরেন্ট্‌সের মত তিনি তড়িৎ আহিত কণাগুলির ভ্রংশকে এর জন্য দায়ী করেন নি।

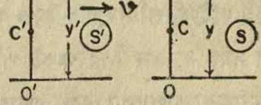
এবার মনে করা যাক যে, *S*′ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে A ও A′ এর সমাপতন এবং B ও B′ এর সমাপতন যুগপৎ ঘটেছে। তাহলে *S*′ কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে $AB=A'B'$। কিন্তু *S* কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে A ও A′ এর সমাপতন আগে ঘটেছে এবং B ও B′ এর সমাপতন পরে ঘটেছে বলে মনে হবে। কাজেই তার কাছে $A'\ B'<AB$। অর্থাৎ তার সাপেক্ষে স্থির বস্তুর (পৃথিবীর উপর অঙ্কিত A ও B ছিদ্রের মধ্যে দূরত্ব) দৈর্ঘ্য বড় এবং সচল বস্তুর (ট্রেন) দৈর্ঘ্য ছোট বলে মনে হবে। কাজেই বোঝা যাচ্ছে যে, দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন আপেক্ষিক, লোরেন্ট্‌সের তত্ত্বের মত চরম ফল নয়। লোরেন্ট্‌সের মতে যদি একটি দণ্ড পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির থাকে এবং ইথারের সাপেক্ষে সচল হয় তাহলে সেটি সংকুচিত হবে। কিন্তু পৃথিবীর সাপেক্ষে

সচল এবং ইথারের সাপেক্ষে স্থির থাকলে সেটি সংকুচিত হবে না। আইনষ্টাইন ইথারের অস্তিত্ব স্বীকার করেন না, কিন্তু পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির থাকলে পৃথিবীর নিরীক্ষকের কাছে সেটিকে সবচেয়ে বড় বলে মনে হবে এবং অন্য সকল কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে সেটিকে সংকুচিত বলে মনে হবে। অন্যদিকে পৃথিবীর সাপেক্ষে সচল হলে পৃথিবীর নিরীক্ষকের কাছেই সেটিকে সংকুচিত বলে মনে হবে। এই দৈর্ঘ্য সংকোচন পারস্পরিক।

এবার ঘড়ির কথা ধরা যাক। মনে করা যাক, পৃথিবীর উপরিস্থিত নিরীক্ষকের কাছে C বিন্দুতে একটি ঘড়ি আছে এবং ট্রেনের নিরীক্ষকের কাছে C′ বিন্দুতে অপর একটি ঘড়ি আছে। ধরা যাক যে, যখন C′ বিন্দু C বিন্দুর সঙ্গে মিলিত হয় তখন ঘড়ি দু'টি একই সময় নির্দেশ করছিল। ক্রমশঃ C′ বিন্দুর ঘড়িটি C বিন্দু থেকে দূরে চলে যায় এবং উপরের যুক্তিগুলি থেকে স্পষ্টই বোঝা যায় যে, ট্রেনের নিরীক্ষক ও রেল লাইনের পাশে দণ্ডায়মান নিরীক্ষক দু'জনের কাছে ঘড়ি দু'টির কাঁটার যুগপৎ একই অবস্থান হতে পারে না। কাজেই ঘড়ি দু'টি সমলয় হবে না। গতিশীল ঘড়ির চলার হার মন্থর হওয়া সম্বন্ধে আমরা পরে বিশদভাবে আলোচনা করব।*

**2.3. আপেক্ষিক বেগের সঙ্গে লম্ব দু'টি সমান্তরাল পরিমাপ দন্ডের তুলনা**

কোন বস্তু যদি একটি কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির থাকে তাহলে কাঠামোটিকে বস্তুটির 'প্রকৃত কাঠামো' বলা হয়। বস্তুটির সেই কাঠামোতে নির্ণীত দৈর্ঘ্যকে তার 'প্রকৃত দৈর্ঘ্য' বলা হয়। আমরা প্রথমে ধরে নিচ্ছি যে, কোন একটি বস্তু একটি কাঠামোতে স্থির থাকলে তার সেখানকার ধর্ম অতীত ইতিহাসের উপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ বস্তুটির অতীতে কি ধরণের গতি ছিল তার উপর তার বর্তমান প্রকৃত দৈর্ঘ্য ও অন্যান্য ধর্ম নির্ভর করে না। কাজেই আমরা এমন দু'টি পরিমাপ দণ্ড নিতে পারি যাদের প্রকৃত দৈর্ঘ্য সমান




চিত্র 2-3

* গতিশীল দূরবর্তী ঘড়ি অন্য কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে কি রকম দেখায়, সে ব্যাপারে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে নিম্নলিখিত বইএ: N. D. Mermin-Space and Time in Special Relativity (McGraw Hill 1968) পৃ: 43-46.

যদিও তারা পরস্পরের সাপেক্ষে সচল। মনে করা যাক যে, O′ A′ পরিমাপ দণ্ডের প্রকৃত কাঠামো $S'$ এবং O A-র প্রকৃত কাঠামো $S$। $S'$ $S$ এর সাপেক্ষে ডান দিকে $v$ বেগে সচল। এখন মনে করা যাক যে, $S'$ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে O′A′ এর দৈর্ঘ্য $S$ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে OA-র দৈর্ঘ্যের সমান। আমরা মনে করতে পারি যে, OA এবং O′A′ নিজ নিজ কাঠামোয় কোন একটি বিশেষ বর্ণালী রেখার নির্দিষ্ট সংখ্যক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সমান। O′A′ এবং OA উভয়েই আপেক্ষিক বেগ $v$-র সঙ্গে লম্ব এবং সমান্তরাল। ধরা যাক যে, পরিমাপ দণ্ডগুলি $y$ অক্ষের এবং আপেক্ষিক বেগ $x$ অক্ষের সমান্তরাল। $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে $S'$ কাঠামোর বেগ $+x$ অক্ষের দিকে হলে $S'$ কাঠামোর নিরীক্ষকের সাপেক্ষে কাঠামোর বেগ $-x$ অক্ষের দিকে হবে। প্রথমটি $v$ হলে দ্বিতীয়টি হবে $-v$। মনে করা যাক যে, C ও C′ যথাক্রমে OA ও O′A′ এর মধ্যবিন্দু। এখন মনে করা যাক যে, $S$ কাঠামোয় OA দণ্ড স্থির আছে এবং $S'$ কাঠামোয় O′A′ দণ্ড তার দিকে $v$ বেগে এগিয়ে চলেছে। মনে করা যাক যে, OA ও O′A′ কে এমনভাবে রাখা হয়েছে যে, এক সময় এদের মধ্যবিন্দু C ও C′ এর সমাপতন ঘটবে এবং তারপর C′ বিন্দু C বিন্দুকে অতিক্রম করে চলে যাবে। এখন যেহেতু O′C′ সব সময় A′C′-র সমান থাকে, অতএব O′A′ এর প্রান্ত-বিন্দুদ্বয় O′ ও A′ $y$ অক্ষকে যুগপৎ অতিক্রম করবে। দুই কাঠামোর দর্শকই এ বিষয়ে একমত হবেন। অনুরূপে দুই নিরীক্ষকের মতেই O এবং A বিন্দু যুগপৎ $y'$ অক্ষকে অতিক্রম করে। যেহেতু দুই নিরীক্ষকের কাছেই দুই প্রান্তবিন্দুর $y$ অক্ষ অতিক্রমের সময় এক হবে, অতএব অতিক্রম করার সময় দু'জন নিরীক্ষকই পরিমাপ দণ্ডদ্বয়ের প্রান্তবিন্দুগুলির অবস্থানের তুলনা করতে পারেন এবং এভাবে তাঁরা একই সিদ্ধান্তে পেঁছিবেন। অতএব নিরীক্ষকদ্বয়ের সিদ্ধান্ত হবে হয় OA⩽O′A′ অথবা OA⩾O′A′। উভয় কাঠামো সকল বিষয়েই সমতুল্য কাজেই OA ও O′A′ এর মধ্যে কোন অপ্রতিসম সম্পর্ক থাকলে আমরা কোন কাঠামোর চরম গতি নির্ণয় করতে পারব। কিন্তু আইনষ্টাইনের প্রথম স্বীকার্যে বলা হয়েছে যে দু'টি গালিলীয় কাঠামোর সাপেক্ষে পদার্থবিদ্যার সকল সূত্রই অভিন্ন। কাজেই কোন পরীক্ষার সাহায্যেই একটিকে সচল এবং অন্যটিকে অচল মনে হওয়া উচিত নয়, অর্থাৎ কোন বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর অস্তিত্ব নেই। কাজেই আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি

যে, OA = O′A′ অর্থাৎ আপেক্ষিক বেগের সঙ্গে লম্ব দিকের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকবে। অতএব

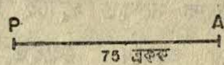
$$y' = y,\ z' = z \qquad (2\text{—}1)$$

এই দুই সমীকরণ গালিলীয় রূপান্তর সমীকরণ থেকে অভিন্ন ( সমীকরণ 1—1 )।

**2-4. দু'টি জাড্যিক কাঠামোর ঘড়ির তুলনা**—আমরা জানি যে, শূন্য স্থানে আলোর বেগ প্রায় 300,000 কি. মি./সে.। এত বড় সংখ্যা নিয়ে কাজ করার অসুবিধার জন্য আমরা দৈর্ঘ্যের একটি নূতন এককের সংজ্ঞা দেব :

1 একক = 60,000 কি. মি.

অতএব আলোর বেগ হবে 5 একক/সে.। মনে করা যাক যে, দু'জন নিরীক্ষক P এবং A-র মধ্যে ( চিত্র 2—4 ) কোন আপেক্ষিক গতি নেই। তারা নিজেরাই পরিমাপ দণ্ড দিয়ে নিজেদের মধ্যে দূরত্ব PA র পরিমাপ করল 75 একক। এখন তারা তাদের ঘড়ি দু'টিকে সমলয় করতে চেষ্টা করছে। যেহেতু আলোর বেগ 5 একক/সে. তারা গণনা করে দেখল যে, 75 একক যেতে আলোর সময় লাগবে $\frac{75}{5} = 15$ সে.। তারা নিজেদের মধ্যে ঠিক করে নিল যে, P র ঘড়ি যখন শূন্য কালাঙ্ক নির্দেশ করবে তখন P A র অভিমুখে একটি আলোক সংকেত প্রেরণ করবে এবং A সেই সংকেত পেয়েই P র দিকে প্রতিফলিত করে ফিরিয়ে দেবে।

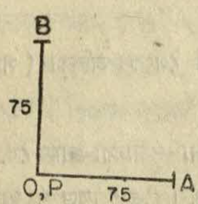


চিত্র 2-4

অতএব A তার ঘড়ি মেলাল শূন্যের পর 15 সেকেণ্ডে। এবার সে তার ঘড়ি চালিয়ে দিয়ে ভাবল যে সেটা A র ঘড়ির সঙ্গে সমলয় হবে। P র অভিমতও তাই। সে প্রতিফলিত সংকেত যখন পেল তখন তার ঘড়িতে শূন্যের পর 30 সেকেণ্ড হয়েছে কারণ আইনষ্টাইনের দ্বিতীয় স্বীকার্য অনুযায়ী আলোর বেগ সব দিকেই সমান। নতুবা চরম বেগ নির্ণয় করা সম্ভব হত। P যদি আবার আলোক সংকেতটিকে প্রতিফলিত করে ফিরিয়ে দেয় তা হলে তা A বিন্দুতে পৌঁছবে শূন্যের পর 45 সেকেণ্ডে।

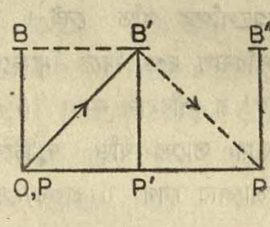
এবার একজন তৃতীয় ব্যক্তি O-এর মতামত নেওয়া যাক। O র মতে P এবং A উভয়েই তার কাছ থেকে ডান দিকে 4 একক/সে. বেগে সরে যাচ্ছে।

প্রত্যেক ব্যক্তিই মনে করে যে, সে স্থির আছে। মনে করা যাক যে, যে মুহূর্তে P তার আলোক সংকেত পাঠাল সেই মুহূর্তে সে O কে অতিক্রম করে যাচ্ছিল। কাজেই O তখন P র ঘড়ি দেখে তার ঘড়িও শূন্য কালাঙ্কে মিলিয়ে নিল। এখন মনে করা যাক যে P মাইকেলসন-মর্লের মত পরীক্ষা (পৃ. ৩৩—৩৯) করতে মনস্থ করল। সে PA র সমকোণে (চিত্র 2—5) PB = 75 একক দূরত্ব মেপে




চিত্র 2-5

নিল এবং B তে একটি আয়না বসাল। সে A র দিকে আলোক সংকেত পাঠাবার সঙ্গে সঙ্গেই B র দিকেও আর একটি আলোক সংকেত পাঠাল। আলোক সংকেত দু'টিই B ও A র আয়নায় প্রতিফলিত হয়ে একই সঙ্গে ফিরে আসবে। যেহেতু O এবং P র আপেক্ষিক বেগ PA রেখার সমান্তরাল এবং PB তার উপর লম্ব, অতএব উপরোক্ত আলোচনা অনুসারে দ'জনে সম্বন্ধে একমত হবে। যেহেতু আলোর বেগ সব কাঠামোয় সমান অতএব O, P এবং A সকলের মতেই আলোর বেগ 5 একক/সে.।




চিত্র 2-6

O নিরীক্ষকের মতে আলোর পথ হবে PB′ P″ (চিত্র 2—6) (চিত্র 1—18 তুলনীয়)। যতক্ষণে আলোক সংকেত আয়না B তে পেঁছায়, ব্যতিচার মাপকের PB বাহু ততক্ষণে P′B′ এ পেঁছায়। কাজেই O, P থেকে প্রেরিত আলোক সংকেত B′ এ আয়নার উপর গিয়ে পড়ে। ফেরবার পথে আলোক সংকেত B′ P″ পথে ফেরে কারণ ততক্ষণে PB বাহু P″ B″ এ পেঁছেছে।

PB বাহু ডানদিকে 4 একক/সে. বেগে যাচ্ছে এবং আলোক সংকেত 5 একক/সে. বেগে OB′ এর দিকে যায়। মনে করা যাক যে, আলোক সংকেত OB′ দূরত্ব $t$ সেকেণ্ডে অতিক্রম করে। অতএব OB′ = 5$t$ একক, BB′ = 4$t$ একক, OB = 75 একক।

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী $(5t)^2=(4t)^2+(75)^2$

অথবা $3t=75$

∴ $t=\frac{75}{3}=25$ সে.

কাজেই O র ঘড়ি অনুযায়ী আলোক সংকেতের P র কাছে ফিরে আসতে সময় লাগবে $2\times25=50$ সে.।

মাইকেলসন-মর্লে পরীক্ষা অনুযায়ী আলোক সংকেত A ও B থেকে P র কাছে একই কালাঙ্কে ফিরে আসে। O র ঘড়ি অনুযায়ী আলোর ফিরে আসতে সময় লাগছে 50 সে. এবং P র ঘড়ি অনুযায়ী লাগবে 30 সেকেন্ড। কাজেই প্রথমে O এবং A র ঘড়ি মেলান হয়েছিল, পরে আর মিলছে না। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, দু'জনের ঘড়ি সমলয় নয়।

এর পর দেখা যাক A র কাছে যখন প্রথম আলোক সংকেত পেঁছায় তখন O র ঘড়ি অনুযায়ী সময় কত। A র দিকে আলোক রশ্মির বেগ 5 একক/সে. এবং A র একই দিকে বেগ 4 একক/সে.। অতএব O র মতে আলো সেকেন্ডে A থেকে মাত্র 1 একক দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম হয়। ফেরবার পথে আলোর বেগ ও P এর বেগ বিপরীত দিকে কাজেই এক্ষেত্রে আলো সেকেন্ডে P থেকে দূরত্ব 9 একক কমায়। P ও A র মতে PA র দূরত্ব 75 একক কিন্তু O র পরিমাপ দণ্ড অনুযায়ী এই দূরত্ব এক নাও হতে পারে। কাজেই দূরত্বের কোন মান আমরা বিনা প্রমাণে ধরে নেব না। O র মতে P থেকে A পর্যন্ত যাতায়াতে মোট সময় লেগেছিল 50 সে.। ডান দিকে P থেকে A তে যাবার সময় নিশ্চয়ই মোট সময়ের $\frac{9}{10}$ হবে এবং ফেরত পথে সময় লাগবে মোট সময়ের $\frac{1}{10}$ কারণ প্রথমে বেগ ছিল 1 একক/সে. এবং পরে 9 একক/সে.। অতএব P→A যেতে O র ঘড়ি অনুযায়ী সময় লাগবে 45 সেকেন্ড এবং A থেকে P তে ফিরতে সময় লাগবে 5 সেকেন্ড। অনুরূপে যেহেতু P র ঘড়ি অনুযায়ী যাতায়াতে মোট সময় লেগেছিল 30 সেকেন্ড, অতএব O র মতে P র ঘড়ি অনুযায়ী আলোক সংকেত A তে পেঁছায় $\frac{9}{10}\times30=27$ সেকেন্ড পরে। কিন্তু আমরা জানি যে, A র ঘড়িতে সময় হবে 15 সেকেন্ড (আমরা শূন্য কালাঙ্ক থেকে সময়ের পরিমাপ শুরু করেছি)।

এখন আমরা বলতে পারি যে, O নিরীক্ষকের মতে আলোকে সংকেতের A তে পেঁছবার সময় নিম্নরূপ হবে :

| O র ঘড়ি | P র ঘড়ি | A র ঘড়ি |
|---|---|---|
| 45 সে. | 27 সে. | 15 সে. |

P কিন্তু O র সঙ্গে একমত নয়, সে মনে করে যে, আলোক সংকেত তার ঘড়ি অনুযায়ী 15 সেকেণ্ডে Aতে পেঁছায়। কাজেই O র মতে A র ঘড়ি P র ঘড়ির তুলনায় $27-15=12$ সেকেণ্ড পেছিয়ে দেওয়া হয়েছে।

এবার আলোক সংকেতের P তে প্রত্যাবর্তনের সময় গণনা করা যাক। A থেকে আলোক সংকেতের P তে গিয়ে ফিরে আসতে সময় লাগে 30 সেকেণ্ড। কাজেই আগের মত O র মতে A→P যাবার সময় মোট সময়ের $\frac{1}{10}$ অর্থাৎ $\frac{1}{10}\times 30=3$ সে. হবে। অতএব O র মতে A র ঘড়ি অনুযায়ী $15+3=18$ সেকেণ্ডে আলোক সংকেত P তে পেঁছায়।

অতএব O র মতে আলোক সংকেতের P তে ফিরে আসার কালাঙ্ক হবে :

| O র ঘড়ি | P র ঘড়ি | A র ঘড়ি |
|---|---|---|
| 50 সে. | 30 সে. | 18 সে. |

এবার O র মতে আলোর A তে পেঁছান এবং P তে ফিরে আসা এই দুই ঘটনার তুলনা করা যাক।

অতএব O-র মতে P-র ঘড়ি ও A-র ঘড়ি সমান হারে চলে, যেহেতু উভয় ঘড়ি অনুযায়ী দুই ঘটনার মধ্যে সময়ের অন্তর 3 সেকেণ্ড। কিন্তু O-র ঘড়ি

| | O-র ঘড়ি | P-র ঘড়ি | A-র ঘড়ি |
|---|---|---|---|
| ঘটনা 1 ( Aতে পেঁছান ) | 45 সে. | 27 সে. | 15 সে. |
| ঘটনা 2 ( Pতে প্রত্যাবর্তন ) | 50 সে. | 30 সে. | 18 সে. |
| ঘটনা দুটির মধ্যে সময়ের ব্যবধান | 5 সে. | 3 সে. | 3 সে. |

অনুযায়ী এই অন্তর 5 সেকেণ্ড। কাজেই O-র ঘড়ির তুলনায় P ও A-র

ঘড়ি উভয়ে বিলম্বিত হারে চলে। P ও A-র ঘড়ি সমান হারে চললেও A-র ঘড়িকে P-র ঘড়ির তুলনায় 12 সেকেণ্ড পেছিয়ে দেওয়া হয়েছে।

আমরা উপরোক্ত আলোচনা থেকে দেখেছি যে, দু'টি ঘড়ি যদি পরস্পরের সাপেক্ষে স্থির থাকে তা হলে তৃতীয় ব্যক্তির মতে তারা সমান হারে চলবে কিন্তু তাদের মধ্যে একটি নির্দিষ্ট সময়ের ব্যবধান থাকবে, কাজেই তারা সমলয় হবে না। এই সময়ের ব্যবধান ঘড়ি দুটির মধ্যে দূরত্বের (এ ক্ষেত্রে P থেকে A-র দূরত্ব) উপর নির্ভর করে। কাজেই একই জাড্যিক কাঠামোর সকল ঘড়ি সমান হারে চলবে কিন্তু তাদের মধ্যে অবস্থান অনুসারে একটি নির্দিষ্ট সময়ের ব্যবধান থাকবে। আমরা আরও দেখেছি যে, দু'টি বিভিন্ন কাঠামোর ঘড়ি সমান হারে চলে না O-র ঘড়ির 5 সেকেণ্ড = Pর ঘড়ির 3 সেকেণ্ড অর্থাৎ 1 সে. = $\frac{3}{5}$ সে.)। এবার যদি আমরা একটি চতুর্থ নিরীক্ষক O′ এর কথা কল্পনা করি যার সাপেক্ষে P ও A-র বেগ 3 একক/সে. তা হলে দেখা যাবে যে, O′ ও P এর ঘড়ির সময়ের অনুপাত এক নয়। পাঠক এ কথার সত্যতা পরীক্ষা করে দেখতে পারেন। O-র মতামতের চেয়ে O′-এর মতামতের গুরুত্ব বেশী দেবার কোন কারণ নেই। কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, দু'টি পরস্পরের সাপেক্ষে গতিশীল ঘড়িকে সমলয় করা সম্ভব নয়। একমাত্র একই কাঠামোর নিরীক্ষকেরা তাদের কাঠামোর ঘড়িগুলিকে সমলয় বলে মনে করবে। কিন্তু অন্য কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে মনে হবে যে এদের প্রতিটি ঘড়ি দ্বারা নির্দিষ্ট কালাঙ্কের মধ্যে পার্থক্য ধ্রুবক।

**2-5 দু'টি জাড্যিক কাঠামোর দৈর্ঘ্যের তুলনা :**—আমরা ইতিপূর্বে কয়েকটি সংখ্যাসূচক উদাহরণ দিয়ে দেখিয়েছি যে, দু'টি জাড্যিক কাঠামোর ঘড়ির ও পরিমাপ দণ্ডের মধ্যে কি রকম পার্থক্য দেখা যায়। আমরা এখন সংখ্যা ছেড়ে বীজগণিতের চিহ্ন দিয়ে সাধারণভাবে দুই কাঠামোর দেশ ও কালের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করব।

P এবং A-র কাঠামো O-র কাছ থেকে P→A দিকে অবিচল বেগ $v$ নিয়ে চলেছে। যে মুহূর্তে P Oকে অতিক্রম করে সেই সময়ে P এবং O দু'জনে তাদের ঘড়ি মিলিয়ে নিল শূন্য কালাঙ্কে। P এবং A পরস্পরের সাপেক্ষে স্থির আছে এবং তারা তাদের মধ্যে দূরত্বের পরিমাপ করল $x'$। P এবং A মনে করে যে তাদের ঘড়ি দু'টি সমলয় করা হয়েছে।

একটি ঘটনা ( ঘটনা 1 ) P বিন্দুতে শূন্য কালাঙ্কে ঘটেছে, অন্য একটি ঘটনা ( ঘটনা 2 ) A বিন্দুতে A-র ঘড়ি অনুযায়ী $t'$ কালাঙ্কে ঘটেছে। P এবং A-র কাঠামোতে ঘটনা 1 ও 2 এর মধ্যে দৈশিক অন্তর $x'$ এবং তাদের কালিক অন্তর $t'$। এই দুই অন্তরের পরিমাপের ব্যাপারে P এবং A-র সম্পূর্ণ মতৈক্য আছে।

এবার তৃতীয় ব্যক্তি O-র মতামত দেখা যাক। তার মতে ঘটনা 1 O বিন্দুতে শূন্য কালাঙ্কে ঘটেছে এবং মনে করা যাক ঘটনা 2 তার ঘড়ি অনুযায়ী $t$ কালাঙ্কে Aতে ঘটেছে। মনে করা যাক যে, O-র মতে P এবং A-র মধ্যে দৈশিক অন্তর $x$। কাজেই O-র কাঠামোতে ঘটনা দুটির মধ্যে দৈশিক অন্তর $x$ ও কালিক অন্তর $t$। এবারে $x', t'$ ও $x$, $t$-র মধ্যে সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

এবার চিত্র 2—5 এ P র মতে PA ও PB বাহুর প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য $x'$। O র মতে আপেক্ষিক বেগের সমকোণের দিকের বাহু PB র দৈর্ঘ্য $x'$ কিন্তু আপেক্ষিক বেগের সমান্তরাল PA বাহুর দৈর্ঘ্য $x'$ নয়। মনে করা যাক যে, এই দৈর্ঘ্য $z$।

O র মতে PB বাহু তার কাছ থেকে ডান দিকে $v$ বেগে সরে যায়। কাজেই আগের মতই আলোর গতি পথ ( চিত্র 2—6 ) হবে PB′ A″। মনে করা যাক যে, O র ঘড়ি অনুযায়ী PB′ পর্যন্ত যেতে আলোর সময় লাগে $k$ এবং B′ A″ পথে ফিরে আসতেও সময় লাগে $k$। O নিম্নলিখিতরূপে গণনা করে: আলোর বেগ $c$ হলে $PB'=kc$, $BB'=kv$, $PB=x'$।

অতএব পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$PB'^2=PB^2+BB'^2$ অথবা $k^2c^2=x'^2+k^2v^2$

অর্থাৎ $k^2(c^2-v^2)=x'^2$

$$\therefore \quad k^2=\frac{x'^2}{c^2-v^2} \qquad (2-2)$$

O র ঘড়ি অনুযায়ী P থেকে B পর্যন্ত যাতায়াত করার মোট সময় হবে $2k$। অতএব O র ঘড়ি অনুযায়ী P থেকে A পর্যন্ত যাতায়াত করার মোট সময়ও হবে $2k$ ( মাইকেলসন-মর্লে পরীক্ষার ফল )।

এখন O র মতে P A র দিকে $v$ বেগে চলেছে কাজেই $PA = z$ দূরত্ব অতিক্রম করতে আলোর সময় লাগবে $\frac{z}{c-v}$। অনুরূপে এই পথ ফিরে আসতে সময় লাগবে $\frac{z}{c+v}$। মোট যাতায়াতের সময় হবে

$$\frac{z}{c-v}+\frac{z}{c+v}=\frac{2zc}{c^2-v^2}$$

কিন্তু O র ঘড়ি অনুযায়ী মোট সময় $2k$,

$$\therefore \quad \frac{2zc}{c^2-v^2}=2k, \text{ অথবা } z=\frac{k}{c}\,(\,c^2-v^2\,)$$

$$\therefore \quad z^2=\frac{k^2}{c^2}\,(c^2-v^2)$$

কিন্তু সমীকরণ (2—2) অনুযায়ী

$$k^2=\frac{x'^2}{c^2-v^2}$$

$$\therefore \quad z^2=x'^2\,\frac{c^2-v^2}{c^2}=x'^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\therefore \quad z=x'\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (2\text{—}3)$$

কাজেই O র মতে আপেক্ষিক বেগের দিকের দৈর্ঘ্য $1 : \sqrt{1-v^2/c^2}$ অনুপাতে সঙ্কুচিত হয়।

**2-6. অন্য জাড্যিক কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে একটি জাড্যিক কাঠামোর বিভিন্ন ঘড়ির মধ্যে কালিক অন্তর** :—আমাদের সংখ্যাসূচক উদাহরণগুলি থেকে দেখা গেছে যে, প্রত্যেকে এ বিষয়ে একমত হবে যে, P র ঘড়ি এবং A র ঘড়ি একই হারে চলে। এর কারণ নিম্নলিখিতরূপে বলা যায় :

আমাদের আলোচনার প্রধান যুক্তি ছিল যে, প্রত্যেকটি নিরীক্ষক মনে করে যে, সে স্থির আছে এবং তার সমস্ত পরীক্ষালব্ধ ফল ও এই ব্যাপারকে সমর্থন করবে। কোন পরীক্ষা দ্বারা তারা নিজেদের গতির কথা জানতে পারবে না। P এবং A এ বিষয়ে একমত হবে যে, তাদের মধ্যে দূরত্ব $x'$। কাজেই তারা বলে যে, যে কোন একজনের প্রেরিত আলোক সঙ্কেতের অন্য ব্যক্তির কাছ থেকে প্রতিফলিত হয়ে ফিরে আসতে সময় লাগবে $\frac{2x'}{c}$ এবং

তাদের ঘড়িও এটা সমর্থন করবে। কিন্তু যে পরীক্ষায় P আলোক সংকেত A র কাছে পাঠিয়ে প্রতিফলিত করে ফিরিয়ে আনে সেটি এবং যে পরীক্ষায় A আলোক সংকেত পাঠিয়ে P র কাছ থেকে প্রতিফলিত করে ফিরিয়ে আনে সেটি সমতুল্য। P এবং A র ঘড়ি অনুযায়ী উভয় পরীক্ষায়ই মোট সময় লাগবে $\frac{2x'}{c}$। কাজেই P এবং A র ঘড়ির চলার হার একই হবে। আমরা সংখ্যাসূচক উদাহরণ দিয়ে দেখিয়েছি যে, O একথা স্বীকার করে কিন্তু তার মতে উভয় ঘড়ি তার ঘড়ির তুলনায় বিলম্বিত হারে চলে, কাজেই তার ঘড়ির সঙ্গে সমলয় নয়। এখন আমরা গণনা করব O র মতে P ও A র ঘড়ির মধ্যে সময়ের অন্তর কত।

ঘড়িগুলিকে সমলয় করার জন্য P শূন্য কালাঙ্কে একটি আলোক রশ্মি A তে পাঠাল। তাদের উভয়ের মতে PA র দৈর্ঘ্য $x'$ এবং PA পথ অতিক্রম করতে সময় লাগবে $\frac{x'}{c}$। ফলতঃ A যে মুহূর্তে P র আলোক সংকেত পায় তখন তার ঘড়ি $\frac{x'}{c}$ কালাঙ্কে মিলিয়ে নেয়।

O র ঘড়ি অনুযায়ী P থেকে A পর্যন্ত যাবার সময় হবে $\frac{z}{c-v}$ এবং ফেরার সময় হবে $\frac{z}{c+v}$, অতএব মোট সময় হবে $\frac{z}{c-v}+\frac{z}{c+v}=\frac{2zc}{c^2-v^2}$। অতএব O র মতে P থেকে A পর্যন্ত যাবার সময়÷মোট সময়$=\frac{z}{c-v}\div\frac{2zc}{c^2-v^2}$ $=\frac{c+v}{2c}$। P র ঘড়ি অনুযারী মোট সময় লাগে $\frac{2x'}{c}$। কাজেই O র মতে যখন আলোক রশ্মি A বিন্দুতে পেঁছায় তখন P র ঘড়ির সময় হবে $\frac{c+v}{2c}\times\frac{2x'}{c}=\frac{x'}{c^2}(c+v)$। কিন্তু পূর্বের ব্যবস্থা অনুযায়ী A র ঘড়ি চালান হবে $\frac{x'}{c}$ কালাঙ্ক থেকে, কাজেই P র ঘড়ি থেকে $\frac{x'}{c^2}(c+v)-\frac{x'}{c}$ $=\frac{x'v}{c^2}$ সেকেন্ড এগিয়ে আছে।

P ও A-র ঘড়ির মধ্যে সময়ের অন্তর PA-র দৈর্ঘ্য $x'$ এর উপর নির্ভর করে। কাজেই P থেকে A যত দূরে থাকবে এই অন্তর ও তত বেশী হবে। মনে করা যাক যে, P ও A-র কাঠামো O-র কাছ থেকে পূর্ব দিকে সচল তা হলে P-র ঘড়ি পূর্বদিকের সমস্ত ঘড়ি থেকে এগিয়ে থাকবে এবং পশ্চিমদিকের সমস্ত ঘড়ি থেকে পেছিয়ে থাকবে। উপরের উক্তি থেকে এটাও বোঝা যায় কারণ পূর্বদিককে আমরা $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিক ধরেছি। কাজেই পশ্চিম দিকে $x'$ হবে ঋণাত্মক। কাজেই কোন ঘড়ি ঋণাত্মক সংখ্যক সেকেণ্ড এগিয়ে থাকার অর্থ হল ধনাত্মক সংখ্যক সেকেণ্ড পেছিয়ে থাকা।

অতএব আমরা মনে করতে পারি যে, PA রেখার প্রত্যেক বিন্দুর একটি নিজস্ব ঘড়ি আছে ঃ কাজেই P, A-র কাঠামোর লোকেরা ভাবে যে, সব কয়টি ঘড়ি সমলয় কিন্তু অন্য কাঠামোর নিরীক্ষক মনে করে যে প্রত্যেকটি ঘড়ি তার স্থানীয় কাল নির্দেশ করে এবং এই কালের সঙ্গে P-র ঘড়ি দ্বারা নির্দিষ্ট কালের অন্তর উপরোক্ত সূত্র থেকে পাওয়া যায়।

2-7. **দুই জাড্যিক কাঠামোর ঘড়ির চলার হারের তুলনা** :—P এবং A-র মতে দু'টি ঘটনার মধ্যে কালিক অন্তর যদি 1 একক হয় তা হলে O-র ঘড়ি অনুযায়ী এই ঘটনা দু'টির মধ্যে কালিক অন্তর কত ?

আমরা পূর্বে দেখেছি যে, O-র মতে আলোক সংকেতের P থেকে Bতে গিয়ে ফিরে আসতে সময় লাগে $2k$। সমীকরণ ( 2-2 ) অনুযায়ী

$$k^2=\frac{x'^2}{c^2-v^2},\ \text{অর্থাৎ}\ \ k=\frac{x'}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

কিন্তু P-র ঘড়ি অনুযায়ী P থেকে B পর্যন্ত গিয়ে ফিরে আসতে আলোর সময় লাগে $\frac{2x'}{c}$।

$\therefore$ O-র মতে Pর ঘড়ির $\frac{2x'}{c}$ সেকেণ্ড $=$ O-র ঘড়ির $2k$ সেকেণ্ড

অর্থাৎ P-র ঘড়ির $\frac{2x'}{c}$ সেকেণ্ড $=$ O-র ঘড়ির $\frac{2x'}{\sqrt{c^2-v^2}}$ সেকেণ্ড অতএব

P-র ঘড়ির একক $=$ O-র ঘড়ির $\frac{2x'}{\sqrt{c^2-v^2}}\div\frac{2x'}{c}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$। যেহেতু

$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}>1$, অতএব O-র মতে P এর ঘড়ির চলার হার মন্থর হবে।
এই ঘটনাকে বলা হয় আইনষ্টাইন কাল প্রসারণ। এটি প্রমাণ করবার জন্য আমরা সমীকরণ (2—2) ব্যবহার করেছি। একটু চিন্তা করলেই দেখা যাবে যে কাল প্রসারণ প্রমাণ করার জন্য আমরা জ্যামিতির নিম্নলিখিত সত্যকে ব্যবহার করেছি : চিত্র 2-6 এ $2k>\frac{2x'}{c}$ অর্থাৎ

$$PB'+B'P''>2BP=2B'P'$$

এটা আবার পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে প্রমাণ করা যায়। এককথায় আমরা দেখিয়েছি যে, O-র কাঠামো অনুযায়ী আলো PB′ P″ পথ অনুসরণ করে, কিন্তু P-র কাঠামো অনুযায়ী সব কিছু স্থির আছে কাজেই আলো BPB পথে ফিরে আসে। আইনষ্টাইনের দ্বিতীয় স্বীকার্য অনুযায়ী আলোর বেগ দুই কাঠামোতেই সমান। কাজেই PB-র দিকে আলোর বেগ দুই কাঠামোতে সমান। কাজেই দুই কাঠামো অনুযায়ী P থেকে B পর্যন্ত গিয়ে ফিরে আসতে একই সময় লাগবে। অতএব Pর ঘড়ির চলার হার O-র ঘড়ির তুলনায় মন্থর হবে, কারণ P-র কাঠামোয় অল্প দূরত্ব (2BP) অতিক্রম করতে যা সময় লাগে Oর কাঠামোয় বেশী দূরত্ব (PB′+B′P″) অতিক্রম করতেও একই সময় লাগে।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে সুস্পষ্ট যে, পিথাগোরাসের উপপাদ্য সত্য হলে কাল প্রসারণও সত্য। দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন ও কাল প্রসারণ সূত্র থেকে দেখা যায় যে, কোন পরিমাপ দণ্ড যদি S′ কাঠামোতে স্থির থাকে (এ ক্ষেত্রে Pর কাঠামো) তা হলে S কাঠামোর (এ ক্ষেত্রে O-র কাঠামো) নিরীক্ষকের কাছে তার দৈর্ঘ্য সঙ্কুচিত বলে মনে হবে।

$$l=l'\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (2—4)$$

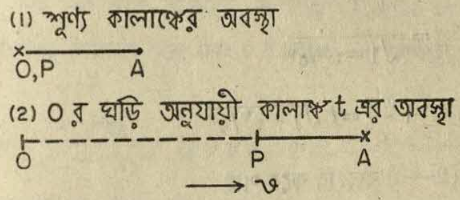
যেখানে $l$, S কাঠামোর নিরীক্ষকদ্বারা নির্ণীত দৈর্ঘ্য এবং $l'$, S′ কাঠামোর নিরীক্ষকদ্বারা নির্ণীত দৈর্ঘ্য। অনুরূপে যদি একটি ঘড়ি S′ কাঠামোয় স্থির থাকে তা হলে

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

যেখানে $\Delta t$, $\Delta t'$ যথাক্রমে S ও S′ কাঠামোর ঘড়ি দ্বারা নির্ণীত দু'টি ঘটনার মধ্যে কালিক অন্তর।

**2-8. দুটি জাড্যিক কাঠামোর স্থান ও কালের মধ্যে সম্পর্ক—লোরেন্টস্ রূপান্তর সমীকরণ :—**

চিত্র 2–7 এ দেখান হয়েছে, নিরীক্ষক O ঘটনা 1 ও 2 কে কিভাবে দেখে।




চিত্র 2-7

ঘটনা 1 শূন্য কালাঙ্কে P তে ঘটে, যে মুহূর্তে P O কে অতিক্রম করে। ঘটনা 2 O র ঘড়ি অনুযায়ী $t$ কালাঙ্কে A তে ঘটে। P এবং A র মতে এই দুই ঘটনার মধ্যে দৈশিক অন্তর $x'$, অর্থাৎ তাদের মতে PA র দৈর্ঘ্য $x'$। O র ঘড়ি অনুযায়ী ঘটনা 1 P বিন্দুতে শূন্য কালাঙ্কে এবং ঘটনা 2 A বিন্দুতে $t$ কালাঙ্কে ঘটেছে। তা ছাড়া O র মতে এই দুই ঘটনার মধ্যে দৈশিক অন্তর $x$। কাজেই O র মতে OP দূরত্ব $vt$ র সমান কারণ P তার কাছ থেকে $v$ বেগে সরে যাচ্ছে। অতএব O র মতে $PA = x - vt$।

P র মতে $PA = x'$ এবং O র মতে P র পরিমাপ দণ্ড $1 : \sqrt{1-v/c^2}$ অনুপাতে সংকুচিত হয়ে গেছে। অতএব O র মতে $PA = x'\sqrt{1-v^2/c^2}$

$$\therefore \quad x'\sqrt{1-v^2/c^2} = x - vt$$

$$\therefore \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (2—6)$$

মনে করা যাক যে, A র ঘড়ি অনুযায়ী ঘটনা 2 এর কালাঙ্ক $t'$। P এবং A এ ব্যাপারে একমত যে ঘটনাদ্বয়ের মধ্যে কালিক অন্তর $t'$। এখন O র মতে P র ঘড়ি A র ঘড়ির চেয়ে $\frac{x'v}{c^2}$ এগিয়ে আছে। অতএব O র মতে ঘটনা 2 ঘটার সময় P র ঘড়ি অনুযায়ী কালাঙ্ক $t' + \frac{x'v}{c^2}$। কিন্তু A র ঘড়ি অনুযায়ী 1 সেকেণ্ড O র ঘড়ির $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ সেকেণ্ডের সমান।

∴ যখন ঘটনা 2 ঘটে, তখন O র ঘড়ি অনুযায়ী কালাঙ্ক $\dfrac{t'+x'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ । কিন্তু O র ঘড়ি অনুযায়ী এই কালাঙ্ক $t$ র সমান ।

$$\therefore\quad t=\frac{t'+\frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\therefore\quad t'+\frac{x'v}{c^2}=t\sqrt{1-v^2/c^2}$$

সমীকরণ (2—6) ব্যবহার করে পাই

$$t'=t\sqrt{1-v^2/c^2}-\frac{v}{c^2}\,\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/v^2}}$$

$$=\frac{t-\frac{v^2}{c^2}t-\frac{v}{c^2}x+\frac{v^2}{c^2}t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\therefore\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\qquad(2—7)$$

সমীকরণ (2—6) ও (2—7) এর সঙ্গে (2—1) মিলিয়ে আমরা চারটি সমীকরণ পাই। এগুলি ব্যবহার করে আমরা কোন ঘটনার S কাঠামোর দেশ ও কালাঙ্ক থেকে সেই ঘটনার S′ কাঠামোর দেশ ও কালাঙ্ক পাই । সমীকরণগুলি এক সঙ্গে লেখা হল ঃ

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\quad(2—6)\qquad y'=y,\ z'=z\qquad(2—1)$$

$$\text{এবং}\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\qquad(2—7)$$

এই চারটি সমীকরণকে লোরেণ্ট্‌স্‌ রূপান্তর সমীকরণ বলা হয় এবং এগুলি আইনষ্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের মূল ভিত্তি ।

সমীকরণ (2—4) এবং (2—5) অনুযায়ী দেখা যায় যে, $v>c$ হলে S কাঠামোর দৈর্ঘ্য কল্পিত সংখ্যা হবে এবং S কাঠামোর কালিক অন্তর ও

কল্পিত সংখ্যা হবে। অতএব কোন জড় বস্তুর বেগ আলোকের শূন্যের বেগের চেয়ে বেশী হবে না।

যেহেতু P র মতে O ঋণাত্মক $x'$ অক্ষের দিকে $v$ বেগে সচল, অতএব আমরা যদি S′ কাঠামোর দেশ ও কালাঙ্ক থেকে S কাঠামোর দেশ ও কালাঙ্ক নির্ণয় করতে চাই তা হলে উপরের সমীকরণ গুলিতে ড্যাশযুক্ত সংখ্যা ও ড্যাশবিহীন সংখ্যার বিনিময় করে এবং $v$ র স্থলে $-v$ লিখলে পাই

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ y=y',\ \ z=z',\ t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2\text{—}8)$$

এখন প্রশ্ন উঠতে পারে যে, লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সূত্র যদি সত্য হয় তা হলে এটা আবিষ্কার করতে এত সময় লাগল কেন? সপ্তদশ শতাব্দীতে গালিলেও এবং নিউটনের গবেষণার পর লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সূত্র আবিষ্কার হতে সময় লেগেছিল আড়াই শ' বছর। এতদিন গালিলীয় রূপান্তর সূত্র ব্যবহার করে জ্যোতির্বিজ্ঞানের অসংখ্য গণনা করা হয়েছিল এবং পরীক্ষার ফলের সঙ্গে গণনার ফলের মিল দেখা গিয়েছিল। তার কারণ কি?

সাধারণতঃ যে সমস্ত বেগ নিয়ে জ্যোতির্বিজ্ঞানে আলোচনা করি সেগুলি সবই আলোর বেগের তুলনায় অনেক কম, ফলে $v/c$ একের চেয়ে অনেক ছোট সংখ্যা। কাজেই $\frac{v^2}{c^2}$ এবং $\frac{v}{c^2}$ কে উপেক্ষা করলে আমরা লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সূত্র থেকে পাই

$$x'=x-vt,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t$$

$$x=x'+vt',\ y=y',\ z=z',\ t=t'$$

এগুলি গালিলীয় রূপান্তর সূত্র ( সমীকরণ (1—1), (1—1$a$), (1—1$b$) থেকে অভিন্ন।

আমরা এই আসন্ন মান গ্রহণ পদ্ধতিকে অন্যভাবে দেখতে পারি। আমরা দেখেছি যে, আলোর বেগ কাঠামো নিরপেক্ষ। তা ছাড়া আলোর বেগ কোন বস্তুর উচ্চতম বেগ। নিউটনীয় অথবা গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্বে বস্তুর যে কোন বেগ থাকা সম্ভব, ফলে আমরা এক স্থান থেকে অপর স্থানে কোন সংকেত অসীম বেগে পাঠাতে পারি, অর্থাৎ এই সংকেত পেঁছতে কোন সময়

লাগে না। ফলে সময়কেও কাঠামো নিরপেক্ষ ধরা যায়। আমরা দেখেছি যে, বিভিন্ন কাঠামোয় ঘড়ি মেলানর প্রধান অসুবিধা ছিল যে, সংকেত পাঠাতে সময় লাগে। লোরেন্টস্ রূপান্তর সমীকরণ অনুযায়ী $c$ উচ্চতম বেগ। $c$ কে অসীম সংখ্যা $\infty$ ধরলে লোরেন্টস্ রূপান্তর গালিলীয় রূপান্তর থেকে অভিন্ন হয়।

তবে কি লোরেন্টস্ রূপান্তর সমীকরণের কোন প্রয়োগ নেই? গত শতাব্দীতে আলোর বেগের সঙ্গে তুলনীয় বেগে সচল কোন বস্তুর কথা আমাদের জানা ছিল না। কিন্তু এখন আমরা জানি যে, মহাজাগতিক রশ্মিতে উচ্চ বেগ সম্পন্ন মৌল কণা আছে যা ক্রমাগত পৃথিবীর উপর এসে পড়ছে। তা ছাড়া আমরা পরীক্ষাগারেও অনেক ধরণের মৌল কণা তৈরী করতে পারি যা, আলোর কাছাকাছি বেগে সচল। তাদের ক্ষেত্রে লোরেন্টস্ রূপান্তর সমীকরণ প্রয়োগ না করলে ভুলের পরিমাণ অত্যধিক হবে। এক কথায় বলা যায়, আধুনিক পদার্থ বিজ্ঞান, বিশেষ করে নিউক্লীয় ও পারমাণবিক পদার্থ বিজ্ঞানের উন্নতি সম্ভব হত না যদি আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কৃত না হত।

**2-9. দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন ও কাল প্রসারণ পারস্পরিক :**—সমীকরণ (2—4) ও (2—5) থেকে আমরা দেখি যে সঙ্কোচন ও প্রসারণের অনুপাত $\sqrt{1-v^2/c^2}$। এটিতে $\frac{v}{c}$ র দ্বিঘাত রাশি আছে। অতএব $v$ কে $-v$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলেও এই অনুপাত একই থাকে।

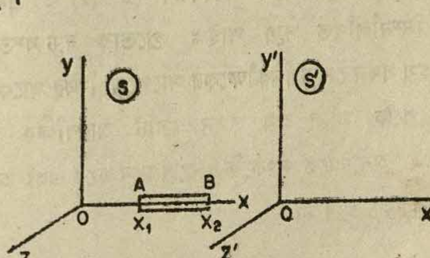
S কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে মনে হবে যে, S′ কাঠামো $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে $v$ বেগে সচল। অতএব S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের মনে হবে যে, তার কাঠামো স্থির আছে এবং S কাঠামো তার $x'$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকে $v$ বেগে সচল অর্থাৎ S কাঠামোর বেগ $-v$। প্ল্যাটফর্মের উপরিস্থিত নিরীক্ষকের কাছে যেমন মনে হয় যে, রেলগাড়ী $v$ বেগে ধাবমান তেমনই রেলগাড়ীর যাত্রীর কাছে মনে হয় যে প্ল্যাটফর্ম, গাছপালা, পাহাড় পর্বত সব কিছুই তার সাপেক্ষে $-v$ বেগে ধাবমান। অতএব সমীকরণ (2—4) ও (2—5) এ ড্যাশযুক্ত অক্ষর ও ড্যাশবিহীন অক্ষর বিনিময় করে এবং $v$ কে $-v$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলে পাই :

$$l' = l\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (2\text{—}4a)$$

এবং $$\Delta t' = \Delta t/\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (2\text{—}5a)$$

অতএব S কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির কোন পরিমাপ দণ্ডকে S′ কাঠামোর নিরীক্ষক সংকুচিত বলে মনে করবে। পূর্বে আমরা দেখেছি যে, S′ কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির পরিমাপ দণ্ডকে S কাঠামোর নিরীক্ষক সংকুচিত বলে মনে করবে। অতএব দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন পারস্পরিক। অনুরূপে S কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির কোন ঘড়িকে S′ কাঠামোর নিরীক্ষক মন্থর হারে চলছে বলে মনে করবে। কাজেই কাল প্রসারণ ও পারস্পরিক।

উপরোক্ত সত্য প্রথমে অদ্ভুত বলে মনে হতে পারে। কিন্তু একটু চিন্তা করলেই বোঝা যাবে যে, এটাই আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ। কারণ শুধু যদি S কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছেই S′ কাঠামোর দৈর্ঘ্যগুলি সংকুচিত হয়েছে এবং ঘড়িগুলি মন্থর হারে চলছে বলে মনে হয় তা হলে আমরা S′ কাঠামোর চরম বেগ নির্ণয় করতে পারব। কিন্তু এই ঘটনাগুলি পারস্পরিক হলে কোনটি গতিশীল বলা সম্ভব হবে না। কারণ S কাঠামোর নিরীক্ষকের কথাকে S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের কথার চেয়ে বেশী গুরুত্ব দেবার কোন কারণ নেই।




চিত্র 2-8

আমরা এবার লোরেন্টস্ রূপান্তর সমীকরণগুলিকে ভিত্তি করে দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন ও কাল প্রসারণ প্রমাণ করব। এটাই প্রচলিত পদ্ধতি। মনে করা যাক যে, একটি দণ্ড S কাঠামোয় স্থির আছে। তার দুই প্রান্ত A ও B র দেশাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, 0, 0)$ এবং $(x_2, 0, 0)$। এখন S′ কাঠামোর

সাপেক্ষে দণ্ডের দুই প্রান্তের দেশাঙ্ক হবে ( $x_1'$, 0,0 ) এবং ( $x_2'$, 0,0 ), যেখানে লোরেণ্ট্‌স্‌ রূপান্তর সমীকরণ অনুযায়ী

$$x_1=\frac{x_1'+vt_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad x_2=\frac{x_2'+vt_2'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2—9}$$

আমরা জানি যে, S′ কাঠামোর নিরীক্ষক এই দণ্ড AB র দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে চাইলে তাকে যুগপৎ দুই প্রান্তের দেশাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। অতএব আমরা লিখব $t_1'=t_2'=t'$

এখন $x_2-x_1=l$ যেখানে $l$ S কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে AB র দৈর্ঘ্য। অনুরূপে $x_2'-x_1'=l'$ S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে AB র দৈর্ঘ্য। অতএব সমীকরণ (2—9) থেকে পাই

$$x_2-x_1=\frac{x_2'-x_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{অতএব } l=\frac{l'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{অর্থাৎ } l'=l\sqrt{1-v^2/c^2}$$

এই সমীকরণ (2—4$a$) র সঙ্গে অভিন্ন। অনুরূপে যদি একটি দণ্ড S′ কাঠামোয় স্থির থাকত তা হলে সমীকরণ (2—4) ও প্রমাণ করা যেত। অতএব আমরা নিম্নলিখিত সূত্র পাই: প্রত্যেক দৃঢ় বস্তুর দৈর্ঘ্য সবচেয়ে বেশী বলে মনে হয় যখন সেটি নিরীক্ষকের সাপেক্ষে স্থির থাকে। যখন সেটি নিরীক্ষকের সাপেক্ষে সচল হয় তখন সেটি আপেক্ষিক বেগ $v$ র দিকে $\sqrt{1-v^2/c^2}$ : 1 অনুপাতে সংকুচিত বলে মনে হবে এবং আপেক্ষিক বেগের লম্বের দিকে সংকুচিত হবে না।

প্রাক্‌ আইনষ্টাইন যুগে দৃঢ় বস্তুর সংজ্ঞা ছিল যে, এটি এমন এক বস্তু যার সকলদিকের বিস্তার সকল অবস্থাতেই অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু এখন দেখা যাচ্ছে যে, গতিশীল কাঠামোর সাপেক্ষে আপেক্ষিক গতির দিকের দৈর্ঘ্য সংকুচিত হয়। কাজেই প্রাচীন সংজ্ঞা অনুযায়ী দৃঢ় বস্তুর কোন অস্তিত্ব নেই। তাছাড়া প্রাচীন সংজ্ঞা অনুযায়ী অসংনম্য বস্তুরও কোন অস্তিত্ব নেই।

এবার মনে করা যাক যে, একটি ঘড়ি S কাঠামোয় ( $x_0$, $y_0$, $z_0$) বিন্দুতে স্থির আছে। যখন এই ঘড়ি $t_1$ কালাঙ্ক নির্দেশ করে তখন S′ কাঠামোর ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময় $t_1'$ হবে।

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (2-10a)$$

S কাঠামোর ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট কালাঙ্ক $t_2$ হলে S′ কাঠামোর ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট কালাঙ্ক $t_2'$ হবে :

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (2-10b)$$

সমীকরণ (2—10*b*) থেকে (2—10*a*) বিয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

অর্থাৎ $\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1-v^2/c^2}$

এই সমীকরণটি ও সমীকরণ (2—5*a*) অভিন্ন। অতএব S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে S কাঠামোর ঘড়ি মন্থর হারে চলছে বলে মনে হবে। এর বিপরীত সূত্রও আমরা অনুরূপভাবে প্রমাণ করতে পারি।

প্রত্যেক ঘড়ি সবচেয়ে দ্রুত হারে চলে যখন সেটি নিরীক্ষকের সাপেক্ষে স্থির থাকে। যদি ঘড়িটি $v$ বেগে নিরীক্ষকের সাপেক্ষে গতিশীল হয় তা হলে তার চলার হার 1 : $\sqrt{1-v^2/c^2}$ অনুপাতে মন্থর হয়ে যায়।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে পেঁছতে পারি যে, সকল জাড্যিক কাঠামোকে সমান মর্যাদা দিতে হবে। জগতে কোন বিশেষ অধিকার প্রাপ্ত কাঠামো নেই।

## আরও পড়ার জন্য সুপারিশ

### সাধারণ বুদ্ধিতে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে

1. C. Durell—Readable Relativity ( Harper and Row 1960 )
2. W. K. H. Panofsky and M. Phillips—Classical Electricity & Magnetisn ( Addison Wesley, Japan Pub. 1962)
3. N. D. Mermin—Space and Time in Special Relativity ( McGraw Hill 1968 )
4. A. Einstein—Relativity—The Special and the General Theory ( Methuen 1960 )
5. C. Sherwin—Basic Concepts of Physics ( Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York 1963 )

### ইতিহাস সম্বন্ধে

1. G. Holton—On the Origins of the Special Theory of Relativity—Am. J. Phys. **28**, 627-36 (1960)
2. R. S. Shankland—Conversations with Albert Einstein —Am. J. Phys. **31**, 47-57 ( 1963 )
3. Do. —Michelson—Morley Experiment—Am. J. Phys. **32**, 16-35 ( 1964 )
4. H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl—The Principle of Relativity ( Dover 1923 )

এতে লোরেণ্ট্সের 1895 এবং 1904 খ্রীষ্টাব্দে প্রকাশিত দু'টি প্রবন্ধ এবং আইনষ্টাইনের 1905 খ্রীষ্টাব্দে প্রকাশিত বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধীয় প্রবন্ধের ইংরাজী অনুবাদ মুদ্রিত হয়েছে।

5. C. W. Kilmister—Special Theory of Relativity ( Pergamon 1960 ) এতে লোরেণ্ট্সের 1904 খ্রীষ্টাব্দে প্রকাশিত প্রবন্ধের এবং পোয়াঁকারের 1906 খ্রীষ্টাব্দে প্রকাশিত দু'টি প্রবন্ধের ইংরাজী অনুবাদ প্রকাশিত হয়েছে।

6. J. Bernstein—Einstein ( Collins 1974 )
7. P. A. Schilpp—Albert Einstein : Philosopher—Scientist (Harper & Brothers 1959) Vol. I

## তৃতীয় পরিচ্ছেদ

# লোরেণ্ট্‌স্‌ রূপান্তর সমীকরণ ও তার কয়েকটি ফলাফল

"আমরা খুব অল্প জানি, তবু আশ্চর্য যে, আমরা এত বেশী জানি এবং আরও আশ্চর্যের বিষয় যে, এত অল্প জ্ঞান আমাদের এত বেশী ক্ষমতা দিতে পারে।" —বার্ট্রাণ্ড রাসেল।

"জগতের সবচেয়ে দুর্বোধ্য ব্যাপার হচ্ছে যে তা বোধগম্য।"—আইনষ্টাইন।

### 3-1. দেশ-কাল রূপান্তর সমীকরণ নির্ণয়ঃ

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদে আমরা সহজ বুদ্ধি প্রয়োগ করে দেখেছি যে, লোরেণ্ট্‌স্‌ রূপান্তর সমীকরণ একটি থেকে অন্য গালিলীয় কাঠামোয় দেশ কালের রূপান্তর সূচিত করে। কিন্তু তবু আমরা এই পরিচ্ছেদে একটি বিধিসম্মত প্রমাণ দেবার চেষ্টা করব। এর কারণ এই যে, কোন একটি তত্ত্বের ভিত্তি কিসের উপর প্রতিষ্ঠিত এবং কোন্‌ কোন্‌ স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকার্য আমরা ব্যবহার করেছি তা জানা দরকার নতুবা ভবিষ্যতে প্রয়োজন হলে আমরা এই তত্ত্বের পরিবর্তন বা পরিবর্ধন করতে পারব না। কেহ যদি মনে করেন যে, আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দু'টি স্বীকার্য থেকে গণিতের কঠোর নিয়মানুযায়ী দেখান যাবে যে, লোরেণ্ট্‌স্‌ রূপান্তর সমীকরণই একমাত্র সম্ভব, তাহলে ভুল করবেন। আইনষ্টাইন তাঁর গভীর স্বজ্ঞার সাহায্যে প্রয়োজনমত আরও কয়েকটি অনুমান করে সঠিক সমীকরণ নির্ণয় করতে সক্ষম হয়েছিলেন, এখানেই তাঁর বৈশিষ্ট্য। লোরেণ্ট্‌স্‌ সমীকরণ নির্ণয়ের ভিত্তিস্বরূপ যে দু'টি স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধ ব্যবহার করা হল তা নিচে লেখা হল।

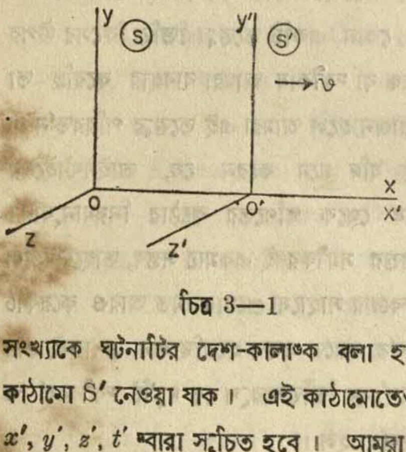
**স্বীকার্য 1** রূপান্তর সমীকরণগুলি এমন হওয়া উচিত যে, সকল জাড্যিক কাঠামো সমতুল্য এবং এতে এমনকিছু থাকা উচিত নয় যাতে কোন একটি কাঠামোর অন্যগুলির তুলনায় বৈশিষ্ট্য থাকে কারণ তাহলে এই বৈশিষ্ট্যের সাহায্যে বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামো নির্ণয় করা সম্ভব হবে।

**স্বীকার্য 2** শূন্যস্থানে আলোর বেগ সকল জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে সমান এবং উৎসের বেগের উপর অথবা আলোর গতির দিকের উপর নির্ভরশীল নয়।

উপরের স্বীকার্য দু'টি কার্যতঃ আইনষ্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের মূল স্বীকার্য দু'টি থেকে অভিন্ন। এছাড়া আমরা একটি স্বতঃসিদ্ধ ব্যবহার করব।

**স্বতঃসিদ্ধ 1** অন্য বস্তুর সঙ্গে মিথষ্ক্রিয়া ব্যতিরেকে বস্তুকণা জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির থাকে অথবা সরলরেখায় অবিচল বেগে গতিশীল হয় এবং এই কাঠামোর সাপেক্ষে সরলরেখায় অবিচলবেগে সচল সকল কাঠামোই জাড্যিক।

স্বতঃসিদ্ধ 1 জাড্যিক কাঠামোর সংজ্ঞা এবং নিউটনীয় বলবিদ্যার প্রথম গতিসূত্র থেকে পাওয়া যায়। আমরা এটিকে এখানে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে লিখেছি এইজন্য যে, আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী হয়ত নিউটনের সূত্রগুলির পরিবর্তন করা প্রয়োজন হতে পারে।




চিত্র 3—1

একটি নির্দিষ্ট পরিমাপ কাঠামো S এ P বিন্দুতে যদি একটি ঘটনা ঘটে তাহলে সেটিকে সূচিত করতে চারটি সংখ্যার প্রয়োজন যথা, P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশকারী তিনটি কার্টিজীয় দেশাঙ্ক $x$, $y$, $z$ এবং কালাঙ্ক $t$। এই চারটি সংখ্যাকে ঘটনাটির দেশ-কালাঙ্ক বলা হয়। এবার অপর একটি জাড্যিক কাঠামো S′ নেওয়া যাক। এই কাঠামোতেও ঘটনাটি অপর চারটি দেশ-কালাঙ্ক $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ দ্বারা সূচিত হবে। আমরা দুই কাঠামোয় দেশ ও কালের একই একক ব্যবহার করব। যেহেতু প্রত্যেক ঘটনার S কাঠামোর দেশ-কালাঙ্ক $(x, y, z, t)$-র সঙ্গে S′ কাঠামোর দেশ-কালাঙ্ক $(x', y', z', t')$ সংশ্লিষ্ট, অতএব এই চল সমষ্টিদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক থাকবে। মনে করা যাক যে এই সম্পর্ক নিম্নলিখিত ধরণের হবে :

$$\left.\begin{aligned} x' &= \phi_1\,(x, y, z, t) \\ y' &= \phi_2\,(x, y, z, t) \\ z' &= \phi_3\,(x, y, z, t) \\ t' &= \phi_4\,(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \quad (3-1)$$

যেখানে $\phi_1$, $\phi_2$, $\phi_3$, ও $\phi_4$ $(x, y, z, t)$ চল সমষ্টির চারটি অপেক্ষক। S ও S′ উভয়ই জাড্যিক কাঠামো, অতএব S কাঠামোয় অবিচল বেগে সরলরৈখিক গতি S′ কাঠামোতেও অবিচল বেগে সরলরৈখিক গতি বলে মনে হবে।

অতএব S কাঠামোর সরলরেখা রূপান্তরের ফলে S′ কাঠামোতেও সরলরেখা বলে মনে হবে। এছাড়া আমরা অনুমান করব যে, S কাঠামোর সসীম দেশ-কালাঙ্ক যুক্ত বিন্দুগুলি S′ কাঠামোর সসীম দেশ-কালাঙ্ক যুক্ত বিন্দুতে রূপান্তরিত হবে ( S′ কাঠামোর অসীম কালাঙ্ক যুক্ত বিন্দুতে রূপান্তরিত হবে না)। অর্থাৎ আমরা এমন রূপান্তর গ্রহণ করব যার সাপেক্ষে অসীম দূরত্বের তল অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ অসীম দূরত্বেই থাকে। দেখান যায় যে, এই শর্তাধীন সমীকরণগুলি রৈখিক হবে অর্থাৎ এগুলির নিম্নলিখিত রূপ হবে :[1]

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t+a_{15} & (a)\\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t+a_{25} & (b)\\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t+a_{35} & (c)\\ t' &= a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t+a_{45} & (d) \end{aligned}\right\} \quad (3-2)$$

যেখানে $a_{11}, a_{12} \cdots a_{44}$ সহগগুলি ধ্রুবক।

---

1. যে রূপান্তরের ফলে S কাঠামোর সরলরৈখিক অবিচল বেগ থেকে S′ কাঠামোর সরলরৈখিক অবিচল বেগ পাওয়া যায়, সেগুলিকে অভিক্ষেপমূলক রূপান্তর বলা হয় এবং তার সাধারণ রূপ হবে

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_{15}}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t + \epsilon}$$

যেখানে $a_{11},\cdots,a_{15}$ এবং $\alpha,\cdots,\epsilon$ সহগগুলি ধ্রুবক। $y'$, $z'$ ও $t'$-এর ক্ষেত্রেও অনুরূপ রূপান্তর সমীকরণ পাওয়া যায়। প্রমাণের জন্য অনুসন্ধিৎসু পাঠক নিম্নলিখিত বই দেখতে পারেন। এখানে সন্তত গ্রুপ তত্ত্ব ব্যবহার করা হয়েছে : S. Lie and G. Scheffers— Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen (Leipzig 1893)—পৃষ্ঠা 32.

সাধারণভাবে এই রূপান্তরের ফলে S কাঠামোর অসীম দূরত্বে অবস্থিত কোন বিন্দু ( $x, y, z, t \to \infty$ ) S′ কাঠামোর সসীম দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুতে রূপান্তরিত হয়। কিন্তু পরস্পরের সাপেক্ষে সচল দু'টি নিরীক্ষকের ক্ষেত্রে এটা হওয়া সম্ভব নয়। উভয় কাঠামোতেই অসীম দূরত্বের বিন্দু অসীম দূরত্বে থাকবে। সেজন্য হর একটি ধ্রুব সংখ্যা হওয়া উচিত সেটি সসীম এবং শূন্য নয়। অতএব রূপান্তর সমীকরণগুলির রূপ সমীকরণ (3-2)-এর মত হবে। এর প্রমাণ দেওয়া হয়েছে উপরিলিখিত পুস্তকের পৃষ্ঠা 57-8-এ।

ফক (Fock) রূপান্তর সমীকরণের রৈখিক প্রকৃতি প্রমাণ করেন জাড্যিক কাঠামোর নিম্নলিখিত দুটি গুণ থেকে : (1) একটি কাঠামোয় কোন বস্তুকণার সরলরেখায় অবিচল বেগে গতি অন্য কাঠামোতেও অনুরূপ গতি বলে মনে হবে। (2) আলোর বেগ দুই কাঠামোতেই $c$ হবে। এর প্রমাণ Fock : The Theory of Space, Time and Gravitation (Pergamon 1964) এ পৃষ্ঠা 20-24 এ দেওয়া আছে। নারলিকার রূপান্তর সমীকরণের রৈখিক প্রকৃতি প্রমাণ করেন

এবার আমরা সময়ের শূন্যাঙ্ক এমনভাবে নেব যে তখন দুটি কাঠামোর মূল বিন্দু O এবং O′ সমস্থানিক হবে। অতএব যখন $t=t'=o$ তখন $x=y=z=x'=y'=z'=o$। কাজেই $a_{15}=a_{25}=a_{35}=a_{45}=o$। এখন $(3-2)$

---

নিম্নলিখিত শর্ত থেকে : সকল জাড্যিক কাঠামোতেই আলোর তরঙ্গ সমীকরণের রূপ হবে (সমীকরণ 1—33*a*) :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0$$

—(V. V. Narlikar : Proc. Camb. Phil. Soc. **28**, 460–2(1932) )

এ ছাড়া নিম্নলিখিত শর্ত থেকেও রৈখিক প্রকৃতি প্রমাণ করা যায় :

$\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}$ এর সহগ $g_{\mu\nu}$ গুলি ধ্রুবরাশি হলে রূপান্তরিত রূপ

$\sum_{\mu',\nu'=1}^{4} g_{\mu'\nu'}\, dx^{\mu'}\, dx^{\nu'}$ এর সহগগুলি ও ধ্রুবরাশি হবে। আলোর গতি সূচক

সমীকরণ $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ কে দেশ-কালিক অন্তরের সাপেক্ষে লেখা যায় : $(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2-c^2(dt)^2=0$। এখন আমরা যদি লিখি $x^1\equiv x,\ x^2\equiv y,\ x^3\equiv z,\ x^4\equiv ict,\ i=\sqrt{-1}$, কল্পিত সংখ্যা, তা হলে সমীকরণটি হবে $(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2=0$।

এটি $\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}=0$ এর একটি বিশেষ রূপ। প্রমাণের জন্য দেখুন : W. Rindler—Special Relativity (Oliver and Boyd 1966)।

রূপান্তর সমীকরণগুলির রৈখিক প্রকৃতি অন্যভাবেও প্রমাণ করা যায়। আইনষ্টাইন তাঁর মূল প্রবন্ধে (Ann. d. Physik **17**, 891-921 (1905) ) লিখেছেন যে, সমীকরণগুলি রৈখিক কারণ দেশ ও কাল সমসত্ত্ব। আইনষ্টাইনের এই প্রবন্ধের ইংরাজী অনুবাদ আছে নিম্নলিখিত বই দুটিতে :

(1) H. A. Lorentz, A. Einsteiu, H. Minkowski and H. Weyl—The Principle of Relativity (Dover 1923) এবং (2) C. W. Kilmister—Special theory of Relativity (Pergamon 1970)। এই সমসত্ত্বতার গাণিতিক সংজ্ঞা পরিষ্কার ছিল না। পরবর্তীকালে এর গ্রুপ তাত্ত্বিক সংজ্ঞা দেওয়া হয় : V. Berzi and V. Gorini—J. Math. Phys. **10**, 1518—24 (1969)। এ ছাড়া অনুসন্ধিৎসু পাঠক নিম্নলিখিত প্রবন্ধগুলিও দেখতে

সমীকরণগুলিতে $x=y=z=o$ প্রতিস্থাপিত করলে আমরা পাই $x'=a_{14}t$, $y'=a_{24}t$, $z'=a_{34}t$ এবং $t'=a_{44}t$, অর্থাৎ $x'=\frac{a_{14}}{a_{44}}t'$, $y'=\frac{a_{24}}{a_{44}}t'$, $z'=\frac{a_{34}}{a_{44}}t'$। অতএব S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে S কাঠামোর মূল বিন্দুর গতির তিনটি উপাংশই অবিচল, কারণ $a_{14}$, $a_{24}$, $a_{34}$ এবং $a_{44}$ ধ্রুবসংখ্যা। অতএব S′ কাঠামোর দর্শকের কাছে মনে হবে যে, মূলবিন্দু O একটি সরলরেখায় অবিচল বেগে সচল। এই দিকের সমান্তরাল করে আমরা $x$ ও $x'$ অক্ষ নেব। কাজেই $x$ ও $x'$ অক্ষের কিছু অংশ পরস্পরকে আচ্ছাদিত করবে। $x$ ও $x'$ অক্ষকে এভাবে ধরার ফলে S′ কাঠামোর দর্শকের কাছে O বিন্দু $x'$ এর দিকে অবিচল বেগে যাচ্ছে বলে মনে হবে। কাজেই এখন $a_{24}=o$, $a_{34}=o$। অতএব সমীকরণগুলি হবে :

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t \\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \\ t' &= a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{—}3)$$

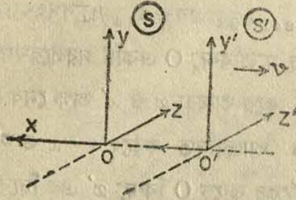
---

পারেন : V. Gorini and A. Zecca—J. Math. Phys. **11**, 2226—30 (1970), L. A. Lugiato and V. Gorini—J. Math. Phys. **13**, 665—71 (1972)।

দেশ-কালের সমসত্ত্বতার অর্থ হল যে, সকল বিন্দু সমতুল্য অর্থাৎ তাদের গুণাগুণের মধ্যে কোন পার্থক্য নেই। রূপান্তর সমীকরণ যে রৈখিক হবে তা সহজবুদ্ধিতে এইভাবে বোঝা যায়। উদাহরণ স্বরূপ মনে করা যাক যে, $x'$ $x$ এর বর্গের উপর নির্ভর করে, অর্থাৎ $x'=a_{11}x^2$। তা হলে S′ কাঠামোর দুই বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব $x'_2-x'_1=a_{11}(x_2{}^2-x_1{}^2)$। মনে করা যাক যে এক একক দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডের সীমাবিন্দু দ্বয়ের S′ কাঠামোতে $x$ দেশাঙ্ক : $x_1=2$, $x_2=3$ তাহলে $x_2'-x_1'=5a_{11}$। এখন যদি দণ্ডটিকে S কাঠামোয় সরিয়ে রাখা যায় যাতে $x_1=3, x_2=4$, তাহলে $x_2'-x_1'=7a_{11}$। অতএব S কাঠামোর দণ্ডটির দৈর্ঘ্য তার অবস্থানের উপর নির্ভর করে, এটি দেশের সমসত্ত্বতার পরিপন্থী। অনুরূপে $t'$ ও $t$ এর প্রথম ঘাতের উপর নির্ভর করবে নতুবা S′ কাঠামোর দুই ঘটনার মধ্যে কালের অন্তর ঘড়ির কাঁটার অবস্থানের উপর নির্ভর করবে। অর্থাৎ উদাহরণ স্বরূপ যদি S কাঠামোর ঘড়ির সময় প্রথমে 7টা ও 8টার মধ্যে নেওয়া হয় এবং পরে 9টা ও 10টার মধ্যে নেওয়া হয় তা হলে S′ কাঠামোর ঘড়ি অনুযায়ী কালের অন্তরে পার্থক্য হবে।

লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণের বিভিন্ন রকম প্রমাণ সম্বলিত প্রবন্ধ ও বই এর তালিকার জন্য Arzelies : Relativistic Kinematics (Pergamon 1966) এবং V. Berzi and V. Gorini—J. Math. Phys. **10**, 1518—24 (1969) দেখুন।

আমরা কার্টেজীয় কাঠামো ব্যবহার করেছি। অতএব $y$ ও $z$ অক্ষ $x$ অক্ষের উপর লম্ব, অনুরূপে $y'$ ও $z'$ অক্ষ $x'$ অক্ষের উপর লম্ব। এখানে প্রথমোক্ত কোণগুলির পরিমাপ করেছে S কাঠামোর নিরীক্ষক এবং শেষোক্ত কোণগুলির ক্ষেত্রে S' কাঠামোর নিরীক্ষক। এখন $y'$, $x'$ এর উপর লম্ব হলেই যে $x$ এর উপর লম্ব হবে এটা বিনা প্রমাণে সিদ্ধ নয় কারণ ঐ দুটি কোণের দুই কাঠামোর নিরীক্ষক পরিমাপ করেছে। মনে করা যাক যে S কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে $y'$, $x$ এর সঙ্গে সূক্ষ্ম কোণ উৎপন্ন করে। এবার $x$, $z$ এবং $x'$, $z'$ এর ঋণাত্মক




চিত্র 3-2

দিকগুলিকে ধণাত্মক বলে ধরা যাক। তা হলে দুটি কাঠামোই দক্ষিণাবর্তে থাকবে। এখন $y'$, $x$ এর সংগে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে কারণ এখন S কাঠামো S' কাঠামোর $x'$ অক্ষের দিকে সচল। অতএব ধনাত্মক $x$ অক্ষের দিকে সচল কাঠামোর অক্ষগুলির মধ্যের কোণ কম বলে মনে হবে এবং ঋণাত্মক $x$ এর দিকে সচল কাঠামোর অক্ষগুলির মধ্যস্থিত কোণকে বেশী বলে মনে হবে। তা থেকে জাড্যিক কাঠামোর গতির দিক চরমভাবে নির্ণয় করা যাবে এবং $x$ অক্ষের দুই দিকের মধ্যে কোন প্রতিসাম্য থাকবে না। এটি প্রথম স্বীকার্যের পরিপন্থী, অতএব গ্রহণীয় নয়।[1] কাজেই $y'$ $x$ এর সঙ্গে সমকোণ উৎপন্ন করে। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $z'$ ও $x$, $x'$ ও $y$, $x'$ ও $z$, $y'$ ও $z$ এবং $z'$ ও $y$ এর মধ্যে কোণগুলি সব ক্ষেত্রেই সমকোণ। অতএব $a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=o$। অতএব সমীকরণ (3—3) দাঁড়ায়ঃ

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{14}t \\ y' &= a_{22}y \\ z' &= a_{33}z \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned}\right\} \quad (3-4)$$

এখন সমীকরণ সমষ্টি ( 3 – 4 ) এর বিপরীত সমীকরণ সমষ্টি লিখব, অর্থাৎ $x$, $y$, $z$ ও $t$ কে $x'$, $y'$, $z'$ ও $t'$ সম্বলিত রাশির সমষ্টি হিসাবে লিখবঃ

1 কোন কোন লেখক অপর একটি স্বতঃসিদ্ধের উল্লেখ করেন। এতে বলা হয় যে, দেশের সকল দিক সমতুল্য।

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta^{-1}(a_{22}a_{33}a_{44}x' + a_{14}a_{33}a_{42}y' + a_{14}a_{22}a_{43}z' \\ &\quad - a_{14}a_{22}a_{33}t') \\ y &= a_{22}^{-1}y' \\ z &= a_{33}^{-1}z' \\ t &= \Delta^{-1}(-a_{22}a_{33}a_{41}x' - a_{11}a_{33}a_{42}y' \\ &\quad - a_{11}a_{22}a_{43}z' + a_{11}a_{22}a_{33}t') \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}5)$$

যেখানে $\Delta = a_{22}a_{33}(a_{11}a_{44} - a_{41}a_{14})$ (3-6)

এটি সমীকরণ (3-4) এর ছক।

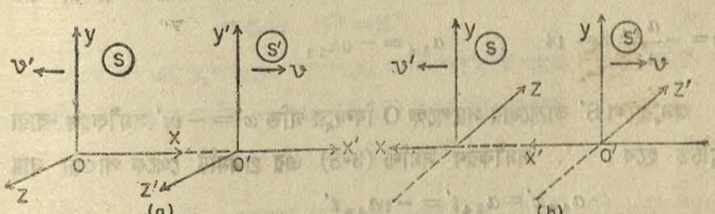
আমাদের স্বীকার্য 1 (আপেক্ষিকতা স্বীকার্য) অনুযায়ী সকল জাড্যিক কাঠামো সমতুল্য। অতএব সমীকরণ সমষ্টি (3-4) ও (3-5) একই প্রকারের হবে। কিন্তু দেখা যাচ্ছে যে (3-4) এর প্রথম সমীকরণে $y$ ও $z$ সম্বলিত রাশি নেই কিন্তু (3-5) এর প্রথম সমীকরণে $y'$ ও $z'$ সম্বলিত রাশি আছে। এই দু'টি সমীকরণকে এক ধরণের করতে হলে $a_{42} = a_{43} = 0$ হবে।

অতএব
$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{14}t \\ y' &= a_{22}y \\ z' &= a_{33}z \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}7)$$

এবং
$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta^{-1}(a_{22}a_{33}a_{44}x') - \Delta^{-1}(a_{14}a_{22}a_{33}t') \\ y &= a_{22}^{-1}y \\ z &= a_{33}^{-1}z \\ t &= \Delta^{-1}(-a_{22}a_{33}a_{41}x') + \Delta^{-1}(a_{11}a_{22}a_{33}t') \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}8)$$

এখানে সহগ $a_{ik}$ ও $a_{ik}'$ গুলি আপেক্ষিক বেগ এর উপর নির্ভর করবে এবং $\Delta$ সমীকরণ (3-6) থেকে পাওয়া যায়।

S কাঠামোর নিরীক্ষক মনে করবে যে S' কাঠামোর মূল বিন্দু $x$ অক্ষের




চিত্র 3—3

দিকে $+v$ বেগে সচল এবং S' কাঠামোর নিরীক্ষক মনে করবে যে, S কাঠামোর মূলবিন্দু $x'$ অক্ষের সমান্তরাল $-v$ বেগে সচল। এটা প্রমাণ করা

যায় এই ভাবে। মনে করা যাক যে, এটা সত্য নয় এবং S কাঠামোর সাপেক্ষে O′ বিন্দুর বেগ $+v$ এবং S′ কাঠামোর সাপেক্ষে O বিন্দুর বেগ $-v'$ (চিত্র 3-3 (a))। এবার পূর্বের মত $x$ ও $z$ এবং $x'$ ও $z'$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকগুলিকে ধণাত্মক ধরা যাক (চিত্র 3-3 (b))। এ ক্ষেত্রে S ও S′ কাঠামো তাদের ভূমিকা বিনিময় করেছে কারণ এখন S কাঠামো S′ এর সাপেক্ষে $x'$ অক্ষের সমান্তরাল $+v$ বেগে সচল। কাজেই পূর্বে $v'>v$ হলে এখন হবে $v<v'$ এবং বিপরীত ক্ষেত্রেও তাই। অতএব $\frac{v}{v'}=\frac{v'}{v}$

অর্থাৎ $v=v'$

কাজেই আমরা প্রমাণ করলাম যে, S′ কাঠামো S এর সাপেক্ষে $-v$ বেগে সচল।[1]

এবার একক দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডকে S কাঠামোর $y$ অক্ষকে আচ্ছাদিত করে এমনভাবে রাখা হোক যেন তার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় $y=0$ ও 1 এর সঙ্গে সমস্থানিক। S′ কাঠামোর দণ্ডটির দৈর্ঘ্য হবে $y'=a_{22}, \frac{y'}{y}=a_{22}$। অর্থাৎ পূর্বের ন্যায় $x$ ও $z$ এবং $x'$ ও $z'$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকগুলিকে ধনাত্মক ধরলে পাই $\frac{y}{y'}=a_{22}$। অতএব $(a_{22})^2=1$. যেহেতু $y$ ও $y'$ এর ধনাত্মক অংশগুলি একই দিকে অতএব $a_{22}=1$, অনুরূপে $a_{33}=1$। S কাঠামোর সাপেক্ষে O′ বিন্দুর গতি $x=vt$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত হবে। সমীকরণ সমষ্টি (3-7) এর প্রথমটিতে $x'=0$ প্রতিস্থাপিত করলে পাওয়া যায়

$$x=-\frac{a_{14}}{a_{11}}t=vt \quad \therefore \quad a_{14}=-va_{11}$$

অনুরূপে S′ কাঠামোর সাপেক্ষে O বিন্দুর গতি $x'=-vt'$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত হবে। ∴ সমীকরণ সমষ্টি (3-8) এর প্রথমটি থেকে পাওয়া যায়

$$a_{44}x'=a_{14}t'=-va_{44}t'$$

$$\therefore \quad a_{14}=-va_{44}, \quad \text{অর্থাৎ } a_{11}=a_{44}=a \text{ (ধরুন)}$$

1 দেশের সমসত্ত্বতা ও দিক নিরপেক্ষতা ধরে নিয়েও এটা প্রমাণ করা যায়। V. Berzi and V. Gorini—J. Math. Phys. 10, 1518—24 (1969) দেখুন।

অতএব সমীকরণ সমষ্টি (3-7) ও (3-8) থেকে পাওয়া যায়

$$\left.\begin{aligned} x' &= a(x-vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= a_{41}x+at \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}9)$$

এবার আমরা স্বীকার্য 2 ব্যবহার করব। মনে করা যাক্ যে, একটি আলোক সংকেত S ও S′ কাঠামোর সমস্থানিক মূলবিন্দু থেকে $t=t'=0$ কালাংকে যাত্রা শুরু করে। S কাঠামোয় তরঙ্গ মুখের সমীকরণ হবে

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \qquad (3\text{-}10)$$

অনুরূপে S′ কাঠামোয় তরঙ্গ-মুখের সমীকরণ হবে

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \qquad (3\text{-}11)$$

এবার ধরা যাক যে

$$S^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \qquad (3\text{-}12)$$

$$S'^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \qquad (3\text{-}13)$$

কাজেই যে চলসমষ্টি $(x, y, z, t)$ র জন্য $S^2=0$, সংশ্লিষ্ট চলসমষ্টি $(x', y', z', t')$ র জন্য $S'^2=0$ হবে। যেহেতু এই দুই চলসমষ্টির মধ্যে সম্পর্ক রৈখিক, এটা সম্ভব শুধু যখন $S^2$ ও $S'^2$ অনুপাতী। অতএব

$$S'^2=k(v)\,S^2 \qquad (3\text{-}14)$$

যেখানে $k$ একটি ধ্রুবসংখ্যা এবং শুধু আপেক্ষিক বেগ $v$ এর উপর নির্ভর করে। পূর্বের ন্যায় আপেক্ষিকতার যুক্তিতে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে,

$$k=1$$

$$\text{অতএব} \quad S'^2=S^2 \qquad (3\text{-}15)$$

অর্থাৎ $S^2$ এই রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় থাকে। এখন (3-9) এর দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণ এবং (3-15) থেকে পাওয়া যায়

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2 \qquad (3\text{-}16)$$

(3-9) এর প্রথম ও চতুর্থ সমীকরণ ব্যবহার করলে (3-16) থেকে পাওয়া যায়

$$x^2-c^2t^2=(a^2-c^2a_{41}{}^2)x^2-c^2a^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t^2-2axt\times(av+a_{41}c^2) \qquad (3-17)$$

যেহেতু এই সমীকরণে অনধীন চলদ্বয় $x$ ও $t$ এর সকল মানের জন্য সত্য অতএব $x^2$, $t^2$ ও $x\,t$ র উভয় দিকের সহগগুলি সমান হবে। অর্থাৎ

$$a=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},\ a_{41}=-\frac{av}{c^2}=\frac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (3\text{—}18)$$

অতএব সমীকরণ (3-9) এর রূপ হবে

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ y'=y,\ z'=z,\ t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (3\text{—}19)$$

এইভাবে আমরা পুনরায় লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ পাই।

এখন সমীকরণ (3-6) থেকে পাওয়া যাবে

$$\Delta=a^2-\frac{v^2a^2}{c^2}=a^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1 \quad (3\text{—}20$$

অতএব (3-19) র বিপরীত সমীকরণ হবে

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ y=y',\ z=z',\ t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (3\text{—}21)$$

সমীকরণ (3-19) এ $v$ র স্থানে $-v$ প্রতিস্থাপিত করলে এবং ড্যাশযুক্ত ও ড্যাশবিহীন চিহ্নগুলি বিনিময় করলে সমীকরণ (3-21) পাওয়া যাবে। এটা প্রত্যাশিত কারণ $S$ কাঠামো $S'$ এর সাপেক্ষে $-v$ বেগে সচল।

*** 3-2. আইনষ্টাইনের দ্বিতীয় স্বীকার্য ব্যতিরেকে রূপান্তর সমীকরণ :** আমরা এখন দেখব, দ্বিতীয় স্বীকার্য ব্যবহার না করে রূপান্তর সমীকরণের কতখানি প্রমাণ করা যায়। এই ধরণের প্রথম চেষ্টা করেন ইগনাটোভ্স্কি এবং তার পর ফ্রাঙ্ক রথে।[1] আমরা দেখেছি যে প্রথম স্বীকার্য ব্যবহার করে সমীকরণ (3-9) পর্যন্ত প্রমাণ করা যায়। সমীকরণ (3-6) থেকে পাওয়া যায়

1. W. V. Ignatowski—Physik. Zeitschr. **11**, 972 (1910). P. Frank and H. Rothe : Ann, d. Physik **34**, 825-55 (1911)। তাঁরা আপেক্ষিকতা (প্রথম) স্বীকার্য এবং অন্য দুটি নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধের উপর ভিত্তি করে রূপান্তর সমীকরণ নির্ণয় করেন : দেশ-কালাত্মক রূপান্তরগুলি একটি রৈখিক সমসত্ব গ্রুপের সৃষ্টি করে, (2) দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন কেবল দুটি কাঠামোর আপেক্ষিক বেগের উপর নির্ভর করে।

$$\Delta = a\,(a + a_{41}\,v) \tag{3—22}$$

সমীকরণ (3-9) এর বিপরীত সমীকরণ হবে :

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+a_{41}v)^{-1}x' + v(a+a_{41}v)^{-1}t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= -a_{41}a^{-1}(a+a_{41}v)^{-1}x' + (a+a_{41}v)^{-1}t' \end{aligned}\right\} \tag{3—23}$$

সহগগুলি সকলে আপেক্ষিক বেগ $v$ র উপর নির্ভর করে। যেহেতু সকল কাঠামোই সমতুল্য, অতএব সমীকরণ (3-9) থেকে (3-23) পাওয়া যায় $v$ র স্থানে $-v$ প্রতিস্থাপিত করলে। কাজেই আমরা নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি পাই :

$$a(-v) = (a(v) + a_{41}(v)v)^{-1} \tag{3—24}$$

$$a_{41}(-v) = -a_{41}(v)a(v)^{-1}(a(v) + a_{41}(v)v)^{-1} \tag{3—25}$$

সমীকরণ (3-24) ও (3-25) থেকে আমরা পাই

$$\frac{a_{41}(-v)}{a_{41}(v)} = -\frac{a(-v)}{a(v)} \tag{3—26}$$

এখন আমরা প্রমাণ করব যে, $a(v)$ বেগের যুগ্ম অপেক্ষক। মনে করা যাক যে, $S$ কাঠামোর নিরীক্ষক একটি দণ্ড $A'B'$ এর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ করছে। $A'B'$ $S'$ কাঠামোয় স্থির আছে। $S$ কাঠামোর নিরীক্ষক যুগপৎ $A'B'$ এর দুই প্রান্ত-বিন্দুর অবস্থান লক্ষ করে। মনে করা যাক এই দুই বিন্দুর দেশাঙ্ক $x_1$ ও $x_2$ তাহলে (3-9) এর প্রথম সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$x_2' - x_1' = a(x_2 - x_1)$$

অর্থাৎ $l_0 = a(v)l,$ (3—27)

যেখানে $l_0$ দণ্ডটির প্রকৃত দৈর্ঘ্য, অর্থাৎ যে কাঠামোতে দণ্ডটি স্থির থাকে সেই কাঠামোয় তার দৈর্ঘ্য, $l$ $S$ কাঠামোর দর্শকের নির্ণীত দৈর্ঘ্য। এখন যদি $S'$ কাঠামো $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে একই বেগে বিপরীত দিকে চলে তা হলে $S$ কাঠামোর নিরীক্ষক দুই প্রান্ত বিন্দুর দেশাঙ্ক $\bar{x}_1$ ও $\bar{x}_2$ নির্ণয় করবে। এবার

$$x_2' - x_1' = a(-v)(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$$

অর্থাৎ $l_0 = a(-v)\bar{l}$ (3—28)

যেহেতু দেশ দিক নিরপেক্ষ, অতএব দণ্ডের দৈর্ঘ্য তার গতির দিকের উপর নির্ভর করবে না। অতএব $l = \bar{l}$ কাজেই

সমীকরণে $t$ এর সহগ ঋণাত্মক হবে। কাজেই $x=0$ হলে $t$ এর ধনাত্মক মানের জন্য $t'$ ঋণাত্মক হবে। তবে S কাঠামোর দেশের মূলবিন্দুর সংশ্লিষ্ট ঘটনাগুলির জন্য S' কাঠামোয় ঘটনাক্রম বিপরীত হবে। অর্থাৎ S কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে দু'টি ঘটনার যেটি প্রথমে ঘটেছে বলে মনে হবে সেটি S' কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে পরে ঘটেছে বলে মনে হবে। অতএব দ্বিতীয় ঘটনাটির কারণ যদি প্রথম ঘটনাটি হয় তা হলে S' কাঠামোয় কার্যের পরে কারণ ঘটেছে বলে মনে হবে। উদাহরণ স্বরূপ ধরা যাক যে, S কাঠামোর নিরীক্ষক একটি হাতবোমা ছুঁড়ল এবং তারপর সেটির বিস্ফোরণ ঘটল। S' কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে বিস্ফোরণ পূর্বে ঘটবে এবং হাতবোমা পরে ছোঁড়া হবে। কাজেই কার্যকারণ সূত্র এখানে সত্য হবে না। এইজন্য আমরা এ সম্ভাবনাকে বাদ দেব, নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী :

স্বতঃসিদ্ধ 3. দু'টি ঘটনার মধ্যে কার্যকারণ সম্পর্ক থাকলে, সকল জাড্যিক কাঠামোয় কারণ কার্যের পূর্বে ঘটবে।

কাজেই একমাত্র সম্ভাবনা হচ্ছে, যেখানে $V^2$ সসীম ধনাত্মক রাশি। এখন অপর একটি কাঠামো S" নেওয়া হোক, যেটি S' কাঠামোর সাপেক্ষে $x'$ অক্ষের দিকে $u$ বেগে সচল। মনে করা যাক যে, S' ও S" এর মধ্যে রূপান্তর সমীকরণ হবে

$$x''=a(u)\,(x'-ut'),\ y''=y',\ z''=z',\ t''=a(u)\left(t'-\frac{u}{U^2}x'\right)$$

সমীকরণ (3—36) থেকে (3—4 ) এ প্রতিস্থাপিত করলে পাওয়া যাবে :

$$x''=a(u)\left[a\,(v)\,(x-vt)-a(v)\,u\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)\right]$$

$$=a(v)\,a(u)\left[x\left(1+\frac{uv}{V^2}\right)-(u+v)\,t\right]$$

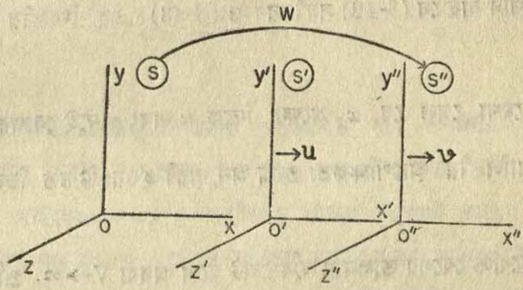
$$=a(v)\,a(u)\left(1+\frac{uv}{V^2}\right)\left\{x-\frac{u+v}{1+\frac{uv}{V^2}}t\right\} \qquad (3\text{—}41)$$

$$t''=a\,(u)\left[a\,(v)\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)-\frac{ua(v)}{U^2}\,(x-vt)\right]$$

$$= a(v)\ a(u)\left[t\left(1+\frac{uv}{V^2}\right)-\left(\frac{u}{U^2}+\frac{v}{V^2}\right)x\right]$$

$$= a(v)\ a(u)\left(1+\frac{uv}{U^2}\right)\left\{t-\frac{\frac{u}{U^2}+\frac{v}{V^2}}{1+\frac{uv}{U^2}}x\right\} \qquad (3—42)$$

যেহেতু S এবং S″ উভয়েই জাড্যিক কাঠামো, অতএব S ও S″ কাঠামোর




চিত্র 3-5

মধ্যে রূপান্তর সমীকরণ (3—41) ও (3—42) লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ থেকে অভিন্ন হবে।[1] সেটা সম্ভব কেবলমাত্র তখনই যখন $U^2 = V^2$। অতএব সকল রূপান্তর সমীকরণেই $V^2$ থাকবে। কাজেই সকল জাড্যিক কাঠামোর সর্বোচ্চ বেগের মান সমান হবে। সমীকরণ (3—41) এবং (3—42) যদি লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর থেকে অভিন্ন হয় এবং $S$ ও $S''$ কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ $w$ দ্বারা সূচিত হয় তা হলে

$$x'' = a(w)(x - wt),\ t'' = a(w)\left(t - \frac{w}{V^2}x\right) \qquad (3—43)$$

সমীকরণ (3-41) এর সঙ্গে (3-43) এর প্রথম সমীকরণের তুলনা করলে পাওয়া যায়

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{V^2}} \qquad (3—44)$$

---

1. দেশ-কালাঙ্ক রূপান্তরগুলির গ্রুপ সৃষ্টি করার একটি শর্ত হল যে, দুটি রূপান্তরের সংযোজনের ফলে একই ধরণের অপর একটি রূপান্তর পাওয়া যাবে।

কারণ

$$a(w) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{V^2}}}, = \frac{1+\frac{uv}{V^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$= a(u)a(v) \left(1+\frac{uv}{V^2}\right)$$

অনুরূপে দেখান যায় যে (3-42) সমীকরণ ও (3-43) এর দ্বিতীয় সমীকরণ অভিন্ন।

কাজেই দেখা গেল যে, $x$ অক্ষের দিকে $u$ এবং $v$ দুই বেগের লব্ধি হয় $\frac{u+v}{1+\frac{uv}{V^2}}$। গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী হওয়া উচিত ছিল $u+v$।

$u$ এবং $v$ সর্বোচ্চ বেগের তুলনায় খুব ছোট হলে অথবা $V \to \infty$ প্রতিস্থাপিত করলে পুরাতন গালিলীয় সূত্র পাওয়া যায়। যদি $u = V$ হয় তা হলে

$$w = \frac{V+v}{1+\frac{v}{V}} = V$$

অতএব সর্বোচ্চ বেগের সঙ্গে যে কোন বেগ যোগ করলে লব্ধি V থাকে অর্থাৎ সর্বোচ্চ বেগ অপরিবর্তিত থাকে। অতএব সব কাঠামোতেই সর্বোচ্চ বেগ অভিন্ন, অর্থাৎ এটা কাঠামো নিরপেক্ষ যা আমরা পূর্বেই প্রমাণ করেছি।

এতদূর আমরা আইনষ্টাইনের দ্বিতীয় স্বীকার্য ব্যবহার না করেই প্রমাণ করতে পারি। কিন্তু V এর মান কত হবে তা আমরা জানতে পারি না। এই মান জানতে হলে বৈজ্ঞানিক পরীক্ষা করে তা নির্ণয় করতে হবে। দ্বিতীয় স্বীকার্য সেই পরীক্ষার ফল। এ থেকে আমরা জানি যে, আলোর শূন্যস্থানের বেগই V অর্থাৎ সর্বোচ্চ বেগের সমান। ফ্রাঙ্ক এবং রথে 1911 খৃষ্টাব্দে প্রথম স্বীকার্য থেকে উপরোক্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হন। সমীকরণ (3—44) এ $V^2 = c^2$ প্রতিস্থাপিত করলে পাওয়া যায়

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \qquad (3\text{—}45)$$

এটিকে 'আইনষ্টাইনের বেগ সংযোজন সূত্র' বলা হয়। এটি দ্বারা একই সরলরেখার সমান্তরাল দু'টি বেগের লব্ধি নির্ণয় করা যায়। আমরা ভবিষ্যতে বিভিন্ন দিকের বেগের সংযোজন সূত্র নিয়ে আলোচনা করব।

এখন যদি $u$ বা $v$ দু'টি বেগের মধ্যে একটি বা উভয়েই $c$ অথবা আলোর শূন্যের বেগের সমান হয় তা হলে লব্ধি $c$ এর সমান হবে।

$$u=c,\ w=\frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}}=c\ ;\quad v=c,\ w=\frac{u+c}{1+\frac{uc}{c^2}}=c\ ;$$

$$u=c,\ v=c,\qquad w=\frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}}=c$$

এটি আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বিতীয় স্বীকার্যের সঙ্গে সামঞ্জস্য সম্পন্ন, কারণ সকল কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে আলোর শূন্যের বেগ সমান হবে।

কাজেই মাইকেলসন-মর্লের পরীক্ষার ফলের সহজেই ব্যাখ্যা করা যায়। আলোর বেগ বায়ুর মধ্যে $c$ ধরলে ব্যতিচার মাপকের বাহুগুলির সাপেক্ষে তার বেগ সব সময় $c$ হবে, কাজেই ব্যতিচার নকশার অপসরণের কোন প্রশ্নই উঠে না।

গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী আমরা দু'টি $c$ র চেয়ে কম বেগের সংযোজন দ্বারা $c$ র চেয়ে বেশী বেগ পেতে পারি। উদাহরণ স্বরূপ $u=\frac{2}{3}c$ এবং $v=\frac{2}{3}c$ নিলে লব্ধি হবে $w=\frac{4}{3}c$। কিন্তু আইনষ্টাইনের সূত্র অনুযায়ী

$$w=\frac{\frac{2}{3}c+\frac{2}{3}c}{1+\frac{4}{9}}=\frac{12}{13}c$$

অর্থাৎ $c$ র চেয়ে কম। এখন আমরা লিখতে পারি

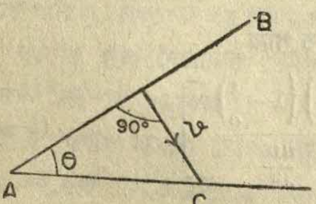
$$\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}=c\left[1-\frac{\left(1-\frac{u}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)}{1+\frac{uv}{c^2}}\right] \qquad (3\text{—}46)$$

যদি $u<c$ এবং $v<c$ হয় তা হলে $\frac{u}{c}<1$, $\frac{v}{c}<1$, অতএব $\left(1-\frac{u}{c}\right)<1$ এবং $\left(1-\frac{v}{c}\right)<1$ এবং $1+\frac{uv}{c^2}>1$ অতএব সমীকরণ (3—46) এর

ডানদিকে বন্ধনীর ভিতরের দ্বিতীয় রাশি একের চেয়ে ছোট। অতএব এই দুই বেগের লব্ধি সব সময় $c$ এর চেয়ে কম হবে। অতএব কোন কাঠামোর সাপেক্ষেই একটি বস্তুকণার বেগ আলোর শূন্যের বেগের সমান হতে পারে না। অতএব $c$ সর্বোচ্চ বেগ।

কোন বস্তুর প্রতিসরাঙ্ক $n$ হলে আলোর তরঙ্গ তত্ত্ব অনুযায়ী সেই বস্তুমাধ্যমের ভিতর আলোর বেগ হবে $\frac{c}{n}$। অধিকাংশ বস্তুর প্রতিসরাঙ্ক $n>1$ তবে কিছু কিছু বস্তুর প্রতিসরাঙ্ক একের চেয়ে কমও হয় যেমন আয়নিত মাধ্যমে রেডিও তরঙ্গের ক্ষেত্রে। সে ক্ষেত্রে ঐ বস্তু মাধ্যমের ভিতর আলোর বেগ $c$ এর চেয়ে বেশী হবে। কিন্তু এটা তরঙ্গ দশার বেগ। কিন্তু এই বেগে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে কোন সংকেত প্রেরণ করা যায় না। একরঙা আলোক তরঙ্গের সকল স্থান এক ধরণের এবং তাতে কোন চিহ্ন দেওয়া সম্ভব নয়। কাজেই এক রঙা আলোক তরঙ্গদ্বারা কোন সংকেত প্রেরণ করা সম্ভব নয়। সংকেত প্রেরণের জন্য বিভিন্ন কম্পমান বিশিষ্ট একটি তরঙ্গগুচ্ছের প্রয়োজন। এই তরঙ্গগুচ্ছের বেগকে গ্রুপ বেগ বলা হয়। যে সমস্ত বস্তু মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক একের চেয়ে কম সে ক্ষেত্রে সমারফেল্ড (Sommerfeld) দেখান যে, দশার বেগ $c$ র চেয়ে বেশী হলেও গ্রুপ বেগ $c$ র চেয়ে কম। কাজেই কোন সংকেত প্রেরণের সর্বোচ্চ বেগ এ ক্ষেত্রেও $c$.

যেমন তরঙ্গ দশার বেগ $c$ র চেয়ে বেশী হতে পারে তেমন অন্য ধরণের জ্যামিতিক বেগ ও $c$ র চেয়ে বেশী হতে পারে। মনে করা যাক যে, একটি পরিমাপ কাঠামোয় স্থির দু'টি আলোর উৎস আছে, একটি বাঁ দিকে এবং অন্যটি ডান দিকে। তারা যদি পরস্পরের দিকে আলোক সংকেত $\pm c$ বেগে প্রেরণ করে তা হলে ঐ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে মনে হবে যে ঐ দুই আলোক সংকেত পরস্পরের দিকে $2c$ বেগ নিয়ে ছুটে চলেছে। কিন্তু তাদের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ $c$। এখন মনে করা

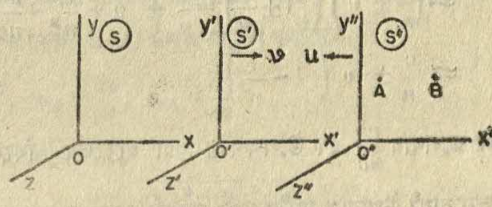



চিত্র 3-6

যাক যে AB ও AC ( চিত্র 3-6 ) দু'টি দীর্ঘ দণ্ড এবং A তাদের

ছেদ বিন্দু এবং তাদের মধ্যে উৎপন্ন কোণ $\theta$ খুব ছোট। AB যদি তার দৈর্ঘ্যের লম্ব দিকে $v$ বেগ নিয়ে ছুটে চলে তা হলে AB ও AC র ছেদ বিন্দুর বেগ হবে $\frac{v}{\sin\theta}$। $\theta$ কে যত ছোট করা যাবে ছেদ বিন্দুর বেগও তত বেশী হবে। কাজেই ছেদ বিন্দুর বেগ অসীম হওয়া সম্ভব কিন্তু এটি কোন সংকেত বা শক্তি প্রেরণ করে না, এটি পরিপূর্ণভাবে জ্যামিতিক বেগ। গতিশীল দণ্ডের ভরবেগ ও শক্তি স্থানান্তরিত হয় $v$ বেগে যা সব সময় $c$ র চেয়ে কম। কোয়ান্টাম তত্ত্বেও জড় বস্তুর দ্যব্রয়ী ( De Broglie ) তরঙ্গের বেগ $c$ র চেয়ে বেশী কিন্তু এটিও কাল্পনিক বা গাণিতিক বেগ, সংকেত প্রেরণ করে না।

যদি মনে করা যায় যে, $S'$ কাঠামোর ( চিত্র 3-7 ) সাপেক্ষে একটি সংকেত এক স্থান থেকে অন্য স্থানে $c$ র বেশী বেগে প্রেরিত হয় তা হলে আমরা এই সংকেতের সাপেক্ষে অচল একটি কাঠামো $S''$ নিতে পারি। $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে এই সংকেতের বেগ ( বামদিকে ) $u > c$। $S'$ কাঠামো $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে ( ডানদিকে ) $v$ বেগে সচল হলে $S$ কাঠামোর দর্শকের কাছে $S''$ এর বেগ অর্থাৎ সংকেতের বেগ হবে




চিত্র 3-7

$$w = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \qquad (3\text{—}47)$$

যদি $\frac{v}{c} < 1$ এবং $\frac{u}{c} > 1$ হয় তা হলে $u - v$ সব সময়ে ধনাত্মক। কাজেই $w$ কে ঋণাত্মক হতে হলে $\frac{uv}{c^2} > 1$ হতে হবে। অর্থাৎ $\frac{v}{c} > \frac{c}{u}$ কাজেই $\frac{c}{u} < \frac{v}{c} < 1$ হলে $w$ ঋণাত্মক। কাজেই $S'$ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে সংকেতটি $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে $c$ র চেয়ে বেশী বেগে প্রেরিত হলে $S$ কাঠামোর

নিরীক্ষকের কাছে সেটি $x$ এর ঋণাত্মক দিকে প্রেরিত হয়েছে বলে মনে হবে। কাজেই $S'$ কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে A সংকেত প্রেরক এবং B গ্রাহক যন্ত্র বলে মনে হলে $S$ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে B প্রেরক এবং A গ্রাহক যন্ত্র বলে মনে হবে। কাজেই তার কাছে কার্য কারণের পূর্বে ঘটেছে বলে মনে হবে। এটা স্বতঃসিদ্ধ 3 এর পরিপন্থী। অতএব বলা হয় যে $c$ র চেয়ে বেশী বেগে সংকেত বা সংবাদ প্রেরণ সম্ভব নয়।

লক্ষণীয় যে, আলোর শূন্যের বেগ কাঠামো নিরপেক্ষ কিন্তু কোন বস্তু মাধ্যমের মধ্যে আলোর বেগ কাঠামো নিরপেক্ষ নয়। যদি $u=\frac{c}{n}$ হয় তা হলে তার সঙ্গে $\pm v$ বেগ সংযোজন করলে লব্ধি গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সূত্র অনুযায়ী $\frac{c}{n} \pm v$ হবে না। সমীকরণ (3-45) অনুযায়ী

$$w=\frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{cv}{nc^2}} = \left(\frac{c}{n} \pm v\right)\left(1 \pm \frac{v}{nc}\right)^{-1}$$

$$\simeq\left(\frac{c}{n} \pm v\right)\left(1 \pm \frac{v}{nc}\right) = \frac{c}{n} \pm v \mp \frac{v}{n^2} - \frac{v^2}{nc}$$

$$\simeq \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (3\text{—}48)$$

এখানে $\frac{c}{n}$ এর তুলনায় $\frac{v^2}{nc}$ কে উপেক্ষণীয় ধরা হয়েছে। ফিজোর পরীক্ষা (পৃষ্ঠা ৩২) অনুযায়ী উপরোক্ত সমীকরণের সত্যতা প্রমাণিত হয়েছে। কাজেই ফিজোর পরীক্ষার ফল আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সঙ্গে সামঞ্জস্য সম্পন্ন। উপরোক্ত সমীকরণ (3-48) সত্য হলে এয়ারি, আরাগো, মাস্কার্ত, জামাঁ ও হ্যোকের পরীক্ষার ফলেরও ব্যাখ্যা মেলে।

বিচ্ছুরক মাধ্যমের ক্ষেত্রে সমীকরণ (3-48) এর ডান দিকে একটি সংশোধক রাশির প্রয়োজন। লোরেন্ট্স্ 1895 খৃীষ্টাব্দেই এই দিকে সকলের দৃষ্টি আকর্ষণ করেন। বিচ্ছুরক মাধ্যমের প্রতিসরাংক আলোর তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে এবং আলোর উৎসের সাপেক্ষে নিরীক্ষক গতিশীল হলে আলোর আপাত তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $\lambda$ এই আপেক্ষিক বেগের উপর নির্ভর করে। যদি $\lambda$ $S$

কাঠামোর নিরীক্ষক দ্বারা নির্ণীত তরঙ্গ দৈর্ঘ্য হয় তা হলে $S'$ কাঠামোয় আপাত তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $\lambda'$ ডপলার প্রক্রিয়ার সূত্র অনুযায়ী হবে

$$\lambda'=\lambda\left(1\pm\frac{nv}{c}\right) \tag{3-49}$$

আমরা ডপলার প্রক্রিয়ার আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা পরে দেব। এখন শুধু $\frac{v}{c}$ র প্রথম ঘাত পর্যন্ত ধরলে পাই

$$\frac{c}{n(\lambda')}\simeq\frac{c}{n(\lambda)\pm\lambda\frac{nv}{c}\frac{dn}{d\lambda}}\simeq\frac{c}{n}\left(1\mp\frac{\lambda v}{c}\frac{dn}{d\lambda}\right)$$

$$=\frac{c}{n}\mp\frac{\lambda v}{n}\frac{dn}{d\lambda} \tag{3-50}$$

অতএব সমীকরণ (3-50) থেকে সমীকরণ (3-48) এ প্রতিস্থাপিত করলে পাই

$$w=\frac{c}{n}\pm\quad\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) \tag{3-51}$$

1915 খৃষ্টাব্দে জীমান (Zeeman) পরীক্ষাদ্বারা এই অতিরিক্ত রাশির অস্তিত্ব প্রমাণ করেন।

3-3. **বস্তুকণার বেগের রূপান্তর সূত্র**—$S$ কাঠামোর সাপেক্ষে একটি বস্তুকণার বেগ ভেক্টর **u** এর উপাংশগুলি যথাক্রমে

$$u_x=\frac{dx}{dt},\quad u_y=\frac{dy}{dt},\quad u_z=\frac{dz}{dt} \tag{3—52}$$

বস্তুকণার বেগের মান

$$u=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2} \tag{3—53}$$

অনুরূপে $s'$ কাঠামোর সাপেক্ষে বস্তুকণার বেগ ভেক্টর **u'** এর উপাংশগুলি যথাক্রমে

$$u_x'=\frac{dx'}{dt'},\quad u_y'=\frac{dy'}{dt'}\ \text{এবং}\ u_z'=\frac{dz'}{dt'} \tag{3—54}$$

এবং বেগের মান

$$u'=\sqrt{u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2} \tag{3—55}$$

লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ (3—19) এর ব্যবকলনের ফলে আমরা পাই

$$dx'=\gamma(dx-vdt),\quad dy'=dy,\ dz'=dz,$$

$$dt'=\gamma\left(dt-\frac{vdx}{c^2}\right), \tag{3—56}$$

যেখানে $\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

অতএব $u_x'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx-vdt}{dt-\frac{vdx}{c^2}}$

লব ও হরকে $dt$ দ্বারা ভাগ করলে পাই

$$u_x'=\frac{\frac{dx}{dt}-v}{1-\frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}=\frac{u_x-v}{1-\frac{u_xv}{c^2}} \qquad (3—57a)$$

অনুরূপে $u_y'=\frac{dy'}{dt'}=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\,u_y}{1-\frac{u_xv}{c^2}}$ (3—57b)

এবং $u_z'=\frac{dz'}{dt'}=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\,u_z}{1-\frac{u_xv}{c^2}}$ (3—57c)

এখানে লক্ষ করার বিষয় যে, $S$ ও $S'$ কাঠামোর আপেক্ষিক বেগের সমকোণে অবস্থিত দৈর্ঘ্য $dy=dy'$ এবং $dz=dz'$। কিন্তু বেগের $y$ ও $z$ উপাংশগুলি সমান নয়। তার কারণ $dt\neq dt'$ অর্থাৎ $S$ ও $S'$ কাঠামোর ঘড়ির চলার হার এক নয়। কাল প্রসারণের জন্য $\sqrt{1-v^2/c^2}$ দ্বারা $u_y$ ও $u_z$ কে গুণ করতে হয়। যদি $c$ র তুলনায় $u$ এবং $v$ খুব ছোট হয় তা হলে

$u_x'\to u_x-v$, $u_y'\to u_y$ এবং $u_z'\to u_z$

এটি গালিলীয় রূপান্তর সূত্রের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

এখন $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে বেগ $u'$ এর মান

$$u'^2=u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2$$

$$=\frac{(u_x-v)^2+(u_y^2+u_z^2)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right)^2}$$

$$=\frac{(u_x-v)^2+(u^2-u_x^2)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right)^2} \qquad (3—58)$$

u এবং $v$ উভয়েই $x$ অক্ষের সমান্তরাল হলে $u=u_x$ এবং $u_y=u_z=0$।
সমীকরণ (3—57) অনুযায়ী

$$u'=u_x'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}},\quad u_y'=u_z'=0 \tag{3-59}$$

এটি আমাদের পূর্বের বেগ সংযোজন সূত্র (3—45) এর সঙ্গে তুলনীয়।

$v$ র পরিবর্তে $-v$ প্রতিস্থাপিত করলে (3—57) এর বিপরীত সমীকরণ পাওয়া যায় ঃ

$$u_x=\frac{u_x'+v}{1+\frac{u_x'v}{c^2}},\ u_y=\frac{u_y'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{u_x'v}{c^2}},\ u_z'=\frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{u_x'v}{c^2}} \tag{3-60}$$

সমীকরণ (3—58) থেকে পাওয়া যায় ঃ

$$u^2=\frac{(u_x'+v)^2+(u'^2-u_x'^2)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{u_x'v}{c^2}\right)^2} \tag{3-61}$$

u′ এবং $v$ সমান্তরাল হলে সমীকরণ (3—59) হবে

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} \tag{3-62}$$

এটি সমীকরণ ( 3—45 ) এর সঙ্গে অভিন্ন।

যদি $l, m, n$ বস্তুকণার বেগের যথাক্রমে $x, y$ ও $z$ অক্ষের সঙ্গে উৎপন্ন কোণের কোসাইন হয় তা হলে

$$(l, m, n)=\frac{u_x, u_y, u_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u^{\ 2}}} \tag{3-63}$$

অনুরূপে $l', m', n'$ বস্তুকণার বেগের যথাক্রমে $x', y'$ ও $z'$ অক্ষের সঙ্গে উৎপন্ন কোণের কোসাইন হবে

$$(l', m', n')=\frac{u_x', u_y', u_z'}{\sqrt{u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2}} \tag{3-64}$$

সমীকরণ (3—57) ও (3—64) থেকে পাই

$$(l', m', n')=\frac{l-\frac{v}{u},\ m\sqrt{1-v^2/c^2},\ n\sqrt{1-v^2/c^2}}{D}, \tag{3-65}$$

যেখানে $D=\frac{u'}{u}\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right)$

সমীকরণ (3—58) থেকে পাই

$$D=\left[1-2l\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}-(1-l^2)\frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3-66)$$

সমীকরণ (3—65) থেকে বোঝা যায় যে, $S$ ও $S'$ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে কোন বস্তুকণার বেগের মান ও দিক দুইই ভিন্ন বলে মনে হবে।

সমীকরণ (3—59) আমাদের পরাবৃত্তিক ট্যাঞ্জেণ্টের সংযোজন সূত্র স্মরণ করিয়ে দেয়ঃ

$$\tanh(\alpha-\beta)=\frac{\tanh\alpha-\tanh\beta}{1-\tanh\alpha\tanh\beta} \qquad (3-67)$$

অতএব $u$ ও $v$ বেগের উপযুক্ত ছদ্মকোণের নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেওয়া যায়

$$\tanh\alpha=\frac{u}{c}, \text{ অর্থাৎ } \alpha=\tanh^{-1}\frac{u}{c} \qquad (3-68a)$$

$$\text{এবং } \tanh\beta=\frac{v}{c}, \text{ অর্থাৎ } \beta=\tanh^{-1}\frac{v}{c} \qquad (3-68b)$$

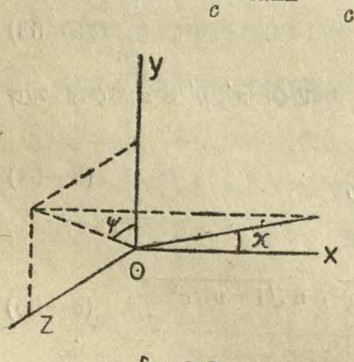
তা হলে বেগ সংযোজন সূত্র এইভাবে লেখা যায়

$$\tanh(\alpha-\beta)=\frac{u'}{c}$$

$$\text{অর্থাৎ } \tanh^{-1}\frac{u'}{c}=\tanh^{-1}\frac{u}{c}-\tanh^{-1}\frac{v}{c} \qquad (3-69)$$

এখানে আমরা গালিলীয় সূত্রের মত দু'টি বেগের লব্ধি তাদের বিয়োগফল হিসাবে পাই। অনুরূপে সমীকরণ (3—62) থেকে পাই

$$\tanh^{-1}\frac{u}{c}=\tanh^{-1}\frac{u'}{c}+\tanh^{-1}\frac{v}{c} \qquad (3-69a)$$




চিত্র 3-8

এখানে $u'=c$ হলে $\tanh^{-1}1=\infty$ তা হলে সব সময় $\tanh^{-1}\frac{u}{c}=\infty$, অতএব $u=c$. কাজেই আলোর বেগ সব কাঠামোতেই সমান।

এখন যদি আমরা গোলীয় ধ্রুবীয় নির্দেশাঙ্ক ($x$, $\psi$) ব্যবহার করি এবং দুই কাঠামোর আপেক্ষিক গতির দিক $x$ অক্ষকে ধ্রুবাক্ষ হিসাবে ব্যবহার করি ( চিত্র (3—8) ) তা হলে

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u \cos \chi \\ u_y &= u \sin \chi \cos \psi \\ u_z &= u \sin \chi \sin \psi \\ u_x' &= u' \cos \chi' \\ u_y' &= u' \sin \chi' \cos \psi. \\ u_z' &= u' \sin \chi' \sin \psi. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{—}70)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{অতএব } \tan \chi &= \frac{(u_y^2 + u_z^2)^{\frac{1}{2}}}{u_x} \\ \text{এবং } \tan \psi &= \frac{u_z}{u_y} \end{aligned}\right\} \quad (3\text{—}71)$$

সমীকরণ (3—60) ব্যবহার করলে পাওয়া যায়

$$\tan \chi = \frac{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} (u_y'^2 + u_z'^2)^{\frac{1}{2}}}{u_x' + v} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} u' \sin \chi'}{u' \cos \chi' + v}$$

$$= \frac{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \tan \chi'}{1 + \frac{v}{u'} \sec \chi'} \quad (3\text{—}72)$$

$$\text{এবং } \tan \psi = \frac{u_z}{u_y} = \frac{u_z'}{u_y'} = \tan \psi' \quad (3\text{—}73)$$

$$\text{অতএব } \psi = \psi' \quad (3\text{—}73a)$$

অতএব রূপান্তরের ফলে বস্তুকণা কোন দিগংশিক পাক খায় না যখন আপেক্ষিক গতির দিককে ধ্রুবাক্ষ ধরা হয়। কিন্তু বেগের মান এবং ধ্রুবাক্ষের সঙ্গে নতির পরিবর্তন হয়। $v$ এর স্থানে $-v$ এবং ড্যাশযুক্ত রাশির স্থানে ড্যাশবিহীন রাশি প্রতিস্থাপিত করলে (3—72 এর বিপরীত সমীকরণ পাওয়া যায়।

$u = u' = c$ ধরলে আমরা বিভিন্ন কাঠামোর সাপেক্ষে আলোক রশ্মির দিক পরিবর্তন নির্ণয় করতে পারি। একে বলা হয় আলোর অপেরণ :

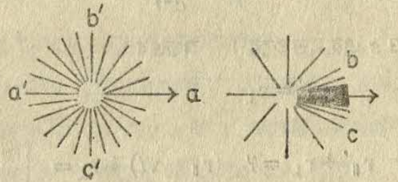
$$\left.\begin{aligned} \tan \chi &= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tan \chi'}{1 + \frac{v}{c} \sec \chi'} \\ \psi &= \psi' \end{aligned}\right\} \quad (3\text{—}74)$$

$$\text{অতএব } \cot \chi = \frac{\cot \chi' + \frac{v}{c} \operatorname{cosec} \chi'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (3\text{—}74a)$$

সমীকরণ (3—74) দ্রুতগামী মৌল কণিকা থেকে নির্গত ফোটন বা নিউট্রিনোর কৌণিক বণ্টন সূচিত করে। উদাহরণ স্বরূপ উদাসীন পায়নের ক্ষয় $\pi^\circ \rightarrow \gamma + \gamma$, আহিত পায়নের ক্ষয় $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, সিগমা হাইপেরনের ক্ষয় $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ এবং বৃত্তাকার বেগবর্ধক যন্ত্রে ইলেকট্রন থেকে ফোটন বিকীরণের উল্লেখ করা যেতে পারে।

সকল বেগের জন্যই লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের অক্ষিকরণ প্রক্রিয়া লক্ষণীয় অর্থাৎ লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের ফলে রশ্মিগুচ্ছ কম অপসারী হয়। সমীকরণ (3—72) থেকে দেখা যায় যে, যখন $\frac{v}{c} \rightarrow 1$ তখন যে কোন $\chi'$ এর জন্য $\tan \chi \rightarrow 0$ অর্থাৎ $\chi \rightarrow 0$। অর্থাৎ $S'$ কাঠামোর $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ যত বেশী বস্তুকণাগুলিও তত কম অপসারী হবে। যদি $u' < c$ হয় তা হলে $u'$ এর চেয়ে বেশী আপেক্ষিক বেগ সমূহের $(v > u')$ জন্য সকল বস্তুকণাকেই $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে সামনে দিকে যেতে দেখা যাবে অর্থাৎ $0 \leqslant \chi \leqslant \pi/2$। এমন কি $S'$ কাঠামোর পিছন দিকে নির্গত বস্তুকণাও $(\chi' = \pi)$ $S$ কাঠামোর সামনের দিকে $(\chi = 0)$ নির্গত হয়েছে বলে মনে হবে। কিন্তু নিউট্রিনো ও ফোটনের ক্ষেত্রে $u' = c$ এবং $v$ কে $u'$ এর চেয়ে বেশী করা যায় না। কাজেই $S'$ কাঠামোর সাপেক্ষে পিছন দিকে নির্গত কণিকাগুলির $\left(\frac{\pi}{2} \leqslant \chi' \leqslant \pi\right)$ মধ্যে শুধু পিছনদিকের একটি সংকীর্ণ শঙ্কুর মধ্যে অবস্থিত কণিকাগুলি ছাড়া অন্যগুলি $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে সামনে দিকে নির্গত হচ্ছে বলে মনে হবে। পিছন দিকে নির্গত কণিকাগুলির ক্ষেত্রে $\sec \chi'$ এবং $\tan \chi'$ উভয়েই ঋণাত্মক। $\tan \chi$ ঋণাত্মক হবে যতক্ষণ $\frac{v}{c} \left| \sec \chi' \right| < 1$, অর্থাৎ শুধু এই কোণগুলির জন্য কণিকাগুলি পিছন দিকে নির্গত হবে। অতএব উপরোক্ত শঙ্কুটির শীর্ষকোণার্ধ $\cos^{-1} \frac{v}{c}$ হবে। এই প্রক্রিয়াকে সম্মুখবাতি প্রক্রিয়া (Headlight effect) বলা হয়।

উচ্চশক্তি সম্পন্ন বস্তুকণিকার প্রতিক্রিয়ায় ভরকেন্দ্র কাঠামোয় ($S'$) বস্তুকণিকাগুলি সবদিকে সমানভাবে নির্গত হয় এবং এই কাঠামোয় ভরবেগের লব্ধি শূন্য। পরীক্ষাগারের সাপেক্ষে এই ভরকেন্দ্র কাঠামো প্রচণ্ড বেগে গতিশীল। অতএব পরীক্ষাগারের কাঠামোর ($S$) সাপেক্ষে বস্তু-কণিকাগুলি সম্মুখ দিকে নির্গত বস্তুকণার গতিপথের সঙ্গে ক্ষুদ্র কোণ উৎপন্ন করে ( চিত্র 3—9 )।




চিত্র 3-9

নিম্নলিখিত বস্তুকণার প্রতিক্রিয়ার ক্ষেত্রে দুই কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ 0·89c :

$$p+p \rightarrow p+p+\pi^{+}+\pi^{-}$$

নিম্নলিখিত তালিকা 3—1-এ আপতিত প্রোটনের দিকের সঙ্গে বহির্গামী কণিকাগুলির গতিপথের কোণ পরীক্ষাগার কাঠামো $S$-এর সাপেক্ষে (χ দেওয়া হয়েছে এবং S′ ( ভরবেগ ) কাঠামোয়ও এই কোণগুলি (χ′) দেওয়া হয়েছে।

তালিকা 3-1

| গতিপথের অনুক্রমিক সংখ্যা | χ′ | χ |
|---|---|---|
| 2 | 125°.4 | 48°.0 |
| 3 | 22°.1 | 4°.9 |
| 4 | 171°.7 | 23°.6 |
| 5 | 55°.5 | 14°.6 |

* 3-4. **লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সূত্রের সামান্যীকরণ :** আমরা ইতিপূর্বে $S'$ ও $S$ কাঠামোর আপেক্ষিক গতি $x$ অক্ষের সমান্তরাল ধরে নিয়েছিলাম। এখন আমরা এর চেয়ে সাধারণ ক্ষেত্র নেব যেখানে আপেক্ষিক বেগ **v** $x$ অক্ষের

সমান্তরাল নয়। এখন কোন বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর r-কে দুই উপাংশে ভাগ করে লিখব, একটি v-এর সমান্তরাল এবং অন্যটি v-এর সঙ্গে লম্ব।

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp},\ \mathbf{r}_{\parallel}=\frac{(\mathbf{r}.\ \mathbf{v})\ \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2},\mathbf{r}_{\perp}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\parallel}=\mathbf{r}-\frac{(\mathbf{r}.\ \mathbf{v})\ \mathbf{v}}{v^2} \quad (3-75)$$

$\mathbf{r}_{\parallel}$ .এর রূপান্তর $x$ এর মত হবে। অতএব

$$\mathbf{r}_{\parallel}'=\gamma\ (\mathbf{r}_{\parallel}'-\mathbf{v}t),\ \text{যেখানে } \gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3-76a)$$

$\mathbf{r}_{\perp}$ এর রূপান্তর $y$ ও $z$ এর মত হবে। অতএব

$$\mathbf{r}_{\perp}'=\mathbf{r}_{\perp} \quad (3-76b)$$

$$\text{এখন } \mathbf{r}'=\mathbf{r}_{\parallel}'+\mathbf{r}_{\perp}'=\gamma\ (\mathbf{r}_{\parallel}-\mathbf{v}t)+\mathbf{r}_{\perp}=\gamma\left[\frac{(\mathbf{r}.\ \mathbf{v})\ \mathbf{v}}{v^2}-\mathbf{v}t\right]$$

$$+\mathbf{r}-\frac{(\mathbf{r}.\ \mathbf{v})\ \mathbf{v}}{v^2}=\mathbf{r}+\frac{(\mathbf{r}.\ v)\ \mathbf{v}}{v^2}(\gamma-1)-\gamma\mathbf{v}t=\mathbf{r}-\mathbf{v}t+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}$$

$$\{\mathbf{r}.\ \mathbf{v}-v^2t\} \quad (3-77)$$

$$\text{অনুরূপে } t'=\gamma\left\{t-\frac{\mathbf{r}.\ \mathbf{v}}{c^2}\right\} \quad (3-78)$$

উপরের সমীকরণগুলিকে ভেক্টরের উপাংশের দ্বারা প্রকাশ করলে দাঁড়ায়

$$x'=x\left\{1+(\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2}\right\}+y\,(\gamma-1)\frac{v_x\,v_y}{v^2}+z(\gamma-1)\,\frac{v_x\,v_z}{v^2}-\gamma v_x t \quad (3\text{-}79a)$$

$$y'=x\ (\gamma-1)\frac{v_x\,v_y}{v^2}+y\ \left\{1+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2}\right\}+z\,(\gamma-1)\frac{v_y\ v_z}{v^2}-\gamma v_y t \quad (3-79b)$$

$$z'=x\ (\gamma-1)\frac{v_x\,v_z}{v^2}+y\ (\gamma-1)\frac{v_y\ v_z}{v^2}+z\ \left\{1+(\gamma-1)\frac{v_z^2}{v^2}\right\}-\gamma v_z t \quad (3-79c)$$

$$t'=\gamma\left\{t-\frac{xv_x+yv_y+zv_z}{c^2}\right\} \quad (3-79d)$$

সমীকরণ (3—77) ও (3—78) এর বিপরীত রূপান্তর সমীকরণগুলি হবে

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{v}t'+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\{\mathbf{r}'.\ \mathbf{v}+v^2t'\} \quad (3-77')$$

$$t=\gamma\left\{t'+\frac{\mathbf{r}.\,\mathbf{v}}{c^2}\right\} \qquad (3\text{—}78')$$

যখন $v \ll c$, অথবা $c \to \infty$, $\gamma - 1 \to 0$, তখন $(3-77)$ ও $(3-78)$ সমীকরণদ্বয় নিম্নলিখিত সমীকরণে পরিণত হয়

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{r}=\mathbf{r}-\mathbf{v}t\\ t'=t\end{array}\right\} \qquad (3\text{—}80)$$

এবং

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{v}\,t'\\ t=t'\end{array}\right\} \qquad (3\text{—}80')$$

এগুলি গালিলীয় রূপান্তর সূত্রের সাধারণ রূপ।

সমীকরণ (3—79) গুলি লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তরের সবচেয়ে সামান্য রূপ নয়। এক্ষেত্রে আমরা আপেক্ষিক বেগকে $x$ বা $x'$ অক্ষের সমান্তরাল ধরি নি কিন্তু S ও S′ কাঠামোর অক্ষগুলিকে এখনও সমান্তরাল ধরা হয়েছে। আরও সামান্য ক্ষেত্রে অক্ষগুলির ঘূর্ণনও ধরতে হবে। সেক্ষেত্রে রূপান্তর সূত্র সমীকরণ (3—79) এর সঙ্গে অক্ষের ঘূর্ণনজনিত রাশি যোগ করতে হবে।[1]

পূর্বের ন্যায় আমরা সমীকরণ (3—77) ও (3—78) থেকে ব্যবকলন দ্বারা পাই

$$\mathbf{u}'=\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\{(\mathbf{u}.\,\mathbf{v})-v^2\}}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{u}.\,\mathbf{v}}{c^2}\right)} \qquad (3\text{—}81)$$

অনুরূপে $$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}'+\mathbf{v}+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\{\mathbf{u}'.\,\mathbf{v}+v^2\}}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{u}'.\,\mathbf{v}}{c^2}\right)} \qquad (3\text{—}81)$$

যেখানে $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\equiv\mathbf{u}$ এবং $\frac{d\mathbf{r}'}{dt'}\equiv\mathbf{u}'$। এটি বেগ সংযোজনের সাধারণ সূত্র। $v \ll c$ হলে আমরা পাই

1. এই ধরণের সামান্য লোরেন্ট্‌স্‌ সমীকরণের জন্য অনুসন্ধিৎসু পাঠক নিম্নলিখিত বইগুলি দেখতে পারেন: (1) Relativistic Mechanics by R.D. Sard (Benjamin 1970) পৃষ্ঠা 258-81, (2) The Theory of Relativity by C. Moller (Oxford Univ. Press 1961) পৃষ্ঠা 53-6, (3) Relativistic Kinematics by H. Arzelies (Pergamon 1966) পৃষ্ঠা 173-8.

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{u}'=\mathbf{u}-\mathbf{v}\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}'+\mathbf{v},\ \text{অতএব}\ \mathbf{v}=\mathbf{u}-\mathbf{u}'\end{array}\right\} \qquad (3\text{—}82)$$

এটি আমাদের পরিচিত বেগ ভেক্টর সংযোজনের সামন্তরিক সূত্র।

সমীকরণ (3—81) এর বর্গ নিলে পাওয়া যায় :

$$u'^2=\frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2+\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})^2}{\left(1-\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{c^2}\right)^2} \qquad (3\text{—}83)$$

$$\text{অতএব}\ 1-\frac{u'^2}{c^2}=\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{c^2}\right)^2} \qquad (3\text{—}84)$$

$u$ এবং $v$ উভয় বেগের মান যদি $c$ র চেয়ে কম হয় তা হলে (3-84) সমীকরণের ডানদিকের রাশিটি ধনাত্মক। অতএব লব্ধি $u'<c$। অতএব সাধারণ ভাবে প্রমাণ করা গেল যে, $c$ র কম মানের দুটি বেগের লব্ধি $c$ র চেয়ে সব সময় কম হবে।

বস্তুকণার বেগ $\boldsymbol{u}$ এবং দুই কাঠামোর আপেক্ষিক বেগ $\boldsymbol{v}$ র মধ্যে $0°$ অথবা $90°$ কোণ হলে সমীকরণ (3-83) সহজ রূপ নেয় :

$$(1)\quad \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=0\ \text{হলে}\ \ \boldsymbol{u}'=\frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}}{1-\frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{c^2}} \qquad (3\text{-}85)$$

এই বিশেষ ক্ষেত্রে আমরা আইনষ্টাইনের বেগ সংযোজন সূত্র (সমীকরণ 3-59) পাই।

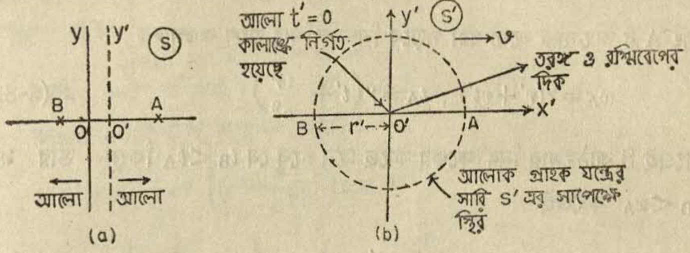
(2) $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}=0$ হলে সমীকরণ (3-81) থেকে পাওয়া যায়

$$\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}\sqrt{1-v^2/c^2}-\boldsymbol{v} \qquad (3\text{-}86)$$

এটা সমীকরণ (3-57) থেকেও পাওয়া যায় যদি আমরা ধরি যে, $v_x=v$ এবং $u_y=u$ এবং $u_z=u_x=0$। পূর্বের মত $\boldsymbol{v}$ এর স্থানে $-\boldsymbol{v}$ প্রতিস্থাপিত করলে বিপরীত সমীকরণগুলি পাওয়া যায়।

3-5. **শূন্য স্থানে গোলকাকার তরঙ্গের বিস্তার :** মনে করা যাক যে জাড্যিক কাঠামো S এর সাপেক্ষে স্থির এবং শূন্য স্থানে মূলবিন্দু O কে কেন্দ্র

করে $r$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের উপর এক সারি গ্রাহক যন্ত্র রাখা হয়েছে। যদি $t=0$ কালাঙ্কে মূলবিন্দু থেকে আলোক নিঃসৃত হয় তা হলে আলোর বেগের দিক নিরপেক্ষতা অনুযায়ী সব ক'টি গ্রাহক যন্ত্রে একই কালাঙ্ক




চিত্র 3-10

$t=\frac{r}{c}$ এ আলোক সঙ্কেত ধরা পড়বে। অনুরূপে S' কাঠামোতেও যদি মূল বিন্দু O' থেকে $r'$ দূরত্বে একটি গোলকের উপর গ্রাহক যন্ত্রের সারি স্থির থাকে তা হলে আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বিতীয় স্বীকার্য অনুযায়ী $t'=o$ কালাঙ্কে S' এর মূলবিন্দু থেকে নিঃসৃত আলোক তরঙ্গ $t'=\frac{r'}{c}$ কালাঙ্কে সকল গ্রাহক যন্ত্রে এক সঙ্গে পেঁছবে। কিন্তু $t=t'=o$ কালাঙ্কে O এবং O' উভয় মূলবিন্দু সমস্থানিক ছিল। কাজেই S ও S' কাঠামোয় স্থির দুই নিরীক্ষকের কাছেই আলোক গোলকের তরঙ্গ মুখ নিয়ে বিস্তৃত হবে। দুই নিরীক্ষকের মত আপাত দৃষ্টিতে পরস্পর বিরোধী মনে হয় কিন্তু আমরা দেখব যে লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তর সূত্র অনুযায়ী কি ভাবে এই বিরোধ দূর করা যায়।

$S'$ কাঠামোয় মূল বিন্দু O থেকে $+r'$ ও $-r'$ দূরত্বে A এবং B বিন্দুতে স্থির দু'টি গ্রাহক যন্ত্র নেওয়া যাক ( চিত্র 3-10 $(b)$ )। আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বিতীয় স্বীকার্য অনুযায়ী O' বিন্দু থেকে $t'=o$ কালাঙ্কে নির্গত আলোক A এবং B র গ্রাহক যন্ত্রে যুগপৎ S' কাঠামোর কালাঙ্ক $t'=\frac{r'}{c}$ এ পেঁছবে। অবশ্য S কাঠামোয় স্থির নিরীক্ষকের মতে B র গ্রাহক যন্ত্রটি আলোর দিকে এবং A র গ্রাহক যন্ত্রটি বিপরীত দিকে গতিশীল ( চিত্র 3-10 $(a)$ )। S কাঠামোর সাপেক্ষে B র গ্রাহক যন্ত্রে A র গ্রাহক যন্ত্রের পূর্বে আলোক সঙ্কেত

ধরা পড়বে। লোরেণ্ট্‌স্ রূপান্তর সূত্র অনুযায়ী S কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে B র গ্রাহক যন্ত্রে নিম্নলিখিত দেশ ও কালাঙ্কে আলোক সংকেত ধরা পড়বে :

$$x_B=\gamma(-r'+vt')\ ;\ t_B=\gamma\left(t'-\frac{vr'}{c^2}\right) \qquad (3\text{-}87)$$

এবং A র আলোক যন্ত্রে ধরা পড়বে নিম্নলিখিত দেশ কালাঙ্কে

$$x_A=\gamma(r'+vt')\ ;\ t_A=\gamma\left(t'+\frac{vr'}{c^2}\right) \qquad (3\text{-}88)$$

কাজেই S কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে মনে হবে যে $t_B<t_A$ কিন্তু তার মতে $x_B<x_A$ কাজেই

$$\frac{x_A}{t_A}=\frac{\gamma(r'+vt')}{\gamma\left(t'+\frac{vr'}{c^2}\right)}=\frac{\frac{r'}{t'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\frac{r'}{t'}} \qquad (3\text{—}89)$$

যদি $r'/t'=c$ হয় তা হলে

$$\frac{x_A}{t_A}=\frac{c+v}{1+\frac{v}{c}}=c \qquad (3\text{—}90)$$

অনুরূপে $\frac{x_B}{t_B}=c$ (3—91)

এখন S কাঠামোয় $\frac{r}{c}$ ব্যাসার্ধের গোলকের উপর স্থির গ্রাহক যন্ত্রের সারির ক্ষেত্রেও S′ কাঠামোর নিরীক্ষক অনুরূপ সিদ্ধান্তে পৌঁছবে। কাজেই S ও S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের উভয়ের কাছেই আলোর গতি তাদের নিজ নিজ মূলবিন্দু কেন্দ্র বিশিষ্ট গোলকাকার তরঙ্গের বিস্তার বলে মনে হবে। কাজেই উভয়ের কাছেই তরঙ্গ বেগ ও রশ্মিবেগের দিক এক বলে মনে হবে। যদি তরঙ্গ মুখের ব্যাসার্ধ অসীমের দিকে যায় তা হলে গোলকাকার তরঙ্গ মুখ সমতলে রূপান্তরিত হয়। কাজেই সমতল তরঙ্গ মুখের ক্ষেত্রেও S ও S′ উভয় কাঠামোতেই তরঙ্গ বেগ ও রশ্মি বেগ একই দিকে হবে যদিও এই দিক দুই কাঠামোয় এক হবে না এবং আলোর অপেরণ এই কারণেই ঘটে। আমরা এবার এ সম্বন্ধে বিশদভাবে আলোচনা করব।

**3-6. আলোর অপেরণ :** গালিলীয় আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী তারার আলোর অপেরণ আমরা ইতিপূর্বেই নির্ণয় করেছি (পৃষ্ঠা ১৭)। এখন আমরা লোরেন্টস্‌ রূপান্তর সূত্র অনুযায়ী অপেরণ নির্ণয় করব। ১৭ পৃষ্ঠার পদ্ধতি অনুযায়ী আলোক রশ্মির সমীকরণ S ও S′ কাঠামোয় হবে যথাক্রমে (চিত্র 1-9)

$$\left.\begin{aligned} &x=ct\cos\alpha,\quad y=ct\sin\alpha,\\ \text{এবং}\quad &x'=ct'\cos\alpha',\ y'=ct'\sin\alpha'\ (\because\ c=c')\end{aligned}\right\} \qquad (3-92)$$

অতএব লোরেন্ট্‌স্‌ সূত্র অনুযায়ী

$$\gamma(x'+vt')=c\gamma\left(\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)\right)\cos\alpha$$

$$\therefore\quad x'\left(1-\frac{v}{c}\cos\alpha\right)=c\left(\cos\alpha-\frac{v}{c}\right)t'$$

$$\text{অথবা}\ x'=\frac{c\left(\cos\alpha-\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}t'=ct'\cos\alpha'\ (\text{সমীকরণ } 3-92)$$

$$\text{অতএব}\ \cos\alpha'=\frac{\cos\alpha-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha} \qquad (3-93)$$

$$\text{অনুরূপে}\ y'=c\gamma\ \sin\alpha\ \left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$=c\gamma\sin\alpha\ t'\left\{1+\frac{\frac{v}{c}\left(\cos\alpha-\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}\right\}$$

$$=c\gamma\sin\alpha . t'\frac{(1-v^2/c^2)}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}=c\sin\alpha'\ t'$$

$$\text{অতএব}\ \sin\alpha'=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\ \sin\alpha}{1-v/c\cos\alpha} \qquad (3-94)$$

সমীকরণ (3—93) কে (3—94) দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায় :

$$\cot\alpha'=\frac{\cot\alpha-\frac{v}{c}\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (3-95)$$

আমরা পূর্বেও অন্যভাবে এই সমীকরণ প্রমাণ করেছিলাম (সমীকরণ $(3-74a)$র বিপরীত)। যখন $v \ll c$ তখন এই সমীকরণ $(1-27)$ এ পরিণত হয় $\frac{v}{c}$ এর দ্বিতীয় ঘাত পর্যন্ত রাশিগুলি রাখলে পাই :

$$\cot \alpha' = \cot \alpha - \frac{v}{c} \operatorname{cosec} \alpha + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \cot \alpha \qquad (3-95a)$$

এখন $\eta = \alpha' - \alpha$ যদি অপেরণের পরিমাণ হয় তা হলে

$$\cot \alpha' = \cot (\alpha + \eta) = \frac{\cot \alpha \cot \eta - 1}{\cot \alpha + \cot \eta}$$

যদি তারাটি নিরীক্ষকের সুমেরুতে থাকে অর্থাৎ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ হয়, তা হলে

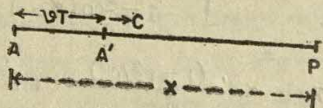
$$\cot \alpha' = -\tan \eta$$

অতএব সমীকরণ $(3-95a)$ অনুযায়ী

$$\tan \eta = \frac{v}{c}, \quad \eta = \tan^{-1} \frac{v}{c}$$

কাজেই এক্ষেত্রে $\frac{v}{c}$ এর প্রথম ঘাত পর্যন্ত গালিলীয় আপেক্ষিকতার সূত্রের সঙ্গে মিলে যায় (সমীকরণ $1-24$)। কাজেই বোঝা যায় যে, কেন ব্র্যাডলের পরীক্ষার ফল তত্ত্বগত মানের সঙ্গে মিলে গিয়েছিল।

**3-7 ডপলার প্রক্রিয়া**—আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কারের বহু পূর্বেই অষ্ট্রিয়ান বিজ্ঞানী ডপলার এই প্রক্রিয়া আবিষ্কার করেন। মনে




চিত্র 3—11

করা যাক যে, A বিন্দুতে একটি ঘড়ি আছে এবং P বিন্দুতে দাঁড়িয়ে একজন নিরীক্ষক ঐ ঘড়ির সময় দেখছে। আলোর সাহায্যে ঘড়ি দেখছে, কাজেই ঘড়ির সময় যখন $t$ তখন যে আলোক সঙ্কেত A থেকে রওনা হবে সেটি Pতে গিয়ে পেঁছবে $t + \frac{x}{c}$ কালাঙ্কে। মনে করা যাক যে ঘড়িটি P বিন্দুর দিকে

$v$ বেগে ছুটে চলেছে। তা হলে T সময় পরে ঘড়িটি A′ বিন্দুতে পৌঁছবে, যেখানে $AA' = vT$। P থেকে দূরত্ব এখন $x - vT$। অতএব P বিন্দুর নিরীক্ষক ঘড়িতে $t+T$ কালাঙ্ক দেখবে $t+T+\frac{x-vT}{c}$ কালাঙ্কে। অতএব ঘড়িতে নির্দিষ্ট T কালাঙ্ক নিরীক্ষকের কাছে

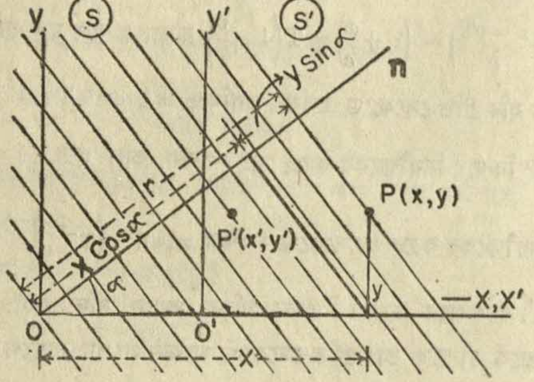
$\left(t+T+\frac{x-vT}{c}\right)-\left(t+\frac{x}{c}\right)=T\left(1-\frac{v}{c}\right)$ কালাঙ্ক বলে মনে হবে। ঘড়িটির পেণ্ডুলাম যদি প্রতি সেকেণ্ডে একবার স্পন্দিত হয় এবং $T = 1$ সেকেণ্ড হয় তা হলে P বিন্দুর নিরীক্ষকের কাছে সেই স্পন্দন কাল হবে $1-\frac{v}{c}$ সেকেণ্ড।

অতএব নিরীক্ষকের কাছে 1 সেকেণ্ডে স্পন্দন সংখ্যা $\left(1-\frac{v}{c}\right)^{-1}$ অর্থাৎ 1 এর চেয়ে বেশী বলে মনে হবে। এখন ঘড়ির স্থানে যদি একটি স্পন্দনশীল পরমাণু থাকে তা হলে তার প্রতি সেকেণ্ডে স্পন্দন সংখ্যা $\nu$ হলে নিরীক্ষকের কাছে সেই স্পন্দন সংখ্যা $\frac{\nu}{1-\frac{v}{c}}$ বলে মনে হবে। একরঙা আলোর দু'টি ভূমিকা, সেটি এক স্থান থেকে অন্য স্থানে সংবাদ নিয়ে যায় শুধু তাই নয়, আলোক তরঙ্গ কালের মানদণ্ড হিসাবে কাজ করে কারণ প্রতি সেকেণ্ডে তার একটি নির্দিষ্ট কম্পন সংখ্যা আছে যাকে কম্পাঙ্ক বলা হয়। নিরীক্ষকের অভিমুখে গতিশীল উৎসের আলোর কম্পাঙ্ক বেড়ে যাবে। অনুরূপে নিরীক্ষকের বিপরীত মুখে গতিশীল উৎসের আলোর কম্পাঙ্ক কমে যাবে অর্থাৎ বর্ণালী লালের দিকে সরে যাবে। আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কার করার পর জানা যায় যে, গতিশীল ঘড়ির চলার হার মন্থর হয়ে যায় $1 : \sqrt{1-v^2/c^2}$ অনুপাতে। অতএব কম্পাঙ্ক হবে $\frac{\nu\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v/c} =$ $\nu\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$। আমরা এবার এই সিদ্ধান্ত যথাযথভাবে প্রমাণ করব।

একরঙা আলোর সমতল তরঙ্গের ক্ষেত্রে তড়িৎ অথবা চুম্বকীয় ক্ষেত্রের পরিমাণ তরঙ্গ সমীকরণ মেনে চলে। তড়িৎ ক্ষেত্র ভেক্টর E অথবা চুম্বকীয় ক্ষেত্র ভেক্টর H এর পরিবর্তে $\psi$ লিখলে আমরা পাই :

$$\psi = A \cos 2\pi\, v\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (3\text{—}96)$$

যেখানে $v$ তরঙ্গের কম্পাঙ্ক। এখানে S কাঠামোয় সমতল তরঙ্গমুখ $t=0$ কালাঙ্কে মূলবিন্দু O তে ছিল। এই সময় S ও S′ কাঠামো উভয়ের মূলবিন্দু




চিত্র 3—12

O এবং O′ সমস্থানিক ছিল। $t$ কালাঙ্কে তরঙ্গমুখ A বিন্দুতে পৌঁছেছে এবং $OA=r$. তরঙ্গ অভিলম্ব যদি $x$ অক্ষের সঙ্গে $\alpha$ কোণ উৎপন্ন করে এবং A র S কাঠামোর দেশাঙ্ক $x, y$ হয় তাহলে চিত্র 3 – 12 থেকে স্পষ্ট যে

$$r = x \cos\alpha + y \sin\alpha$$

অতএব S কাঠামোয়

$$\psi = A \cos 2\pi v\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{c}\right) \qquad (3\text{—}97)$$

S′ কাঠামোয় এই তরঙ্গ সমীকরণ হবে

$$\psi' = A' \cos 2\pi v' \left(t' - \frac{x'\cos\alpha' + y'\sin\alpha'}{c}\right) \qquad (3\text{—}98)$$

মনে করা যাক যে, P বিন্দুতে একজন নিরীক্ষক S কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির আছে এবং P′ বিন্দুতে অপর একজন নিরীক্ষক S′ কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির আছে। S′ কাঠামো S এর সাপেক্ষে $x$ অক্ষের দিকে $v$ বেগে গতিশীল। মনে করা যাক যে, $t=t'=0$ কালাঙ্কে সমস্থানিক O এবং O′ মূলবিন্দু অতিক্রম করছিল যে তরঙ্গ শীর্ষ তাতে একটি চিহ্ন দিয়ে দেওয়া হল যাতে

নিরীক্ষকেরা সেটিকে অন্য তরঙ্গশীর্ষগুলি থেকে পৃথক বলে চিনতে পারে। এই তরঙ্গশীর্ষের P বিন্দুর নিরীক্ষকের কাছে যেতে সময় লাগবে

$\frac{r}{c}=\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{c}$ এবং P′ বিন্দুর নিরীক্ষকের কাছে যেতে সময় লাগবে $\frac{r'}{c}=\frac{x'\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{c}$। মনে করা যাক যে, P ও P′ উভয় নিরীক্ষকই ঐ চিহ্নিত তরঙ্গ শীর্ষকে দেখার পর থেকে প্রত্যেক তরঙ্গশীর্ষকে গুণতে শুরু করল, যতক্ষণ না P′ নিরীক্ষক P এর সঙ্গে মিলিত হয়। এই মিলনের কালাঙ্ক S ও S′ কাঠামোয় যথাক্রমে $t$ ও $t'$। একটু চিন্তা করলেই বোঝা যাবে যে দুই দর্শকই সমান সংখ্যক তরঙ্গশীর্ষ গুণেছে কারণ চিহ্নিত তরঙ্গশীর্ষের পর একটি তরঙ্গশীর্ষও ছিল না, যেটি একজন নিরীক্ষক গুণেছে কিন্তু অন্যজন গোণে নি। S কাঠামোর নিরীক্ষক $t-\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{c}$ সময় ধরে তরঙ্গশীর্ষের সংখ্যা গণনা করেছে, কাজেই তার গণনার ফল হবে $\nu\left(t-\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{c}\right)$। অনুরূপে S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের গণনার ফল হবে $\nu'\left(t'-\frac{x'\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{c}\right)$

অতএব তরঙ্গের দশা কাঠামো নিরপেক্ষ। অতএব

$$\nu\left(t-\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{c}\right)=\nu'\left(t'-\frac{x'\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{c}\right) \quad (3-99)$$

লোরেণ্ট্‌স্ রূপান্তর সূত্র অনুযায়ী

$$\nu\left[\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2c^2}}\cos\alpha+y'\sin\alpha'}{c}\right]$$

$$=\nu'\left(t'-\frac{x'\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{c}\right) \quad (3-99a)$$

এই সমীকরণ $x'$, $y'$ ও $t'$ এর সকল মানের জন্য সত্য। অতএব দু' দিকের $x'$, $y'$ ও $t'$ এর সহগগুলি সমান। $t'$ এর সহগগুলি থেকে পাই

$$\nu\left[\frac{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]=\nu' \quad (3-100)$$

S′ কাঠামোয় যদি আলোর উৎস এবং S কাঠামোয় নিরীক্ষক স্থির থাকে তাহলে $\nu'$ হচ্ছে যথার্থ কম্পাঙ্ক $\nu_0$ এবং $\nu$ আপাত কম্পাঙ্ক। অতএব

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha} = \frac{\nu_0 \sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{\mathbf{v.\,n}}{c}} \qquad (3-101)$$

যেহেতু $\alpha$ তরঙ্গ অভিলম্ব ও আপেক্ষিক গতির মধ্যস্থ কোণ, অতএব $\cos\alpha = \mathbf{v.\,n}$ যেখানে $\mathbf{n}$ তরঙ্গ অভিলম্বের দিকের একক ভেক্টর। কম্পাঙ্কের পরিবর্তন হলে তরঙ্গ দৈর্ঘ্যেরও পরিবর্তন হবে, যেহেতু

$$c = \lambda\nu = \lambda'\nu'$$

অতএব
$$\lambda' = \frac{\lambda_0\left(1-\frac{\mathbf{v\,n}}{c}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (3-102)$$

ক্ষেত্র 1. $\mathbf{v}$ ও $\mathbf{n}$ সমান্তরাল এবং একই দিকে হলে $\alpha=0$ তখন সমীকরণ (3 − 101) থেকে পাই

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \qquad (3-103)$$

এক্ষেত্রে আলোর উৎস নিরীক্ষকের দিকে অগ্রসর হয়। কম্পাঙ্ক এ ক্ষেত্রে বেড়ে যায় এবং আলোর বর্ণালী রেখাগুলি বেগুনীর দিকে সরে যায়।

ক্ষেত্র 2. $\mathbf{v}$ ও $\mathbf{n}$ সমান্তরাল কিন্তু তাদের দিক বিপরীত অর্থাৎ $\alpha=\pi$ তখন সমীকরণ (3 − 101) থেকে পাই

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-v/c}{1+x/c}} \qquad (3-104)$$

এ ক্ষেত্রে আলোর উৎস নিরীক্ষকের কাছ থেকে দূরে সরে যায় এবং কম্পাঙ্ক কমে যায় অর্থাৎ বর্ণালী রেখাগুলি লালের দিকে সরে যায়।

ক্ষেত্র 3. $\mathbf{v}$ ও $\mathbf{n}$ লম্বভাবে অবস্থিত অর্থাৎ $\alpha=\pi/2$. সমীকরণ (3 − 101) থেকে পাওয়া যায়

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (3-105)$$

এ ক্ষেত্রেও বর্ণালী রেখাগুলি লালের দিকে সরে যায়। লক্ষণীয় যে, গ্যালিলীয় রূপান্তর সূত্র অনুযায়ী এ ক্ষেত্রে বর্ণালীর কোন অপসরণ ঘটবে না। এই

অপসরণ $\frac{v}{c}$ এর দ্বিঘাতের সঙ্গে অনুপাতী। পূর্বোক্ত ক্ষেত্রগুলিতে বর্ণালীর অপসরণ $\frac{v}{c}$ এর প্রথম ঘাতের সঙ্গে অনুপাতী। একে অনুপ্রস্থ ডপলার প্রক্রিয়া বলা হয় এবং এটি ঘড়ির চলার হার কমার জন্য ঘটে। কাজেই এ ক্ষেত্রে ডপলার অপসরণ পরীক্ষাদ্বারা নির্ণয় করলে আইনষ্টাইন কাল প্রসারণের সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

সমীকরণ $(3-99a)$ এ দু'দিকের $x'$ ও $y'$ এর সহগগুলি তুলনা করলে পাই

$$\nu' \cos \alpha' = \gamma\nu \left(\cos \alpha - \frac{v}{c}\right) \qquad (3-106)$$

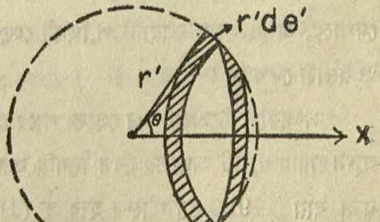
$$\nu' \sin \alpha' = \nu \sin \alpha \qquad (3-107)$$

(3—106) কে (3 – 107) দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায়

$$\cot \alpha' = \frac{\cot \alpha - \frac{v}{c} \operatorname{cosec} \alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (3-108)$$

আমরা পুনরায় অপেরণের সমীকরণ (3 – 95) পাই। (3—106) এবং (3 – 107) কে (3 – 101) দিয়ে ভাগ করলে $\cos \alpha'$ ও $\sin \alpha'$ এর মান পাওয়া যায়।

দ্রুতগামী আলোক উৎসের আলোর রঙের পরিবর্তন হয় এবং তা ছাড়া আলো সামনের দিকে কেন্দ্রীভূত হয়। আমরা এখন দ্রুতগামী উৎস থেকে নির্গত আলোর বিভিন্ন দিকের তীব্রতা নির্ণয় করতে পারি।




চিত্র 3--13

S' উৎসের যথার্থ কাঠামো এবং এই কাঠামোর সব দিকেই সমান সংখ্যক ফোটন নির্গত হবে। মনে করা যাক যে উৎস থেকে সকল দিকে মোট N সংখ্যক ফোটন নির্গত হয়।

মনে করা যাক যে, $\theta'$ ও $\theta'+d\theta'$ এই দুই দিকের মধ্যে $d$N সংখ্যক ফোটন নির্গত হয়। এই দুই দিকের মধ্যে ঘনকোণ $d\Omega'$ হলে

$$d\Omega'=2\pi \sin\theta'\, d\theta'=-2\pi d\,(\cos\theta') \tag{3-109}$$

অতএব একক ঘনকোণে নির্গত ফোটনের সংখ্যা হবে ঃ

$$\frac{d\mathrm{N}}{d\Omega'}=\frac{d\mathrm{N}}{2\pi \sin\theta'\, d\theta'}\equiv\frac{\mathrm{N}}{4\pi} \tag{3-110}$$

যেহেতু মোট ঘনকোণের পরিমাণ $4\pi$। এখন S কাঠামোয় ফোটনগুলি $\theta$ ও $\theta+d\theta$ দিকের মধ্যে নির্গত হবে এবং সমীকরণ (3 – 93) অনুযায়ী

$$\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta},\quad \beta=\frac{v}{c}$$

$$\text{এবং}\quad \frac{d\Omega'}{d\Omega}=\frac{d(\cos\theta')}{d(\cos\theta)}=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} \tag{3-111}$$

এখন S কাঠামোয় একক ঘনকোণে নির্গত ফোটনের সংখ্যা হবে

$$\frac{d\mathrm{N}}{d\Omega}=\frac{d\mathrm{N}}{d\Omega'}\cdot\frac{d\Omega'}{d\Omega}=\frac{\mathrm{N}(1-\beta^2)}{4\pi(1-\beta\cos\theta)^2} \tag{3-112}$$

আমরা পূর্বেই দেখেছি ( পৃষ্ঠা ১১০ – ১১১ ) যে, দ্রুত বেগের জন্য ফোটন সামনের দিকে কেন্দ্রীভূত হয়। সমীকরণ (3 – 112) থেকে দেখা যায় যে, $\theta>\pi/2$ হলে $\cos\theta$ ঋণাত্মক এবং হরের মান বড় হবে কাজেই $\frac{d\mathrm{N}}{d\Omega}$ কম হবে। কাজেই এখানেও আমরা একই সিদ্ধান্তে পেঁছাই। অতএব কোন তারা যদি পৃথিবীর দিকে দ্রুতবেগে ছুটে আসে তাহলে সেটিকে উজ্জ্বল ও নীলাভ দেখাবে, অপর পক্ষে তারাটি পৃথিবী থেকে দ্রুত বেগে সরে গেলে সেটিকে ক্ষীণ ও রক্তাভ দেখাবে।

প্রসংগক্রমে উল্লেখ করা যেতে পারে যে, ডপলার প্রক্রিয়ার সাহায্যে একটি যুগ্মতারার দু'টি অংশের বেগ নির্ণয় করা হয় এবং তা থেকে তাদের ভর নির্ণয় করা যায়। 1929 খৃীষ্টাব্দে হাবল্ (Hubble) নামক একজন জ্যোতির্বিজ্ঞানী লক্ষ করেন যে, দূরবর্তী সমস্ত নক্ষত্র জগৎ আমাদের নক্ষত্র জগৎ থেকে প্রচণ্ড বেগে সরে যাচ্ছে এবং বেগের পরিমাণ দূরত্বের সংগে অনুপাতী। তা থেকে হাবল সিদ্ধান্ত করেন যে, আমাদের বিশ্ব ক্রমশঃ প্রসারিত হচ্ছে। এখন জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা বিশ্বাস করেন যে, প্রায় $10^{10}$ বছর পূর্বে এই প্রসারণশীল বিশ্বের

আয়তন ছিল শূন্য এবং ঘনত্ব অসীম। তারপর ভীম বেগে এই বিশ্বের প্রসারণ শুরু হয় এবং আজ পর্যন্ত অব্যাহত রয়েছে। মহাকর্ষ বলের ফলে এই প্রসারণের বেগ ক্রমশঃ কমে যাচ্ছে।

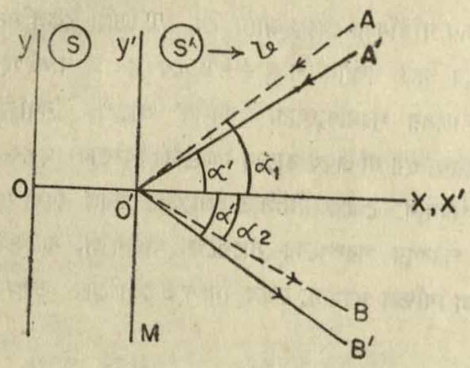
আমরা গ্যাসের গতিবিদ্যা থেকে জানি যে, T ডিগ্রি কেলভিন তাপমাত্রায় গ্যাসের পরমাণুর গড় গতীয় শক্তি $\frac{3}{2}$kT যেখানে k বোল্ট্‌স্‌মান ধ্রুবক। এখন উত্তপ্ত গ্যাসের পরমাণুদ্বারা বিকীর্ণ আলোর বর্ণালী রেখাগুলি জ্যামিতিক সরলরেখা হয় না এবং তাদের কিছুটা বিস্তার থাকে। এর কারণ এই যে, সকল পরমাণু থেকে নিঃসৃত আলোর তরঙ্গ দৈর্ঘ্য সমান হয় না। পরমাণুগুলি পরস্পর পরস্পরের সাপেক্ষে গতিশীল, কাজেই ডপলারের অপসরণের ফলে বিভিন্ন পরমাণু থেকে নিঃসৃত ফোটনের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বিভিন্ন হয়।

প্রথম স্পুটনিক 1957 খৃষ্টাব্দে যখন পৃথিবীর চারদিকে দ্রুতগতিতে ঘুরছিল তখন তা থেকে রেডিও সংকেত পাঠান হচ্ছিল যা পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানের বেতার গ্রাহক যন্ত্রে ধরা পড়ে। ডপলার প্রক্রিয়ার ফলে বেতার সংকেতের কম্পাংকের পরিবর্তন হয়। এই ডপলার অপসরণ থেকে স্ফুটনিকের উচ্চতা ও বেগ নির্ণয় করা সম্ভব হয়েছিল।

***3-8 গতিশীল আয়নার প্রতিফলন :** আলোর অপেরণের সমতুল্য অপর একটি বিষয় হচ্ছে গতিশীল আয়নায় প্রতিফলন। তাপ গতিবিদ্যায় একটি আদর্শ প্রতিফলক বেষ্টিত অবরুদ্ধ স্থানের আয়তনের মন্থর গতিতে পরিবর্তন হলে তার মধ্যস্থ তাপ বিকীরণ প্রবাহের গুণাগুণ পরীক্ষা করা হয়। এই সমস্যার সমাধানের জন্য অপেরণের সূত্র দু'বার প্রয়োগ করতে হয়, প্রথমে আপতিত ও পরে প্রতিফলিত রশ্মির ক্ষেত্রে। উদাহরণ স্বরূপ আমরা সবচেয়ে সহজ সমস্যা নিয়ে আলোচনা করব যেখানে একটি সমতল আয়না নিজ অভিলম্বের দিকে গতিশীল।

মনে করা যাক যে, আয়নাটি S′ কাঠামোয় স্থিতিশীল এবং নিরীক্ষক S কাঠামোয় স্থিতিশীল এবং এই দুই কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ $vx$ অক্ষের সমান্তরাল। অতএব আয়না M এর প্রতিফলক তল $x$ অক্ষের সংগে লম্ব, কাজেই প্রতিফলক তলটি $y'z'$ তলের সংগে অভিন্ন।

যেহেতু $S'$ কাঠামোয় আয়নাটি স্থির অতএব এই কাঠামোয় প্রতিফলনের সাধারণ সূত্রগুলি বলবৎ হবে এবং আপতন কোণ প্রতিফলন কোণের সমান হবে। চিত্রে $\alpha' = A'O'x' = B'O'x'$। মনে করা যাক যে S কাঠামোর




চিত্র 3—14

নিরীক্ষকের কাছে $AO'$ আপতিত রশ্মি এবং $O'B$ প্রতিফলিত রশ্মি। এখানে $AO'x = \alpha_1$ এবং $BO'x = \alpha_2$। আমরা কোণগুলির পরিমাপ করার সময় মনে রাখব যে কোণগুলি $x$ বা $x'$ অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে বামাবর্তে উৎপন্ন হয়। অতএব $S'$ কাঠামোয় আপতন কোণ প্রকৃতপক্ষে হবে $\pi + \alpha'$ এবং প্রতিফলন কোণ $2\pi - \alpha'$। অনুরূপে S কাঠামোয় আপতন কোণ হবে $\pi + \alpha_1$ এবং প্রতিফলন কোণ $2\pi - \alpha_2$। এখন সমীকরণ $(3-95)$ প্রয়োগ করলে আপতন রশ্মির ক্ষেত্রে পাই

$$\cot(\pi + \alpha') = \frac{\cot(\pi + \alpha_1) - \frac{v}{c}\operatorname{cosec}(\pi + \alpha_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{অর্থাৎ } \cot \alpha' = \frac{\cot \alpha_1 + \frac{v}{c}\operatorname{cosec}\alpha_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (3-113)$$

প্রতিফলন কোণের ক্ষেত্রে পাই

$$\cot(2\pi - \alpha') = \frac{\cot(2\pi - \alpha_2) - \frac{v}{c}\operatorname{cosec}(2\pi - \alpha_2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{অর্থাৎ } \cot\alpha' = \frac{\cot\alpha_2 - \frac{v}{c}\operatorname{cosec}\alpha_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (3-114)$$

সমীকরণ (3—113) ও (3—114) থেকে পাই

$$\cot\alpha_1 + \frac{v}{c}\operatorname{cosec}\alpha_1 = \cot\alpha_2 - \frac{v}{c}\operatorname{cosec}\alpha_2$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{\cos\alpha_1 + \frac{v}{c}}{\sin\alpha_1} = \frac{\cos\alpha_2 - \frac{v}{c}}{\sin\alpha_2} \qquad (3-115)$$

অতএব $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{v}{c}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)$

$$= \frac{2v}{c}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \qquad (3-116)$$

যেহেতু $\alpha_1$ ও $\alpha_2$ উভয়েই সূক্ষ্মকোণ অতএব $\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2$ ধনাত্মক। অতএব $\alpha_1 > \alpha_2$।

তাপ গতিবিদ্যায় অবরুদ্ধ ক্ষেত্রের আয়তন বৃদ্ধির হার খুব কম ধরা হয় অর্থাৎ $v \ll c$। কাজেই $\frac{v}{c}$ র প্রথম ঘাতের ঊর্ধ্ব ঘাত উপেক্ষণীয়। অতএব $\alpha_1 - \alpha_2 = \delta\alpha$ একটি ক্ষুদ্র কোণ। অতএব $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \simeq \alpha_1 - \alpha_2 = \delta\alpha$ এবং $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \simeq 1$. সমীকরণ (3 – 116) থেকে পাই

$$\delta\alpha \simeq \frac{2v}{c}\sin\alpha, \text{ যেখানে } \alpha = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \qquad (3-117)$$[1]

---

1 আলোর অপরণের ক্ষেত্রে $\frac{v}{c}$ এর প্রথমঘাত পর্যন্ত রাখলে আমরা পাই (সমীকরণ 3 – 95):

$$\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'} = \frac{\cos\alpha - \frac{v}{c}}{\sin\alpha}$$

অর্থাৎ $\sin(\alpha' - \alpha) = \frac{v}{c}\sin\alpha'$

অতএব $\delta\alpha \simeq \frac{v}{c}\sin\alpha$

এই সমীকরণের সঙ্গে সমীকরণ (3—117) এর তুলনা করলে দেখা যায় যে, শেষোক্ত ক্ষেত্রে কোণের পরিবর্তন অপেরণের পরিমাণের দ্বিগুণ।

এছাড়া প্রতিফলনের ফলে S কাঠামোর সাপেক্ষে আলোর কম্পাঙ্কের পরিবর্তন হবে যেহেতু নিরীক্ষকের সাপেক্ষে আয়না গতিশীল। S′ কাঠামোর দর্শকের কাছে আপাতিত রশ্মির এবং প্রতিফলিত রশ্মির কম্পাংক সমান হবে। সমীকরণ (3—100) থেকে পাওয়া যায় আপতিত রশ্মির ক্ষেত্রে

$$\nu' = \gamma\, \nu_1\left\{1 - \frac{v}{c}\cos(\pi + \alpha_1)\right\} = \gamma \nu_1 \left(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha_1\right) \qquad (3\text{—}118)$$

অনুরূপে প্রতিফলিত রশ্মির ক্ষেত্রে পাই

$$\nu' = \gamma\, \nu_2\left\{1 - \frac{v}{c}\cos(2\pi - \alpha_2)\right\} = \gamma\, \nu_2 \left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha_2\right) \qquad (3-119)$$

সমীকরণ (3—118) ও (3—119) থেকে পাই

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha_2}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha_1} = \frac{c - v\cos\alpha_2}{c + v\cos\alpha_1} \qquad (3\text{—}120)$$

এক্ষেত্রে উপযুক্ত তরঙ্গদৈর্ঘ্য যদি $\lambda_1$ ও $\lambda_2$ হয় তাহলে

$$c = \lambda_1 \nu_1 = \lambda_2\, \nu_2$$

$$\text{অতএব}\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c + v\cos\alpha_1}{c - v\cos\alpha_2} \qquad (3\text{—}121)$$

এখন $\alpha_1$ ও $\alpha_2$ র মধ্যে সম্পর্ক সমীকরণ (3—116) থেকে পাওয়া যায়। তাপ গতিবিদ্যায় $v \ll c$। অতএব

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha_1\right)\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha_2\right)^{-1} \cong 1 + \frac{v}{c} \times (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \qquad (3\text{—}122)$$

মনে করা যাক যে

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \delta\,\lambda_1 = \lambda_1\left(1 + \frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1}\right)$$

অতএব সমীকরণ (3-122) থেকে পাই

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1\left(1 + \frac{\delta\,\lambda_1}{\lambda_1}\right)} \simeq 1 - \frac{\delta\,\lambda_1}{\lambda_1} \simeq 1 + \frac{v}{c}\,(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

অর্থাৎ $\delta \lambda_1 \simeq -\lambda_1 \frac{v}{c} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$ (3—123)

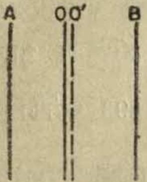
এক্ষেত্রে $\alpha_1 \simeq \alpha_2$, অতএব $\cos \alpha_1 \cong \cos \alpha_2$। যখন আয়নাটি আপতিত রশ্মির দিকে অগ্রসর হয় তখন তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হবে

$$\delta \lambda_1 = -2\lambda_1 \frac{v}{c} \cos \alpha_1 \quad (3—124)$$

এক্ষেত্রে তরঙ্গদৈর্ঘ্য হ্রাস পাবে। কিন্তু আয়নাটি যদি আপতিত রশ্মি থেকে দূরে সরে যায়, অবরুদ্ধ ক্ষেত্রের আয়তন বৃদ্ধি পেলে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে এবং বৃদ্ধির পরিমাণ হবে $2\lambda_1 \frac{v}{c} \cos \alpha_1$। ভীন (Wien) 1893 খ্রীষ্টাব্দে কৃষ্ণবস্তু বিকিরণের ভ্রংশ সূত্র নির্ণয় করার সময় উপরোক্ত সমীকরণ ব্যবহার করেন।

**3-9. কাল প্রসারণের পরীক্ষামূলক সত্যাখ্যান ঃ** আমরা পূর্বেই বলেছি যে, ডপলার প্রক্রিয়ার আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সূত্রের সত্যাখ্যান পরোক্ষভাবে কাল প্রসারণের সত্যতা প্রমাণ করবে। 1868 খ্রীষ্টাব্দে হাগিন্স্ (Huggins) প্রথম তারার আলোর বর্ণালী রেখার ডপলার অপসরণ লক্ষ করেন এবং এই অপসরণের পরিমাণ থেকে তারার পৃথিবী থেকে দূরে সরে যাওয়ার বেগ নির্ণয় করেন। ষ্টার্ক (Stark) 1906 খ্রীষ্টাব্দে তাঁর ক্ষরণ নলের মধ্যে ক্যানাল রশ্মি (অর্থাৎ দ্রুতগামী ধণাত্মক হাইড্রোজেন আয়ন) থেকে নির্গত আলোয় ডপলার প্রক্রিয়ার অস্তিত্ব প্রমাণ করেন কিন্তু তাঁর পরীক্ষা আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সূত্রের সত্যাখ্যান করার পক্ষে যথেষ্ট যথার্থ ছিল না। এর অব্যবহিত পরেই 1907 খ্রীষ্টাব্দে আইনষ্টাইন প্রস্তাব করেন যে ধণাত্মক ক্যানাল রশ্মির উপর পরীক্ষা করে অনুপ্রস্থ ডপ্‌লার প্রক্রিয়ার সত্যাখ্যান করা সম্ভব। আমরা দেখেছি যে, ডপলার অপসরণের মধ্যে দুটি অংশ আছে। একটিকে প্রাচীন অংশ বলা যায়, যেটি প্রাক্ আপেক্ষিকতা যুগেও জানা ছিল এবং এটি $\frac{v}{c}$ এর প্রথম ঘাতের সঙ্গে অনুপাতী। অন্য অংশটি আধুনিক আপেক্ষিকতা জনিত অংশ এবং এটি $\frac{v}{c}$ এর দ্বিতীয় ঘাতের সঙ্গে অনুপাতী। দ্বিতীয়টির পরিমাণ অনেক কম এবং এটির অস্তিত্ব পরীক্ষা করার জন্য অত্যন্ত যথার্থ যন্ত্র প্রয়োজন।

তাছাড়া দ্বিতীয় অংশটিকে প্রথমটি থেকে পৃথক করা মুস্কিল। অনুপ্রস্থ ডপলার অপসরণ পরীক্ষা করতে হলে যন্ত্রটিকে সঠিক 90° কোণে স্থাপন করতে হয়। 90° থেকে অতি সামান্য পার্থক্য হলেও প্রথম অংশটির কিছু অংশ এর সঙ্গে যুক্ত হবে এবং যেহেতু প্রথম অংশটি $\frac{v}{c}$ র প্রথম ঘাতের সঙ্গে অনুপাতী, এই ত্রুটি উপেক্ষণীয় নয়।




চিত্র 3—15

আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সূত্রের প্রথম পরীক্ষামূলক সত্যাখ্যান করেন প্রায় ত্রিশ বছর পরে 1938 খৃীষ্টাব্দে আইভ্স্ (Ives) এবং স্টিলওয়েল (Stillwell)। তাঁরা আয়নাদ্বারা ক্যানাল রশ্মির সামনেও পিছন দিকে নির্গত আলোকে একই স্থানে ব্যতিচার মাপক যন্ত্রের বিদারের উপর নিক্ষেপ করেন। ব্যাতিচার মাপক যন্ত্রের অভিনেত্রের মধ্যে দু'টি অপসৃত বর্ণালী রেখা মূল রেখার দু'দিকে দেখা যাবে। চিত্র 3-15এ A ও B দুটি অপসৃত রেখা ক্যানাল রশ্মির সামনে ও পিছন দিকের আলো থেকে পাওয়া যায় এবং O মূল অনপসৃত রেখাটির অবস্থান। A ও B রেখা দু'টির গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য সম্পন্ন বর্ণালী রেখাটি O′ এ ফুটকি দিয়ে দেখান হয়েছে। সমীকরণ (3-102) অনুযায়ী A ও B রেখার তরঙ্গদৈর্ঘ্য যথাক্রমে

$$\lambda_1=\gamma\,\lambda_0\left(1-\frac{v}{c}\right) \text{ ও } \lambda_2=\gamma\,\lambda_0\left[1+\frac{v}{c}\right]$$

অতএব গড় তরঙ্গ দৈর্ঘ্য অর্থাৎ O′ এর তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $\lambda_m$ হবে

$$\lambda_m=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cong\lambda_0\left[1+\tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right]$$

প্রাচীন মত অনুযায়ী $\lambda_m=\lambda_0$ হবে। কাজেই $\lambda_0$ থেকে $\lambda_m$ এর আনুপাতিক পার্থক্য হবে।

$$\frac{\lambda_m-\lambda_0}{\lambda_0}=\tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

আইভ্স এবং স্টিলওয়েল ক্ষরণ নলের দুই প্রান্তের মধ্যে তড়িৎ বিভবের পার্থক্যের বিভিন্ন মানের জন্য $H_\beta$ রেখার তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অপসরণ নির্ণয়

করেন। তড়িৎ বিভবের পার্থক্য থেকে ইলেকট্রনের বেগ নির্ণয় করা যায় এবং সমীকরণ (3−125) এর সত্যাখ্যান করা যায়। এই পরীক্ষায় $\frac{v}{c}$ এর মান ছিল প্রায় 0·005। আইভ্স্ এবং স্টিলওয়েল 1941 খ্রীষ্টাব্দে এই পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করেন এবং আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সত্যাখ্যান করেন। প্রথম ঘাত অপসরণের পরিমাণ

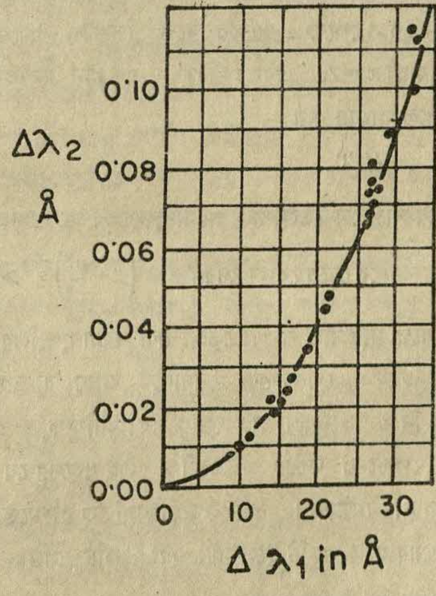
$$(\Delta\lambda)_1 = \frac{v}{c}\lambda_0 \qquad (3-126)$$

দ্বিতীয় ঘাত অপসরণের পরিমাণ

$$(\Delta\lambda)_2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\lambda_0 \qquad (3-127)$$

অতএব $(\Delta\lambda)_2 = \frac{1}{2\lambda_0}(\Delta\lambda)_1{}^2 \qquad (3-128)$

অতএব $(\Delta\lambda)_2$ এবং $(\Delta\lambda)_1$ এর একটি লেখ অধিবৃত্ত হবে। চিত্র 3-16 এ




চিত্র 3—16

বক্ররেখাটি তত্ত্বগত মানগুলি থেকে আঁকা হয়েছে এবং পরীক্ষালব্ধ ফলগুলি বিন্দুদ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে। এই পরীক্ষাটি গুরুত্বপূর্ণ এই কারণে যে,

এই প্রথম কাল প্রসারণের সত্যাখ্যান করা হল। মাইকেলসন—মর্লে পরীক্ষার ফল আমরা দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন দ্বারা ব্যাখ্যা করতে পারি কিন্তু ডপলার অপসরণের দ্বিঘাতের উপর নির্ভরশীল অংশ পুরোপুরি কাল প্রসারণের ফল। 1939 খ্রীষ্টাব্দে ওটিং (Otting) পরীক্ষা দ্বারা অনুপ্রস্থ ডপলার অপসরণের অস্তিত্ব সমর্থন করেন।[1] 1963 খ্রীষ্টাব্দে কুন্ডিং (Künding) যথার্থতর পরীক্ষার সাহায্যে পরীক্ষাগত ভ্রমসীমা শতকরা 1·1 ভাগের মধ্যে আপেক্ষিকতা তত্ত্বগত মানের সত্যাখ্যান করেন।

তেজস্ক্রিয় পরমাণুর ক্ষয়ের নিয়ম অনুযায়ী যদি $S'$ কাঠামোর মূল বিন্দুতে $t'=0$ কালাঙ্কে $N_o$ সংখ্যক তেজস্ক্রিয় পরমাণু স্থির থাকে তা হলে $t'$ সময় পরে অক্ষয়িত পরমাণুর সংখ্যা হবে

$$N = N_o e^{-t/T_0} \tag{3-129}$$

যেখানে $T_o$ তেজস্ক্রিয় পরমাণুর গড় আয়ু। তেজস্ক্রিয় পরমাণুগুলি জাড্যিক কাঠামো $S$ এর সাপেক্ষে $x$ অক্ষের দিকে গতিশীল। কাজেই লোরেন্টস্ রূপান্তর সূত্র অনুযায়ী $x=\gamma vt'$ এবং $t=\gamma t'$। এই মান সমীকরণ (3 – 129) এ প্রতিস্থাপন করলে পাওয়া যায়

$$N = N_o e^{-t/\gamma T_o} \tag{3-130}$$

অতএব $S$ কাঠামোর সাপেক্ষে তেজস্ক্রিয় পরমাণুগুলির গড় আয়ু হবে $\gamma T_o$ অর্থাৎ $S'$ কাঠামোর আয়ুর চেয়ে বেশী কারণ $\gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} >$। অতএব পরীক্ষাগারের সাপেক্ষে দ্রুতগতি সম্পন্ন তেজস্ক্রিয় পরমাণুগুলির আয়ু যথার্থ আয়ুর চেয়ে বেশী হবে। তেজস্ক্রিয় পরমাণুর আয়ু বৃদ্ধির পরীক্ষাদ্বারা সত্যাখ্যান করা হয় নি। অনেকগুলি মৌল-কণিকা আবিষ্কৃত হয়েছে যাদের ভর ইলেকট্রন ও প্রোটনের ভরের মধ্যবর্তী। এই ধরণের যে কণিকা প্রথম আবিষ্কৃত হয় তার নাম মিউয়ন। এটিকে মহাজাগতিক রশ্মিতে পাওয়া যায়। মিউয়ন কণিকার ক্ষয়ের ফলে একটি ইলেকট্রন এবং একটি মিউয়ন নিউট্রিনো ও একটি এন্টিনিউট্রিনো নির্গত হয়ঃ

1. 1961 খ্রীষ্টাব্দে ম্যাণ্ডেলবার্গ (Mandelburg) ও উইটেন (Witten) যথার্থতর যন্ত্রের সাহায্যে আইভস্ ও স্টিলওয়েলের পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করেন।

$$\mu^{\pm} \longrightarrow e^{\pm} + \nu_{\mu} + \tilde{\nu}_{\mu}$$

পরীক্ষাগারে মিউয়ন কণিকার যথার্থ আয়ু অর্থাৎ স্থির অবস্থার আয়ু নির্ণয় করে দেখা গেছে যে

$$T_0 = 2 \cdot 2 \times 10^{-6} \text{ সেকেন্ড}$$

বায়ুমণ্ডলের উপরিভাগের সঙ্গে মহাজাগতিক রশ্মির প্রাথমিক কণিকার মিথষ্ক্রিয়ার ফলে পাই মেসনের সৃষ্টি হয় এবং সেগুলি পরে ক্ষয়প্রাপ্ত হয়ে মিউয়নের সৃষ্টি করে। যদি এই মিউয়নগুলি পৃথিবীর কাঠামোর সাপেক্ষে $2 \cdot 2 \times 10^{-6}$ সে. অপরিবর্তিত থাকত তা হলে এই কণিকার সর্বোচ্চ বেগ অর্থাৎ শূন্যে আলোর বেগ থাকলেও মাত্র $3 \times 10^{10} \times 2 \cdot 2 \times 10^{-6}$ সে. মি. $= 660$ মি. দূরত্ব অপরিবর্তিত অবস্থায় অতিক্রম করত। এটা সত্য হলে বায়ুমণ্ডলের ঊর্ধ্বসীমার নিকট উৎপন্ন মিউয়নগুলির মধ্যে অতি অল্পই সমুদ্রপৃষ্ঠে অপরিবর্তিত অবস্থায় থাকত। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে প্রচুর সংখ্যক মিউয়ন সমুদ্রপৃষ্ঠে পাওয়া যায়। কাজেই হয় সমুদ্রপৃষ্ঠের মিউয়নগুলির বেগ আলোর শূন্যের বেগের চেয়ে বেশী নতুবা পৃথিবীর কাঠামোর সাপেক্ষে তাদের আয়ু $2 \cdot 2 \times 10^{-6}$ সে. এর চেয়ে বেশী। প্রথমটি আপেক্ষিকতা তত্ত্বের পরিপন্থী। সমুদ্রপৃষ্ঠের মিউয়নগুলির গড় শক্তি $3 \times 10^{9}$ ইলেক্ট্রন ভোল্ট। কাজেই তাদের ক্ষেত্রে $\gamma \sim 30$। অতএব আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী পৃথিবীর সাপেক্ষে তাদের আয়ু যথার্থ আয়ুর 30 গুণ হবে এবং তারা $30 \times 660$ মি $=$ 20 কি. মি. দূরত্ব অতিক্রম করবে। কাজেই এক্ষেত্রে সমুদ্রপৃষ্ঠে প্রচুর সংখ্যক মিউয়ন পাওয়া সম্ভব। যদি আমরা একটি নিরীক্ষককে মিউয়নের সঙ্গে গতিশীল বলে কল্পনা করি তাহলে তার কাছে মিউয়নের আয়ু যথার্থ আয়ুর সমান হবে। কিন্তু তার মতে দৈর্ঘ্য সঙ্কোচনের ফলে যাত্রাপথের 20 কি. মি. দূরত্ব 660 মি. বলে মনে হবে।

1941 খ্রীষ্টাব্দে রসি (Rossi) এবং হল (Hall) ওয়াশিংটন পর্বতের চূড়ায় ও পাদদেশে মিউয়নের উপর পরীক্ষা করে প্রমাণ করেন যে, তাদের আয়ু সত্য সত্যই বেড়ে যায়। সার্ন (CERN) পরীক্ষাগারের উচ্চশক্তি কণিকা উৎপাদক যন্ত্রদ্বারা 1968 খ্রীষ্টাব্দে পরীক্ষা করে শতকরা 1 ভাগ ভ্রমসীমার মধ্যে কাল প্রসারণের সত্যাখ্যান করা হয়।

1972 খ্রীষ্টাব্দে বেলি (Bailey) ও তাঁর সহকর্মীরা সার্ণে (CERN) সঞ্চায়ক বেষ্টনী যন্ত্রে উৎপন্ন উচ্চশক্তি সম্পন্ন মিউয়নের আয়ু নির্ণয় করেন। এদের ক্ষেত্রে $\gamma \approx 12$ ছিল এবং শতকরা 1 ভাগ ভ্রমসীমার মধ্যে কাল প্রসারণের সত্যাখ্যান করা হয়। বেলি ও তাঁর সহকর্মীরা এরপর 1977 খ্রীষ্টাব্দে বৃত্তাকার পথে ধাবমান আরও উচ্চশক্তি সম্পন্ন ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আধানযুক্ত মিউয়নের আয়ু নির্ণয় করেন। এদের শক্তি ছিল 3·094 জি. ই. ভো. (Gev) এবং $\gamma = 29{\cdot}33$। এক্ষেত্রে ভ্রমসীমা ছিল শতকরা 0·2 ভাগ। তাছাড়া দেখা যায় যে, ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আধানযুক্ত মিউয়নের যথার্থ আয়ু সমান (ভ্রমসীমার মধ্যে) এবং এই পরীক্ষা আরও প্রমাণ করে যে, মহাকর্ষজ ত্বরণের $10^{18}$ গুণ ত্বরণ থাকলেও এবং $10^{-15}$ সে. মি. পর্যন্ত দূরত্বের ক্ষেত্রেও কাল প্রসারণ সূত্র বলবৎ থাকে।

আয়ু পরিবর্তনের প্রত্যক্ষভাবে সত্যাখ্যান করা হয় প্রথম 1952 খ্রীষ্টাব্দে আহিত পাই মেসনের ক্ষেত্রে। ডারবিন (Durbin), লোর (Loar) এবং হ্যাভেন্স (Havens) সাইক্লোট্রোন থেকে উৎপন্ন উচ্চশক্তি পাই মেসনের আয়ু নির্ণয় করে তা থেকে যথার্থ আয়ু গণনা করেন, আইনষ্টাইনের কাল প্রসারণের সূত্র অনুসারে। ইতিপূর্বেই 1951 খ্রীষ্টাব্দে জ্যাকবসন (Jacobson), শুল্ট্স্ (Schulz) ও স্টাইনবার্গার (Steinberger) এবং উইগ্যাণ্ড (Wiegand) অন্যভাবে এই যথার্থ আয়ু নির্ণয় করেছিলেন। এই দুই পরীক্ষার ফলের মধ্যে মিল থাকায় কাল প্রসারণের সত্যাখ্যান হয়েছিল (শতকরা দশভাগ ভ্রমসীমার মধ্যে)।

***3-10. ম্যোসবাওয়ার (Mössbauer) প্রক্রিয়া ও কাল প্রসারণ :** কাল প্রসারণের সত্যাখ্যান করার জন্য অনুষ্ঠিত সর্বাধুনিক পরীক্ষাগুলি বুঝতে হলে ম্যোসবাওয়ার প্রক্রিয়ার কথা কিছুটা বলা দরকার। ভরবেগ সংরক্ষণ করার জন্য কোন পরমাণু নিউক্লিয়াস $h\nu$ শক্তি সম্পন্ন একটি ফোটন নিক্ষেপ করলে পরমাণু নিউক্লিয়সটি স্বয়ং প্রতিক্ষিপ্ত হয়। যদি ফোটন নিক্ষেপের পূর্বে কেন্দ্রটি স্থির থাকে তা হলে নিউক্লিয়াসটির প্রতিক্ষেপ ভরবেগ হবে

$$p_r = \frac{h\nu}{c} \qquad (3\text{—}131)$$

যেখানে $\nu$ ফোটনের কম্পাঙ্ক এবং $h$ প্লাঙ্কের ধ্রুবক। আমরা জানি যে, $h\nu$ শক্তি সম্পন্ন ফোটন নিক্ষেপের ফলে নিউক্লিয়স তার উত্তেজিত অবস্থা ($E^*$) থেকে সর্ব নিম্নাবস্থায় (E) সংক্রমিত হয়। শক্তি সংরক্ষণ সূত্র অনুসারে

$$E^* - E = \Delta E = T_r + h\nu \qquad (3—132)$$

যেখানে $T_r$ প্রতিক্ষিপ্ত নিউক্লিয়সের গতীয় শক্তি। কিন্তু নিউক্লিয়সের ভর এত বেশী যে তার বেগ $c$ এর চেয়ে অনেক কম। কাজেই নিউক্লিয়সের গতীয় শক্তি নিউটনীয় বলবিদ্যার সূত্রানুযায়ী প্রকাশ করা যায়ঃ

$$T_r = \tfrac{1}{2} M v_r^2 = \frac{p_r^2}{2M} = \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2} \qquad (3—133)$$

যেখানে M নিউক্লিয়সের ভর। অতএব সমীকরণ (3—132) থেকে পাই

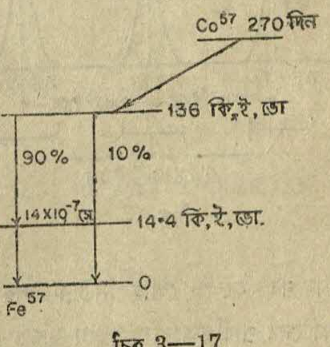
$$h\nu = \Delta E - \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2} \qquad (3—134)$$

যেহেতু $h\nu \ll 2Mc^2$, উপরোক্ত সমীকরণের ডানদিকের দ্বিতীয় রাশিটি আপেক্ষিকতা তত্ত্ব জনিত সংশোধক রাশি। আমরা এখানে $h\nu$ এর পরিবর্তে $\Delta E$ প্রতিস্থাপিত করতে পারি যদি দ্বিঘাত রাশি উপেক্ষণীয় হয়। এখন

$$h\nu \simeq \Delta E\left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right) \qquad (3—135)$$

এখন আমরা জানি যে, 57 ভরসংখ্যাবিশিষ্ট কোবাল্টের আইসোটোপ (isotope) $Co^{57}$ এর আয়ু 270 দিন এবং $Co^{57}$ এর ক্ষয়ের ফলে লোহার আইসোটোপ $Fe^{57}$ উত্তেজিত অবস্থার সৃষ্ট হয়। এই পরমাণু রূপান্তর ইলেকট্রনবন্দীকরণ দ্বারা সংঘটিত হয়

$$Co^{57} + e^- = Fe^{57} + \nu \qquad (3—136)$$




চিত্র 3—17

শতকরা 90 ভাগ লৌহ নিউক্লিয়স 14·4 কি ই. ভো. শক্তিসম্পন্ন গ্যামা রশ্মির ফোটন নিক্ষেপ করে সর্বনিম্ন অবস্থায় পেঁছায়। এই ধরণের ক্ষয়ের জন্য আয়ু মাত্র $1{\cdot}4 \times 10^{-7}$

সেকেন্ড। হাইজেনবার্গের ( Heisenberg) অনির্দেশ্যতাবাদ অনুযায়ী

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

যেখানে $\Delta E$ শক্তির অনির্দেশ্যতা এবং $\Delta t$ কালের অনির্দেশ্যতা এবং $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ এক্ষেত্রে $\Delta t = 1{\cdot}4 \times 10^{-7}$ সে. অতএব

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1{\cdot}05 \times 10^{-27}}{1{\cdot}4 \times 10^{-7}} = 7{\cdot}5 \times 10^{-21} \text{ আর্গ} = 4{\cdot}7 \times 10^{-9}$$

ই. ভো। (3—137)

অতএব গ্যামা রশ্মি ফোটনের শক্তির অনির্দেশ্যতা বা বিস্তৃতি হবে $4{\cdot}7 \times 19^{9-}$ ই. ভো। $Fe^{57}$ এর পারমাণবিক ভর 56·95477 পারমাণবিক ভরের একক। অতএব তার স্থিতিশক্তি

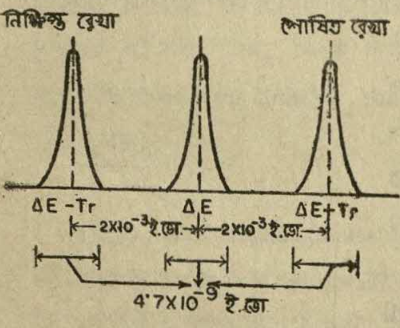
$$Mc^2 = 53035{\cdot}46 \text{ মি. ই. ভো.}$$

অতএব প্রতিক্ষেপজনিত গতীয় শক্তি ( সমীকরণ 3—133)

$$T_r = \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2} = \frac{(14{\cdot}4)^2 \times 10^6}{2 \times 5\,3 \times 10^{10}} = 2 \times 10^{-3} \text{ ই. ভো.} \qquad (3\text{—}138a)$$

এই প্রতিক্ষেপের ফলে নির্গত ফোটনের শক্তি হবে

$$h\nu = \Delta E - T_r = (14{\cdot}4 - 2 \times 10^{-6}) \text{ কি. ই. ভো.} \qquad (3\text{—}138b)$$




চিত্র 3— 8

আমরা জানি যে, $\Delta E$ শক্তি সম্পন্ন ফোটন সর্বনিম্ন স্তরে একটি লৌহ নিউক্লিয়সের উপর আপতিত হলে এই ফোটন শোষিত হবে এবং লৌহ নিউক্লিয়স তার উত্তেজিত অবস্থায় ফিরে যাবে। এই প্রক্রিয়াকে অনুরণন প্রতিপ্রভা বলা হয়। তবে এ ক্ষেত্রে এই ফোটনের শোষণের ফলেও লৌহ নিউক্লিয়সের প্রতিক্ষেপ হবে এবং পূর্ণ শোষণের জন্য ফোটনের প্রারম্ভিক শক্তি হওয়া উচিত

$$h\bar{\nu} = \Delta E + T_r \qquad (3\text{—}139)$$

চিত্র 3—18 এ নিক্ষিপ্ত রেখা, শোষিত রেখা এবং $\Delta E$ দেখান হয়েছে। রেখাটির স্বাভাবিক বিস্তৃতি $4{\cdot}7 \times 10^{-9}$ ই. ভো. প্রতিক্ষেপ জনিত পার্থক্যের চেয়ে অনেক কম। অতএব নিক্ষিপ্ত ও শোষিত রেখার মধ্যে প্রাবরণ থাকবে না। কাজেই $Fe^{57}$ নিউক্লিয়সের অনুরণন প্রতিপ্রভা হবে না। যদি নিউক্লিয়সটি নিরীক্ষকের সাপেক্ষে গতিশীল হয় তা হলে ডপলার অপসৃত কম্পাঙ্ক হবে :

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma\left(1 - \frac{\mathbf{n.v}}{c}\right)} \qquad (3—140)$$

যদি নিউক্লিয়সটি নিরীক্ষক অভিমুখে গতিশীল হয় তা হলে $\mathbf{n.v} = v$,

অতএব

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)$$

$$\approx \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} + \tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

অতএব $\nu - \nu_0 \approx \nu_0 \frac{v}{c}$ প্রথমঘাত রাশি পর্যন্ত। (3—141)

তাপ গতিবিদ্যা অনুযায়ী কঠিন বস্তুর একটি পরমাণুর T কেলভিন তাপমাত্রায় গড় গতীয় শক্তি $\frac{3}{2}kT$ যেখানে $k$ বোল্টস্‌মান ধ্রুবক। অতএব

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 = \tfrac{3}{2}kT$$

অর্থাৎ
$$\frac{v}{c} = \left(\frac{3kT}{Mc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3—142)$$

সাধারণ গৃহের তাপমাত্রায় $T \sim 300°K$, কাজেই

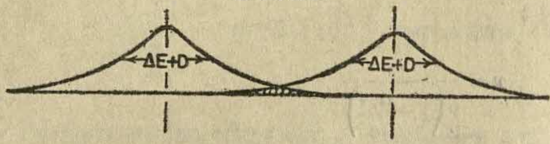
$$\frac{v}{c} = 1{\cdot}2 \times 10^{-6} \qquad (3—143)$$

কাজেই সমীকরণ (3—141) ও (3 – 143) অনুযায়ী তাপমাত্রার সঙ্গে ফোটনের শক্তির পরিবর্তন হবে।

$$D \equiv h(\nu - \nu_0) = h\nu_0 \frac{v}{c} = 17{\cdot}3 \times 10^{-6} \text{ কি. ই. ভো.}$$

এক্ষেত্রে ধরা হয়েছে যে, পরমাণুটি অবাধে বিচরণ করতে পারে। লক্ষণীয় যে, এই পার্থক্য নিক্ষিপ্ত রেখা ও শোষিত রেখার কম্পাঙ্কের মধ্যে পার্থক্যের

সঙ্গে $(4 \times 10^{-6})$ তুলনীয়। কাজেই তাপমাত্রা জনিত এই রেখাগুলির বিস্তৃতির ফলে তাদের মধ্যে প্রাবরণ হবে ( চিত্র 3—19) এবং নিউক্লীয় অনুরণন প্রতিপ্রভা ঘটতে পারে। কাজেই তাপমাত্রা বাড়ার সঙ্গে অনুরণন প্রতিপ্রভা বৃদ্ধি পাবে বলে আশা করা যায়।



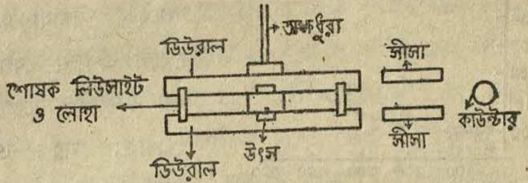

চিত্র 3-19

অন্যভাবেও এই ডপলার অপসরণের সৃষ্টি করা যায়। 1951 ও 1953 খৃষ্টাব্দে মুন ( Moon ) এবং তাঁর সহকর্মীরা একটি আবর্তকের প্রান্তে একটি তেজস্ক্রিয় উৎস রেখেছিলেন এবং আবর্তককে দ্রুতগতিতে ঘুরিয়ে দেখান যে, অনুপ্রস্থ ডপলার অপসরণের পরিমাণ $2T_r$ এর সঙ্গে সমান হলে অনুরণন প্রতিপ্রভা দেখা যায়। তাঁরা $Hg^{19}$ নিউক্লিয়সের 412 কি. ই. ভো. রেখাটি ব্যবহার করেন।

ম্যোসবাওয়ার 1957 খৃষ্টাব্দে $Ir^{191}$ নিউক্লিয়সের অনুরণন প্রতিপ্রভা পরীক্ষা করতে গিয়ে লক্ষ করলেন যে, তেজস্ক্রিয় উৎস শীতল করলে অনুরণন প্রতিপ্রভা বৃদ্ধি পায়। আমরা কিন্তু এর বিপরীত আশা করেছিলাম। এই অদ্ভুত ফল ব্যাখ্যা করার জন্য ম্যোসবাওয়ার প্রস্তাব করেন যে, কঠিন বস্তুতে $Ir^{191}$ নিউক্লিয়সগুলি অবাধে নড়াচড়া করতে পারে না। এই নিউক্লিয়সগুলি কেলাস জাফরিতে এমন দৃঢ়ভাবে নিহিত যে ক্ষয়ের সময় প্রতিক্ষেপ ভরবেগ পুরো কেলাসটিই গ্রহণ করে। কাজেই কেলাসটি যদি অতি ক্ষুদ্রও হয় অর্থাৎ এটি এক মাইক্রন বাহু বিশিষ্ট একটি ঘনক্ষেত্র হয় তা হলেও তাতে $10^{10}$ সংখ্যক পরমাণু থাকবে। অতএব সমীকরণ $(3-138a)$ কে $10^{10}$ দিয়ে ভাগ করতে হবে। কাজেই এক্ষেত্রে প্রতিক্ষেপের পরিমাণ উপেক্ষণীয়। ফলে নিক্ষিপ্ত রেখা এবং শোষিত রেখার মধ্যে প্রাবরণ হবে। এক্ষেত্রে রেখাগুলির স্বাভাবিক বিস্তৃতি $4.7 \times 13^{-9}$ ই. ভো. এবং রেখার শক্তি $14.4 \times 10^{3}$ ই. ভো. অর্থাৎ বিস্তৃতি $3 \times 10^{-12}$ ভাগ। অতএব ম্যোসবাওয়ার সঠিক কম্পাঙ্ক

নিরূপণের এক উপায় আবিষ্কার করলেন যার ভ্রমসীমা $10^{12}$ ভাগের তিনভাগ। অতএব এইভাবে কাল নিরূপণের এক অত্যন্ত যথার্থ পদ্ধতিও আবিষ্কৃত হল।

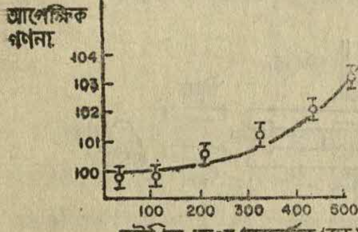
এই ম্যোসবাওয়ার প্রক্রিয়া ব্যবহার করে কাল প্রসারণের সত্যাখ্যানের জন্য কয়েকটি পরীক্ষা করা হয়। এই ধরণের প্রথম পরীক্ষা করেন 1960 খ্রীষ্টাব্দে হে ( Hay ), শিফার ( Schifler ), ক্র্যানশ ( Cranshaw ) এবং এগেলস্টাফ্ ( Egelstaff )। তাঁরা একটি 0·8 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট বেলনের (চিত্র 3—20) বক্রতলের উপর $Co^{57}$ উৎস স্থাপন করেন। এই বেলনটির দুই প্রান্ত দু'টি




চিত্র 3-20

গোলাকার ডিউরাল ( Dural ) প্লেটের সঙ্গে দৃঢ়ভাবে যুক্ত। এই উৎসের সঙ্গে সমকেন্দ্রিক 13·28 সে. মি. ব্যাস বিশিষ্ট এবং 0·31 সে. মি. পুরু একটি লিউসাইটের ( Lucite ) তৈরী ফাঁপা বেলন স্থাপন করা হয়েছিল। এটিও ডিউরাল প্লেটের সঙ্গে দৃঢ়ভাবে যুক্ত ছিল। উৎস থেকে 14 কি. ই. ভো. গ্যামা রশ্মি নিক্ষিপ্ত হয়। লিউসাইট বেলনের ভিতরের অংশ শতকরা 50 ভাগ $Fe^{57}$ আইসোটোপ বিশিষ্ট লৌহদ্বারা আবৃত ছিল এবং গ্যামা রশ্মির শোষকের কাজ করে। পুরা দু'টি বেলন একটি সাধারণ অক্ষধুরার চারদিকে আবর্তন করতে পারে। যে গ্যামা রশ্মি শোষিত হয় না তা সীসক খণ্ডের মধ্য দিয়ে জেনন্ ( xenon ) গ্যাসপূর্ণ কাউন্টারে ধরা পড়ে। বেলনদ্বয়ের সর্বোচ্চ কৌণিক বেগ ছিল সেকেণ্ডে 500 পাক ( অর্থাৎ স্পর্শিনী বেগ 207 মি./সে. )। ছোট বেলনের উপরিতলের বেগ $R_1\omega$ যেখানে $R_1$ বেলনের ব্যাসার্ধ এবং $\omega$ কৌণিক বেগ। স্পষ্টতঃই এখানে শুধু অনুপ্রস্থ ডপলার অপসরণ ঘটবে কারণ বেগ অনুপ্রস্থ দিকে। স্থির ঘড়ির তুলনায় এই বেলনের উপরিতলে কাল প্রসারণের পরিমাণ হবে $\left(1+\frac{1}{2}\frac{R_1^2\omega^2}{c^2}\right)$ গুণ। অনুরূপে বাহিরের বেলনের ব্যাসার্ধ

R হলে তার উপর কাল প্রসারণের পরিমাণ হবে $\left(1+\frac{1}{2}\frac{R_2{}^2\omega^2}{c^2}\right)$ ।
কাজেই গ্যামা রশ্মির উৎসের সাপেক্ষে শোষকের কাল প্রসারণের পরিমাণ হবে
$$1+\frac{1}{2}\frac{(R_2{}^2-R_1{}^2)\omega^2}{c^2}=1+\frac{1}{2}\frac{(6\cdot64)^2-(0\cdot4)^2}{9\times10^{20}}\omega^2$$
$=2\cdot44\times10^{-20}\omega^2$ । কাজেই ঘূর্ণন বেগ বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে উৎস ও শোষকের বর্ণালী রেখার প্রাবরণ নষ্ট হবে এবং শোষণের পরিমাণ কমে যাবে, কাজেই কাউণ্টারের গণনা বৃদ্ধি পাবে। যথাযথভাবে বলতে গেলে এখানে বেগ সরলরৈখিক নয় কাজেই লোরেন্টস্ রূপান্তর প্রযোজ্য নয়। এটি বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের গণ্ডির বাহিরে এবং সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের অন্তর্ভুক্ত। কিন্তু অল্প সময়ের জন্য এই বেগকে সরলরৈখিক ধরা যায় ; কাজেই এই ঘূর্ণন গতিকে অনেকগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরৈখিক গতির সমষ্টি হিসাবে দেখা যায়। কাজেই উপরোক্ত গণনার ফল সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব থেকেও পাওয়া যায়।




চিত্র 3-21

কৌণিক বেগের সাপেক্ষে আপেক্ষিক গণনার হারের লেখ অংকন করা হয় (চিত্র 3-21)। চিত্রে তত্ত্বগতভাবে নির্ণীত বক্ররেখা লেখ দেখান হয়েছে এবং পরীক্ষাদ্বারা নির্ণীত গণনা এবং তার প্রমাণ বিচ্যুতি যথাক্রমে একটি ক্ষুদ্র বৃত্ত এবং তার সঙ্গে যুক্ত উল্লম্ব রেখা দ্বারা নির্দিষ্ট হয়েছে। চিত্র থেকে স্পষ্ট যে, দ্রুত হারে তেজস্ক্রিয় উৎস আবর্তিত হলে গণনার সংখ্যা শতকরা 30 ভাগ বৃদ্ধি পায় এবং পরীক্ষালব্ধ বৃদ্ধি ও তত্ত্বগত বৃদ্ধির মধ্যে মিল আশানুরূপ।

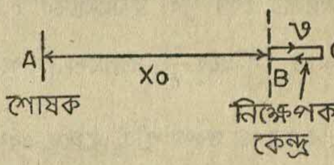
এর পর 1963 খৃষ্টাব্দে ক্যান্ডিক এবং 1965 খৃষ্টাব্দে চ্যাম্পনে, (Champeney) আইজ়াক (Isaak) এবং খাঁ (Khan) এই পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করেন।

আমরা পূর্বেই বলেছি যে, নিক্ষিপ্ত রেখা অথবা শোষিত রেখার বিস্তৃতি

তাপমাত্রার উপর নির্ভর করে। কাজেই উৎস বা শোষকের তাপমাত্রার পরিবর্তন করলে চিত্র 3-20 র কাউন্টারের গণনার পরিবর্তন হবে।

শেরউইন (Sherwin) 1960 খৃষ্টাব্দে প্রস্তাব করেন যে, পরীক্ষাদ্বারা ম্যোসবাওয়ার ক্রিয়ার তাপমাত্রার উপর নির্ভরশীলতার পরিমাপ করা হলে প্রকারান্তরে কাল প্রসারণের সত্যাখ্যান করা হবে।

কেলাসের মধ্যে পরমাণুগুলি স্থির থাকে না। অবাধ গতি না থাকলেও তারা পরীক্ষাগারের সাপেক্ষে তাদের সাম্যাবস্থানের চারদিক স্পন্দিত হয়। কাজেই গ্যামা রশ্মি নির্গত হবার সময় পরমাণুগুলি পরীক্ষাগারের সাপেক্ষে গতিশীল। বেগের গড় কেলাসের তাপমাত্রার উপর নির্ভর করে। 14·4 কি. ই. ভো. গ্যামা রশ্মির কম্পাঙ্ক সেকেণ্ডে $3{\cdot}46\times10^{18}$ এবং পরমাণুর এই উত্তেজিত অবস্থার গড় আয়ু $1{\cdot}4\times10^{-7}$ সে.। কাজেই এই সময়ে গ্যামা রশ্মিজনিত তরঙ্গ $5\times10^{11}$ টি স্পন্দন পূর্ণ করে। কেলাসে আয়নের স্পন্দনের কম্পাঙ্ক সেকেণ্ডে $\sim10^{13}$ কাজেই $Fe^{57}$ এর উত্তেজিত অবস্থার গড় আয়ুষ্কালের মধ্যে নিউক্লিয়সটি অনেকবার স্পন্দিত হবে। গণনা সহজ করার জন্য মনে করব যে নিউক্লিয়সের স্পন্দন এক মাত্রার। মনে করা যাক যে নিউক্লিয়সটি $x$ অক্ষ (চিত্র 3-22) বরাবর স্পন্দিত হয়। ধরা যাক যে নিউক্লিয়সটি B বিন্দু থেকে ডান দিকে অবিচল $v$ বেগে C পর্যন্ত গিয়ে দিক পরিবর্তন করে এবং পুনরায় $v$ বেগে B তে ফিরে আসে। এইভাবে নিউক্লিয়সটি অবিচল $v$ বেগে ক্রমাগত আসা যাওয়া করে।




চিত্র 3-22

মনে করা যাক যে, নিউক্লিয়সটির B থেকে C পর্যন্ত গিয়ে ফিরে আসতে পরীক্ষাগারের ঘড়ি অনুযায়ী সময় লাগে $t_L$ এবং নিউক্লিয়সের সাপেক্ষে স্থির ঘড়ি অনুযায়ী সময় লাগে $t_N'$। অতএব B থেকে C পর্যন্ত যেতে সময় লাগবে পরীক্ষাগারের ঘড়ি অনুযায়ী $\frac{t_L}{2}$ এবং নিউক্লিয়সের ঘড়ি অনুযায়ী $\frac{t'_N}{2}$।

নিউক্লিয়সের ঘড়ি অনুযায়ী $\frac{1}{\nu'}$ সেকেণ্ড অন্তর একটি করে গ্যামা রশ্মির

তরঙ্গ শীর্ষ নির্গত হচ্ছে। কাজেই $\frac{t_N'}{2}$ সময়ে $\frac{t_N'v'}{2}$ তরঙ্গ শীর্ষ নির্গত হয়। B থেকে যখন নিউক্লিয়সটি Cর দিকে যাচ্ছে তখন পরীক্ষাগারের ঘড়ি অনুযায়ী কম্পাঙ্ক হবে $v'\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} = Kv'$, এখানে $K < 1$। যখন নিউক্লিয়সটি দিক পরিবর্তন করে তখন তার B থেকে দূরত্ব ছিল $\frac{vt_L}{2}$। তারপর নিউক্লিয়সটি Bর দিকে আসে কাজেই পরীক্ষাগারের সাপেক্ষে কম্পাঙ্ক হবে $v'\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = \frac{v}{K}$। C বিন্দুতে যে তরঙ্গশীর্ষ নির্গত হয় সেটি A তে পেঁছবে পরীক্ষাগারের ঘড়ি অনুযায়ী $\frac{t_L}{2} + \frac{\frac{vt_L}{2} + x_0}{}$ কালাঙ্কে কারণ আলোর বেগ সব কাঠামোতেই $c$। অনুরূপে B তে নির্গত তরঙ্গশীর্ষ A তে পেঁছবে $\frac{x_0}{c}$ কালাঙ্কে। কাজেই শোষকের কাছে মোট $\frac{t_L}{2} + \frac{vt_L}{2c}$ সময় ধরে পর পর তরঙ্গ শীর্ষ এসেছে এবং তাদের সংখ্যা ছিল $\frac{v't_N'}{2}$ এবং তাদের মধ্যে সময়ের ব্যবধান ছিল $\frac{1}{Kv'}$ অতএব

$$\frac{t_L}{2}\left(1+\frac{v}{c}\right) = \frac{v't_N'}{2} \times \frac{1}{Kv'}$$

$$\text{অর্থাৎ } t\left(1+\frac{v}{c}\right) = \frac{t_N'}{K} \qquad (3-144)$$

এর পর শোষকের ঘড়ি অনুযায়ী গ্যামা রশ্মির কম্পাঙ্ক বেড়ে যাবে। এখন $\frac{t_L}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right)$ সময়ে $\frac{v't_N'}{2}$ সংখ্যক তরঙ্গশীর্ষ আসবে এবং তাদের মধ্যে সময়ের ব্যবধান হবে $\frac{K}{v'}$

অতএব $\frac{t_L}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right)=\frac{v' t_N'}{2} \quad \frac{K}{v'}$

অর্থাৎ $t_L\left(1-\frac{v}{c}\right)=Kt_N{}^L$

সমীকরণ (3—144) কে সমীকরণ (3—145) দিয়ে গুণ করে বর্গফল নিলে পাই—

$$t_N'=t_L\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{3—146}$$

আমরা এখানে আমাদের পরিচিত কাল প্রসারণের সূত্র ফিরে পেলাম। এখানে আপত্তি উঠতে পারে যে নিউক্লিয়স থেকে আলো ফোটন হিসাবে নির্গত হয় কিন্তু আমরা ধরে নিয়েছি যে অবিচ্ছিন্ন তরঙ্গ নির্গত হচ্ছে। কিন্তু কোয়াণ্টাম বলবিদ্যা অনুযায়ী আলোর দ্বৈত সত্তা আছে এবং অবিচ্ছিন্ন তরঙ্গ হিসাবে গণনা করলে কোন ভুল হয় না।

যদি উৎস নিউক্লিয়স থেকে $N_0$ সংখ্যক তরঙ্গশীর্ষ নিক্ষিপ্ত হয় তা হলে পরীক্ষাগারের সাপেক্ষে গড় কম্পাঙ্ক হবে

$$v_L=\frac{No}{t_L} \tag{3—147}$$

অন্যদিকে উৎস নিউক্লিয়সের সাপেক্ষে গড় কম্পাঙ্ক হবে

$$v_N'=v_0=\frac{N_0}{t_N'} \tag{3—148}$$

$$\text{অতএব}\quad v_L=v_N'\sqrt{1-v^2/c^2}=v_0\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{3—149}$$

যেখানে $v_0$ যথার্থ কম্পাঙ্ক। অতএব এক্ষেত্রে আমরা অনুপ্রস্থ ডপলার অপসরণের সূত্র পাই। যদিও এখানে নিউক্লিয়সের এক মাত্রার স্পন্দন ধরা হয়েছে. প্রকৃতপক্ষে এটি তিন মাত্রার স্পন্দন। যে কোন দিকের স্পন্দনকে $x$, $y$ ও $z$ অক্ষের দিকে তিনটি উপাংশে ভাগ করে লিখতে পারি। $y$ ও $z$ এর দিকের গতির জন্য অনুপ্রস্থ ডপলার অপসরণ পাওয়া যাবে এবং আমরা দেখেছি যে $x$ এর দিকের জন্যও একই সমীকরণ পাওয়া যায়। কারণ এলোমেলো গতির জন্য অনুদৈর্ঘ্য গতির ফল গড়ে শূন্য হবে, শুধু অনুপ্রস্থ অপসরণের ফল বোঝা যায়। অতএব ত্রিমাত্রিক স্পন্দনের জন্য উপরোক্ত সূত্রের মূলতঃ কোন পরিবর্তন হবে না। অবশ্য প্রকৃত ক্ষেত্রে পরমাণুগুলি অবিচল বেগে স্পন্দিত

হয় না। তাদের বেগের পরিবর্তন ঘটে। কাজেই সমীকরণ (3—146) এর স্থানে লিখতে হবে

$$\int dt = \int dt\sqrt{1-v^2/c^2}$$

অর্থাৎ $\int dt_N = \int dt_L \sqrt{1-v^2/c^2}$ (3—150)

যেখানে $v$ পরীক্ষাগারের সাপেক্ষে উৎস নিউক্লিয়সটির ক্ষণিক বেগ। কাজেই যখন নিউক্লিয়সটি $T_s$°K তাপমাত্রায় কেলাসের জাফরিতে আবদ্ধ তখন নিক্ষিপ্ত গ্যামা রশ্মির কম্পাঙ্কের যথার্থ কম্পাঙ্কের সাপেক্ষে অপসরণ $\Delta v_s$ হবে

$$\frac{\Delta v_s}{v_0} = \left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}} - 1 = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad (3\text{—}151)$$

সমীকরণ (3—142) অনুযায়ী

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{3KT_s}{Mc^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Delta v_s}{v_0} = -\frac{3KT_s}{2Mc^2} = -2{\cdot}4\times10^{-15}T_s \qquad (3\text{—}152)$$

যেখানে $T_s$ উৎসের তাপমাত্রা।

এতক্ষণ আমরা শোষক নিউক্লিয়সটিকে স্থির বলে ধরে নিয়েছিলাম। কিন্তু সেটিও স্পন্দিত হবে তার নিজস্ব তাপমাত্রা $T_A$ অনুসারে। কাজেই শোষণের জন্য অনুরণন কম্পাঙ্ক হবে

$$\frac{\Delta v_A}{v_0} = -2{\cdot}4\times10^{-15}T_A \qquad (3\text{—}153)$$

কাজেই উৎসের অনুরণন কম্পাঙ্ক এবং শোষকের অনুরণন কম্পাঙ্কে পার্থক্য হবে

$$\frac{\Delta v}{v_0} = -2{\cdot}4\times10^{-15}\Delta T \qquad (3\text{—}154)$$

যেখানে $\Delta T = T_s - T_A$

পাউণ্ড (Pound) এবং রেবকা (Rebka) র মত অনুসারে ঘরের তাপমাত্রার কাছাকাছি লৌহ নিউক্লিয়সের সংখ্যাসূচক সহগটির প্রকৃত মান প্রাচীন তত্ত্বগত মানের 0 9 গুণ হবে যদি ডিবাই ( Debye ) তাপমাত্রা 467° ধরা হয়। কাজেই (3—154) হওয়া উচিত

$$\frac{\Delta v}{v_0} = -2{\cdot}21\times10^{-15}\Delta T \qquad (3\text{—}155)$$

যদি উৎস এবং শোষক ঘরের তাপমাত্রার কাছাকাছি থাকে। কাজেই তত্ত্বগত এবং পরীক্ষাগত মানের মধ্যে সন্তোষজনক মিল আছে।

**3-11. যথার্থ কালের অন্তর :** প্রাক্‌ আইনষ্টাইন যুগে দেশ ও কালের অন্তরকে কাঠামো নিরপেক্ষ বলে মনে করা হত। কিন্তু আমরা দেখেছি যে, আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী দেশ বা কালের অন্তর কোনটাই অপরিবর্তনীয় হয়। এখানে আলোর শূন্যের বেগ অপরিবর্তনীয়। কাজেই আলোক তরঙ্গের সমীকরণ সব কাঠামোতেই এক ধরণের হবে, অর্থাৎ ( তুলনীয় সমীকরণ 3—10 থেকে 3—13)

$$c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=-s^2=-s'^2=c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)=0 \tag{3—156}$$

অতএব $$-\frac{s^2}{c^2}=-\frac{s'^2}{c^2}=t^2-\frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)$$

$$=t'^2-\frac{1}{c^2}(x'^2+y'\ +z'^2)=0 \tag{3—157}$$

দেখান যায় যে, $t^2-\frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)$ অপরিবর্তনীয়, অর্থাৎ এর মান কাঠামোর উপর নির্ভর করে না। এই রাশিমালাটির মধ্যে কাল ও দেশাঙ্ক দুইই আছে। আপেক্ষিকতা তত্ত্বে শুধু দেশ বা শুধু কাল অপরিবর্তনীয় নয় কিন্তু দেশ ও কালাঙ্ক মিলিয়ে রাশিমালা গঠন করা সম্ভব যা কাঠামো নিরপেক্ষ। একটি ঘটনাকে সূচিত করতে আমাদের প্রয়োজন, যে স্থানে ঘটনাটি ঘটেছে তার তিনটি দেশাঙ্ক, কারণ দেশ তিন মাত্রার এবং কখন ঘটনাটি ঘটেছে সেই কালাঙ্ক। এই চারটি সংখ্যাকে সম্মিলিতভাবে ঘটনাটির দেশ-কালাঙ্ক বলা হয়। আমরা জানি যে $x^2+y^2+z^2$ মূলবিন্দু $(o, o, o)$ থেকে $(x, y, z)$ বিন্দুর দূরত্বের বর্গ। অনুরূপে $(x_1, y_1, z_1)$ বিন্দু এবং $(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুর মধ্যে দূরত্বের বর্গ হবে $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$। অতএব একটি ঘটনার দেশ-কালাঙ্ক যদি $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ হয় এবং দ্বিতীয় ঘটনার দেশ-কালাঙ্ক $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ হয় তা হলে

$$\tau_{12}{}^2=(t_2-t_1)^2-\frac{1}{c^2}[(x_2-x_2)^2+(y_2-y_1)^2+z_2-z_1)^2] \tag{3—158}$$

এই রাশিমালাকে বলা হয় ঘটনাদ্বয়ের মধ্যে যথার্থ কালের অন্তর। অনুরূপে Σ' কাঠামোয় ঐ দুই ঘটনার মধ্যে যথার্থ কালের অন্তর হবে

$$\tau_{12}'^2 = (t'_2 - t'_1)^2 - \frac{1}{c^2}[(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1') + (z_2' - z_1')^2] \quad (3-159)$$

যথার্থ কালের অন্তর অপরিবর্তনীয় অর্থাৎ $\tau_{12}^2 = \tau_{12}'^2$। উপরের আলোচনা থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, এটি অপরিবর্তনীয় হবে, তথাপি আমরা একটি বিধিসম্মত প্রমাণ দেব। লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ অনুযায়ী

$$\tau_{12}'^2 = \frac{(t_2 - t_1)^2}{1 - v^2/c^2} + \frac{v^2}{c^4}\frac{(x_2 - x_1)^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{2v}{c^2}\frac{(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{1 - v^2/c^2}$$

$$- \frac{1}{c^2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{(t_2 - t_1)^2}{1 - v^2/c^2} + \frac{2v}{c^2}\frac{(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{1 - v^2/c^2}$$

$$- \frac{1}{c^2}[(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]$$

$$= (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]$$

$$= \tau_{12}^2 \quad (3-160)$$

এখন থেকে আমরা যে সব রূপান্তরের সাপেক্ষে $\tau_{12}^2$ অপরিবর্তনীয় সেগুলিকে লোরেন্ট্স্ রূপান্তর বলব, দু'টি কাঠামোর আপেক্ষিক গতি $x$ অক্ষের সমান্তরাল হোক বা না হোক।

$\tau_{12}^2$ রাশির ভৌত গুরুত্ব কি? এমন যদি একটি কাঠামো থাকে যেখানে দু'টি ঘটনা একই দেশাঙ্কে ঘটে তা হলে $\tau_{12}^2$ রাশিমালার মধ্যে তৃতীয় বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত রাশির মান শূন্য হয় এবং $\tau_{12}$($\tau_{12}^2$ এর ধনাত্মক বর্গমূল) সেই কাঠামোয় স্থির ঘড়ি অনুযায়ী দু'টি ঘটনার মধ্যে কালের অন্তর। $\Sigma$ কাঠমোর $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুতে যদি দু'টি ঘটনা যথাক্রমে $t_1$ ও $t_2$ কালাঙ্কে ঘটে তা হলে যদি অন্য একটি কাঠামো $\Sigma'$ এমন ভাবে বেছে নেওয়া হয় যে সেটি PQ রেখার দিকে ঠিক এমন বেগে যায় যে $t_1 - t_2$ সময়ে PQ দূরত্ব অতিক্রম করে তা হলে সেই কাঠামোয় দু'টি ঘটনা একই দেশাঙ্কে ঘটবে। কিন্তু আমরা জানি যে, আপেক্ষিক বেগ $c$-র চেয়ে কম হবে। কাজেই

$$(t_2 - t_1)^2 \leqslant \frac{1}{c^2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]$$

অর্থাৎ যখন $\tau_{12}$ বাস্তব রাশি হবে।

ঘটনা দু'টি যে কোন ধরণের হতে পারে। একটি সমবেগে ধাবমান ট্রেনের দু'টি স্থানের অবস্থানকে দু'টি ঘটনা বলা যায়। অনুরূপে একটি সমবেগে চলমান বস্তু কণিকার দু'টি অবস্থানও দু'টি ঘটনা হতে পারে। সে ক্ষেত্রে আমাদের কাঠামোটিতে বস্তু কণিকাটি নিশ্চল হবে এবং ঐ কাঠামোর ঘড়ির সময় সে ক্ষেত্রে যথার্থ কাল হবে। বস্তুকণিকার পরিবর্তে যদি ফোটন নেওয়া হয় তা হলে ফোটনের গতিপথের সকল ঘটনার ক্ষেত্রেই যথার্থ কাল শূন্য হবে অর্থাৎ ফোটনের গতিপথে যথার্থ কালপ্রবাহ স্তব্ধ হয়ে যাবে।

যখন $\tau_{12}$ একটি বাস্তব সংখ্যা (শূন্য নয়) তখন ঘটনা দু'টির মধ্যস্থিত **দেশ কালের অন্তরকে কালতুল্য** বলা হয়। $\tau_{12}$ যখন শূন্য তখন দেশ-কালের অন্তরকে **আলোকতুল্য** বা অনন্য এবং কল্পিত সংখ্যা হলে **দেশতুল্য** বলা হয়।

আমরা এখন সমীকরণ (3—160) কে দেশ ও কালাঙ্কের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অন্তরের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি—

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$= \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\} dt^2 \qquad (3\text{—}161)$$

আমরা পূর্বেই বলেছি যে, $\tau$ কোন সমবেগে গতিশীল বস্তুকণিকার সাপেক্ষে স্থির ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট কাল সূচিত করে অর্থাৎ এটি হচ্ছে বস্তুকণিকার নিজস্ব কাল বা যথার্থ কাল। যেহেতু আমরা এ ক্ষেত্রে দেশ-কালাঙ্কের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অন্তর ব্যবহার করেছি এক্ষেত্রে বস্তুকণার বেগ অবিচল হবার কোন প্রয়োজন নেই। সমীকরণ (3—161) থেকে কালাঙ্ক ও যথার্থ কালের মধ্যে সম্পর্ক পাই

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - u^2/c^2} \qquad (3\text{—}162)$$

যেখানে $u$ বস্তুকণার বেগ। এই সম্পর্ক ত্বরণশীল গতির ক্ষেত্রেও সত্য, সেক্ষেত্রে

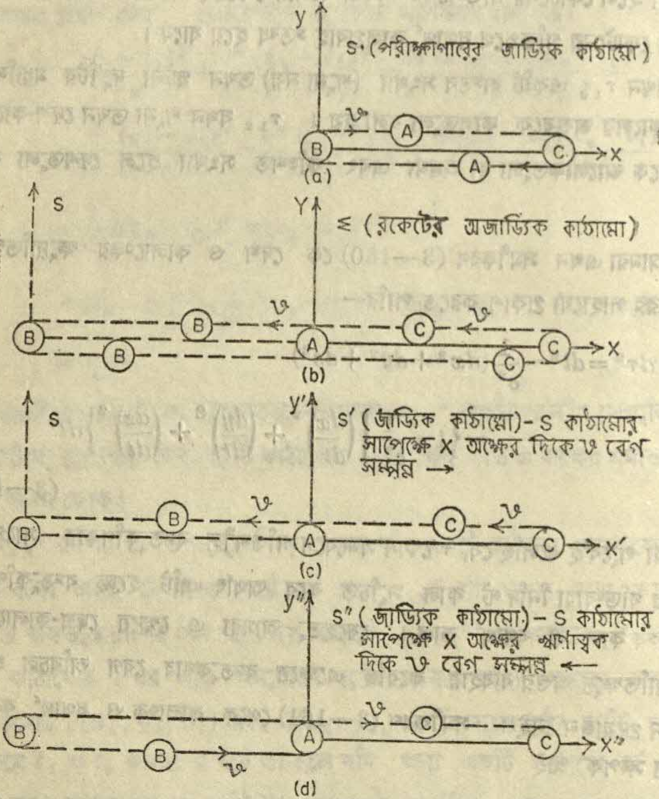
$$\tau = \int \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt \qquad (3\text{—}163)$$

$u$ ধ্রুবক হলে

$$\tau_{12} = \sqrt{1 - u^2/c^2}\,(t_2 - t_1) \qquad (3\text{—}163)a$$

সাধারণ ক্ষেত্রে $dt$ এবং $u$ লোরেন্ট্‌স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় নয় কিন্তু $\tau$ অপরিবর্তনীয়।

*** 3-12. ঘড়ি সম্বন্ধীয় আত্মবিরোধী সত্য**—আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী কতকগুলি সত্য আপাত দৃষ্টিতে আত্মবিরোধী বলে মনে হয় কিন্তু ভাল করে চিন্তা করে দেখলে বোঝা যায় যে, এগুলির মধ্যে অযৌক্তিক কিছু নেই।[1]




চিত্র 3-23

আমরা এখানে এই ধরণের একটি আপাত দৃষ্টিতে আত্মবিরোধী সত্য নিয়ে আলোচনা করব। তার কারণ এই নয় যে, এটি সত্য সত্যই আত্মবিরোধী বা

1 অনুসন্ধিৎসু পাঠক নিম্নলিখিত বই দেখতে পারেন: "Paradoxes in the Theory of Relativity" by Ya. P. Terletskii (Plenum 1968)

দুর্বোধ্য কিন্তু কারণ হচ্ছে যে, এই বিষয় নিয়ে বহুদিন ধরে বিজ্ঞানীদের মধ্যে তর্ক বিতর্ক চলেছে। 1905 খ্রীষ্টাব্দে আইনষ্টাইন তাঁর আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে মৌলিক প্রবন্ধে লিখেছিলেন: "A বিন্দুতে অবস্থিত দু'টি ঘড়ির মধ্যে একটিকে যদি আবদ্ধ বক্রপথে নিয়ে গিয়ে আবার A তে ফিরিয়ে আনা হয় এবং পুরা যাত্রার সময় লাগে $t$ সেকেন্ড, তা হলে যাত্রাকারী ঘড়িটি ফিরে আসার পর স্থির ঘড়িটির সাপেক্ষে $\frac{v^2}{2c^2}t$ সেকেন্ড পেছিয়ে আছে বলে মনে হবে।" 1911 খ্রীষ্টাব্দে লাঁজভাঁ (Langevin) প্রথম এই সত্যকে আত্মবিরোধী হিসাবে তুলে ধরেন।

দু'টি ঘড়ি A ও B নেওয়া যাক। মনে করা যাক যে, তার মধ্যে B পৃথিবীর উপরে পরীক্ষাগারের সাপেক্ষে স্থির আছে এবং তা জাড্যিক কাঠামো S এর মূল বিন্দুতে অবস্থিত [ চিত্র 3-23($a$) ]। আমরা পৃথিবীর ঘূর্ণনের ফলাফল এখানে উপেক্ষা করব। মনে করা যাক যে, অন্য ঘড়ি A রকেটের সাপেক্ষে স্থির এবং এই রকেটটি পৃথিবীর S কাঠামোর সাপেক্ষে $x$ অক্ষের সমান্তরাল $v$ বেগে গতিশীল। মনে করা যাক যে, $x$ অক্ষের উপর পৃথিবীর বাহিরে মহাশূন্যে অপর একটি ঘড়ি C S কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির আছে। প্রথমে A, B ও C এই তিনটি ঘড়ি মিলিয়ে নেওয়া হল। তারপর A ও B র ঘড়িতে যখন শূন্য কালাঙ্ক তখন রকেট $v$ বেগে মূলবিন্দু থেকে C র দিকে যেতে শুরু করে। C বিন্দুতে পৌঁছে রকেটটি তার গতি পরিবর্তন করে এবং আবার $v$ বেগে মূলবিন্দুর দিকে আসতে থাকে। পরে যখন মূলবিন্দুতে পৌঁছায় তখন দুই ঘড়ির সময় তুলনা করে দেখা হল। আমরা জানি যে, S কাঠামোর সাপেক্ষে $v$ বেগে গতিশীল ঘড়ি মন্থর হারে চলবে এবং A ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময় $t_A$ হবে

$$t_A = t_B\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (3-164)$$

যেখানে $t_B$ B ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময়। সমীকরণ (3 – 164) অনুযায়ী কাল প্রসারণ বেগ $v$ র বর্গের উপর নির্ভর করে। কাজেই ফেরার পথে বেগ $-v$ হলেও উপরোক্ত সম্পর্ক সত্য হবে। কাজেই B তে ফেরার পর দেখা যাবে যে A ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময় কম হবে। আমরা জানি যে, কাল প্রসারণ পারস্পরিক। অর্থাৎ S কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে যেমন A ঘড়িটিকে $v$ বেগে

গতিশীল বলে মনে হবে, তেমনই রকেটের সাপেক্ষে স্থির কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে B ঘড়িটিকে $v$ বেগে গতিশীল বলে মনে হবে হবে। কাজেই S কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে যেমন A ঘড়ির চলার হার মন্থর মনে হবে তেমনই রকেটের নিরীক্ষকের কাছে B ঘড়ির চলার হার মন্থর বলে মনে হবে। কিন্তু তারা যখন মূলবিন্দুতে মিলিত হবে তখন কোন ঘড়িটির নির্দিষ্ট সময় কম হবে? চিত্র $3-23(a)$ এ পরীক্ষাগারের S কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে পরিস্থিতি দেখান হয়েছে এবং $3-23(b)$এ রকেটের Σ কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে পরিস্থিতি দেখান হয়েছে। আইনস্টাইনের মত অনুযায়ী A ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময় কম হবে। কিন্তু কেন? এটিকে 'ঘড়ি সম্বন্ধীয় আত্মবিরোধী সত্য' অথবা 'লাঁজভাঁর যাত্রী সমস্যা' বলা হয়। এটিকে অনেকে অন্যভাবে প্রকাশ করেন। যমজ দুই ভাইএর মধ্যে একজন যদি পৃথিবীতে থাকে এবং অন্যজন রকেটে করে দূরের কোন নক্ষত্রে আলোর কাছাকাছি বেগে যাত্রা করে এবং তার পর ঘুরে আসে, তা হলে দ্বিতীয় ব্যক্তির বয়স অনেক কম থাকবে কারণ তার ঘড়িতে অনেক কম সময় দেখাবে। কাজেই সে যখন পৃথিবীতে ফিরে আসবে তখন হয়ত তার যমজ ভাই বুড়ো হয়ে গেছে কিন্তু সে যুবক আছে। এইজন্য এটিকে 'যমজ সম্বন্ধীয় আত্মবিরোধী সত্য'ও বলা হয়।

আমাদের মনে রাখতে হবে যে, পরীক্ষাগারের কাঠামো S জাড্যিক কাঠামো কিন্তু রকেটের কাঠামো Σ জাড্যিক কাঠামো নয় কারণ এটি S এর সাপেক্ষে সব সময় অবিচল বেগে গতিশীল নয়। বেগ প্রথমে $v$ এবং পরে $-v$ থাকে কাজেই এই বেগ পরিবর্তনের সময় Σ কাঠামোটিতে ত্বরণ থাকে। আমরা জানি যে, লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সূত্র শুধু দু'টি জাড্যিক কাঠামোর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, অন্য কাঠামোর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়। বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সূত্রগুলি শুধু জাড্যিক কাঠামোর ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। দু'টি জাড্যিক কাঠামোর মধ্যে প্রতিসাম্য থাকবে এবং কাল প্রসারণও দু'টি কাঠামোর মধ্যে পারস্পরিক হবে। আমরা বলতে পারব না, কোনটি গতিশীল এবং কোনটি নয়। কিন্তু অজাড্যিক কাঠামোর ক্ষেত্রে বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সূত্রগুলি প্রযোজ্য নয়। এ ক্ষেত্রে প্রতিসাম্য থাকার কথাও নয়। ত্বরণশীল কাঠামোর ক্ষেত্রে সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রযোজ্য। ট্রেনের যাত্রীরা সকলেই জানেন যে, অবিচল বেগে সরলরৈখিক গতি থাকলে যাত্রীরা বাহিরের দিকে না তাকালে তাদের গতি সম্বন্ধে সচেতন হয় না, যদি রেল লাইন মসৃণ হয়। কিন্তু ট্রেন বেগ পরিবর্তন বা গতির দিক পরিবর্তন করলেই

যাত্রীদের উপর জাড্যিক বল প্রযুক্ত হয় এবং যাত্রীরা বাহিরের দিকে না তাকিয়েও গতি সম্বন্ধে সচেতন হয়। অজাড্যিক কাঠামোর যাত্রীরাই শুধু এই বলের প্রভাব অনুভব করে, জাড্যিক কাঠামোর যাত্রীরা করে না। রকেটের কাঠামো $\Sigma$ অজাড্যিক কাজেই A ঘড়ি ও B ঘড়ির মধ্যে প্রতিসাম্য বজায় থাকবে না। অবশ্য একথা মনে করার কোন সঙ্গত কারণ নেই যে, এ ক্ষেত্রে দুই ঘড়ি দ্বারা নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে পার্থক্য নির্ণয়ের জন্য সাধারণ আপেক্ষিকতার জটিলতর সমীকরণ প্রয়োগ করতে হবে। বিশেষ আপেক্ষিকতার সরল সমীকরণ ব্যবহার করেই এই পার্থক্য নির্ণয় করা সম্ভব।

$\Sigma$ কাঠামো জাড্যিক কাঠামো নয়। দিক পরিবর্তন করার পূর্বে কিছুক্ষণের মধ্যে $v$ বেগ কমে শূন্যে পেঁছিবে এবং তারপর বিপরীত দিকে বেড়ে—$v$ তে পেঁছিবে। যদি এই সময়টিকে খুব কমিয়ে আনা যায়, তা হলে আমরা মনে করতে পারি যে, রকেটটি B থেকে C পর্যন্ত $S'$ জাড্যিক কাঠামোয় থাকে (চিত্র 3-23$c$) এবং C তে অন্য একটি জাড্যিক কাঠামো $S''$ এ হস্তান্তরিত করে দেওয়া হয় (চিত্র 3-23($d$))। $S'$ কাঠামো S এর সাপেক্ষে $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে $v$ বেগে গতিশীল এবং $S''$ কাঠামো S এর সাপেক্ষে $x$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকে $v$ বেগে গতিশীল। পথের যে অংশে গতি পরিবর্তন ঘটে বা ত্বরণ থাকে সেখানে লোরেণ্ট্স রূপান্তর সমীকরণ প্রযোজ্য নয়, কিন্তু তার পূর্বে এবং পরে প্রযোজ্য। B ও C ঘড়ি S কাঠামোয় স্থির, কাজেই তারা পরীক্ষাগারের সময় $t_L$ নির্দেশ করে। রকেটের ঘড়ি A $\Sigma$ কাঠামোয় স্থির এবং $T_R$ সময় নির্দেশ করে। যদি $S'$ ও $S''$ জাড্যিক কাঠামোর সময় যথাক্রমে $t'$ এবং $t''$ দ্বারা সূচিত হয় তা হলে (যেহেতু A ঘড়ি $S'$ এর মূল বিন্দুতে আছে, $x'=0$) B থেকে C পর্যন্ত যাবার সময় হবে

$$(T_R)_{BC}=(t'_R)_{BC}=(t_L)_{BC}\sqrt{1-v^2/c^2}\simeq(t_L)_{BC}\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$(t_L)_{BC}-(T_R)_{BC}=(t_L)_{BC}\ \tfrac{1}{2}\ \frac{v^2}{c^2} \qquad (3-165)$$

অতএব C ও A ঘড়ির মধ্যে সময়ের পার্থক্য হবে $t_L\ \frac{1}{2}\ v^2/c^2$ অনুরূপে C থেকে B পর্যন্ত ফেরার সময় হবে

$$(T_R)_{CB}=(t_R'')_{CB}=(t_L)_{CB}\sqrt{1-v^2/c^2}\simeq(t_L)_{CB}\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\therefore \quad (t_L)_{CB} - (T_R)_{CB} = (t_L)_{CB} \cdot \tfrac{1}{2}\, v^2/c^2 \qquad (3\text{—}166)$$

কাজেই পুরা যাত্রার সময় (3-165) ও (3-166) যোগ করলে পাওয়া যায়

$$(t_L)_{BCB} - (T_R^*)_{BCB} = (t_L)_{BCB} \cdot \tfrac{1}{2}\, \frac{v^2}{c^2} \qquad (3\text{—}167)$$

এখানে আমরা যাত্রা পথের যে অংশে রকেট অবিচল বেগে চলছিল সেই অংশের সময় নির্ণয় করেছি। পরে আমরা দেখব যে, ত্বরণের পরিমাণ ঘড়ির চলার হার নিয়ন্ত্রণ করে না, শুধু বেগ দ্বারা চলার হার নিয়ন্ত্রিত হয়। অতএব যাত্রাপথের বাকী অংশটুকুর জন্য সমীকরণ (3-167) এর কোন পরিবর্তন হবে না। এই ফলের সামান্যীকরণ করলে পাওয়া যাবে যে, একই সরলরেখায় যাওয়া আসা না করে রকেটটির যাত্রাপথ যদি একটি বহুভুজ হয় তা হলেও সমীকরণ (3-167) বলবৎ থাকবে। আবদ্ধ বক্রপথ বহুভুজের সীমাস্থ অবস্থা, কাজেই বক্রপথের ক্ষেত্রেও উপরোক্ত সমীকরণ বলবৎ থাকবে।

রকেটটির গতি যদি ত্বরণশীল হয় তা হলে S কাঠামোয় রকেটের দু'টি কাছাকাছি অবস্থানের দেশ-কালাঙ্ক $(x, y, z, t)$ এবং $(x+dx, y+dy,$ $z+dz$ এবং $t+dt)$ এবং যথার্থ কালের অন্তর $d\tau$ হবে :

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

অথবা $$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (3\text{—}168)$$

সমাকলন করে পাওয়া যাবে

$$\int d\tau = \int dt\,\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (3\text{—}169)$$

যেখানে $v$ রকেটের পৃথিবীর সাপেক্ষে তাৎক্ষণিক বেগ। পরীক্ষাগারের কাঠামোয় যাত্রাকালে $\int dt$ এবং রকেটের ঘড়ি অনুযায়ী যাত্রাকাল $\int d\tau$। আমাদের অনুমান অনুসারে দিক পরিবর্তনের সময় ছাড়া $v$ ধ্রুবক অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\int d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\int dt \qquad (3\text{—}170a)$$

অতএব সমীকরণ (3-166) পাওয়া যায়।

আইনস্টাইনের উপরোক্ত মতের অনেকে বিরোধিতা করেন। এই শতাব্দীর প্রথম থেকে আজ অবধি এই তর্ক বিতর্ক ক্রমান্বয়ে চলেছে। উভয় পক্ষের

যুক্তিগুলিরও বারবার পুনরাবৃত্তি হচ্ছে।[1] আধুনিক যুগে 1971 খ্রীষ্টাব্দেও মেণ্ডেল স্যাক্‌স্‌ (Mendel Sachs) এই বাদানুবাদের সূত্রপাত করেন।[2]

আইন্‌ষ্টাইনের বিরোধীদের মতে লোরেন্টস্‌ রূপান্তর সমীকরণ এ ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয় এবং লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তরের উপরোক্ত সামান্যীকরণ অবৈধ। তাঁদের মতে যাত্রা শেষে A ও B ঘড়ি একই সময় নির্দেশ করবে। এখন আমরা দেখতে চেষ্টা করব যে, আইনষ্টাইনের এই সিদ্ধান্তের সঙ্গে বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের অন্যান্য সিদ্ধান্তের সঙ্গতি আছে কি না।

***3-12.1—ঘড়ি বিষয়ক আত্মবিরোধী সত্য সম্পর্কিত মনোগত পরীক্ষা :—** ১৪১-২ পৃষ্ঠায় বর্ণিত পরীক্ষার অনুরূপ একটি মনোগত পরীক্ষা থেকেও আইনষ্টাইনের উপরোক্ত মতের সমর্থন পাওয়া যায়। মনে করা যাক যে, নিউক্লিয়সের পরিবর্তে রকেট B থেকে C পর্যন্ত গিয়ে ফিরে আসে (চিত্র 3-22)। মনে করা যাক যে রকেট থেকে $\frac{1}{v'}$ সেকেণ্ড অন্তর আলোক সংকেত পাঠান হয়। কাজেই পূর্বের যুক্তিদ্বারা আমরা সমীকরণ (3—146) এর পরিবর্তে নিম্নলিখিত সমীকরণ পাই

$$t_R' = t_L \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (3-171)$$

এখানে $t_R'$ রকেটের ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময় সূচিত করে।

আমরা দেখিয়েছি যে, পরীক্ষাগার এবং রকেটের কাঠামোর মধ্যে প্রতিসাম্য নেই। ইংরাজ বিজ্ঞানী শায়ামা ( Sciama ) এই আত্মবিরোধী সত্য সম্বন্ধে বলেছিলেন : "এটার নিউটনের বালতি পরীক্ষার মত মর্যাদা আছে—একটি ঝুলন্ত বালতিকে ঘোরান হয় এবং অন্যটি তার নিচে স্থির অবস্থায় ঝোলান থাকে ( পৃষ্ঠা 4 )।" সারা বিশ্বে যদি এই দুটি বালতিই থাকত এবং অন্য

1. এই ব্যাপারের ইতিহাসের জন্য অনুসন্ধিৎসু পাঠক নিম্নলিখিত পুস্তক এবং সেখানে যে প্রবন্ধগুলির উল্লেখ আছে, সেগুলি পড়ে দেখতে পারেন : H. Arzelies—Relativistic Kinematics (Pergamon 1966) পৃষ্ঠা 189-95। এ ছাড়া C.W. Sherwin : Phys. Rev, **120**, 19 (1960), J. Terrell : Nuov. Cim. **16**, 459 (1960), L. Marder : Time and Space Traveller (George Allen and Unwin, London 1971) এও এই আত্মবিরোধী সত্য সম্বন্ধে বিভিন্ন মতামত পাওয়া যায়।

2. M. Sachs—Physics Today, September 1971—পৃষ্ঠা 23 এবং Physics Today January 1972—Letters to the Editor—পৃষ্ঠা 9।

কিছু না থাকত তা হলে একটি বালতির জলের উপরিভাগ অবতল এবং অন্যটির ক্ষেত্রে সমতল হওয়াটা আত্মবিরোধী হত। কিন্তু আমাদের বিশ্বে জাড্যিক কাঠামোর অস্তিত্ব আমরা স্বীকার করে নিয়েছি, কাজেই বালতি দু'টির মধ্যে কোন প্রতিসাম্য নেই এবং অনুরূপে যমজদের মধ্যেও নেই।

ফেনবার্গের ( Feenberg ) একটি যুক্তির এখানে উল্লেখ করব। মনে করা যাক যে, পরীক্ষাগারের ঘড়ি B র ( চিত্র 3-23 ) সাপেক্ষে স্থির একটি পরিবর্তনশীল তারা আছে যার উজ্জ্বলতার হ্রাসবৃদ্ধি ঘটে সেকেণ্ডে $f_0$ বার। মনে করা যাক যে, A যে সময়ে C বিন্দুতে গিয়ে আবার B তে ফিরে আসে সেই সময় $T_B$ র মধ্যে S কাঠামোর নিরীক্ষক তারার N পরিবর্তন চক্র লক্ষ করেন। কাজেই S এর নিরীক্ষকের কাছে তারাটির পরিবর্তনের হার হবে

$$f_B = f_0 = \frac{N}{T_B} \tag{3—172}$$

মনে করা যাক যে A র সাপেক্ষে তারাটি অনুপ্রস্থ দিকে গতিশীল, কাজেই Σ কাঠামোর নিরীক্ষকের সাপেক্ষে তার পরিবর্তনের হার হবে ( অনুপ্রস্থ ডপলার প্রক্রিয়ার নিয়ম অনুসারে )

$$f_A = \frac{f_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{N}{T_A} \tag{3—173}$$

সমীকরণ (3 – 172) ও (3 – 173) থেকে পাই

$$T_A = T_B \sqrt{1-v^2/c^2} \tag{3—174}$$

কাজেই আমরা আবার অন্যভাবে পুরানো সমীকরণ ফিরে পেলাম।

***3-12.2. ঘড়ি বিষয়ক আত্মবিরোধী সত্যের পরীক্ষামূলক সত্যাখ্যান—** প্রথমে আলোচনা করা দরকার, ঘড়ি বলতে আমরা কি বুঝি। আমরা দৈনন্দিন জীবনে নানা রকমের ঘড়ি ব্যবহার করি, কোনটি পেণ্ডুলামে চলে, কোনটি বা সূক্ষ্ম স্প্রিং এ চলে। দু'টি ঘড়ি মেলানর পদ্ধতি নিয়ে পৃষ্ঠা 110 এ আলোচনা করা হয়েছে। একটি কাঠামোর বিভিন্ন ঘড়িগুলি সমলয় হবে। কিন্তু সাধারণ ঘড়িগুলিকে রকেটের প্রচণ্ড ত্বরণশীল কাঠামোয় নিয়ে গেলে বিকল হয়ে যেতে পারে এবং পেণ্ডুলাম যুক্ত ঘড়িও মহাশূন্যে অভিকর্ষ ক্ষেত্রের বাহিরে ব্যবহার করা যাবে না। কাজেই সব অবস্থায় তারা আদর্শ ঘড়ির শর্ত মেনে চলবে না। অতএব এমন একটি পৌনঃপুনিক ঘটনাকে ঘড়ি হিসাবে ব্যবহার

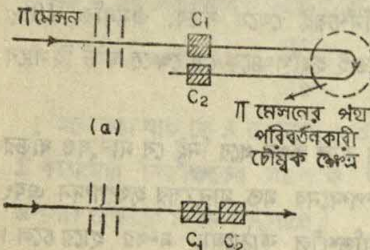
করতে পারি যেটি ত্বরণ বা পারিপার্শ্বিক অবস্থা দ্বারা প্রভাবিত হয় না। পরমাণুর স্পন্দন কাল সময়ের মাপকাঠি হিসাবে কাজ করতে পারে এবং আমরা পূর্বে দেখেছি যে, এই ধরণের পারমাণবিক বা নিউক্লীয় ঘড়ির চলার হার আইনষ্টাইনের সূত্রগুলি মেনে চলে। আমরা দেখেছি যে, তেজস্ক্রিয় পরমাণুর আয়ুষ্কাল বা নিউক্লীয় স্পন্দনের পর্যায়কালকে সময়ের মানদণ্ড হিসাবে ব্যবহার করা যায়। এমন কি যে কোন পৌনঃপুনিক প্রক্রিয়া যথা তারার উজ্জ্বলতার হ্রাসবৃদ্ধি অথবা মানুষের হৃৎপিণ্ডের স্পন্দনও এই কাজ করতে পারে যদি পরীক্ষার জন্য যে প্রতিকূল অবস্থার সৃষ্টি হবে তাতে এই প্রক্রিয়াগুলির উপর প্রভাব না পড়ে। উদাহরণ স্বরূপ যদি $1000g$ ত্বরণশীল কাঠামোয় মানুষকে নিয়ে যাওয়া হয়, তা হলে তার হৃৎপিণ্ড নিশ্চয়ই থেমে যাবে, এমনকি $100g$ ত্বরণেও সে খুব সম্ভব বাঁচবে না। কাজেই হৃৎপিণ্ডকে সে ক্ষেত্রে ঘড়ি হিসাবে ব্যবহার করা চলবে না।

যখন আমরা যমজের বয়সের কথা বলি তখন ধরে নিই যে মানুষও ঘড়ির মত কাজ করে। অর্থাৎ পরমাণুর স্পন্দনের মত মানুষের হৃৎস্পন্দন এবং অন্যান্য জীবনসংক্রান্ত প্রক্রিয়াগুলিও গতিশীল কাঠামোয় মন্থর হারে চলে। কিন্তু এই অনুমান সত্য কি না তা আমরা জানি না। কারণ এখনও পর্যন্ত মহাশূন্যে প্রেরিত রকেটগুলির বেগ ~10 কি.মি./সে.। কাজেই একদিনের মধ্যে নভোচারীর ঘড়ি $10^{-4}$ সে. পেছিয়ে পড়বে। এই সময় মানুষের আয়ুর তুলনায় উপেক্ষণীয়। কাজেই এখনও পর্যন্ত যমজ সম্বন্ধীয় আত্মবিরোধী সত্যের সত্যাখ্যান করা সম্ভব নয়। যেহেতু সকল জীববিদ্যা ও মনোবিদ্যা সংক্রান্ত প্রক্রিয়াগুলিরও পরমাণুগুলির জটিল মিথষ্ক্রিয়া থেকে উৎপত্তি, অতএব এটা ধারণা করা অযৌক্তিক নয় যে, প্রক্রিয়াগুলি লোরেন্টস্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় থাকবে। কাজেই আমরা অনুমান করতে পারি যে, উপরোক্ত ত্বরণশীল কাঠামোয় মানুষের মাংসপেশী, স্নায়ু এবং হৃৎস্পন্দন সবই মন্থর হারে চলবে এবং তার আয়ুও বেড়ে যাবে। এই প্রসঙ্গে আমরা কোন কোন জীবাণুর কথা উল্লেখ করতে পারি। এই জীবাণুগুলি কোন বিশেষ তাপ-মাত্রার চেয়ে বেশী তাপমাত্রায় সক্রিয় হয়ে উঠে কিন্তু খুব কম তাপমাত্রায় তাদের আভ্যন্তরীণ ক্রিয়া প্রায় স্তব্ধ হয়ে যায় এবং তার আয়ুও বাড়ে না। আবার তাপমাত্রা বাড়ালেই তা জীবন্ত হয়ে উঠে এবং আয়ু বাড়তে থাকে। কাজেই

বহিঃস্থ প্রভাবের ফলে জীবনসংক্রান্ত প্রক্রিয়াগুলির মন্দন সম্ভব। তবে এ থেকে সিদ্ধান্ত করা মুস্কিল যে, যমজদের বয়সের মধ্যে সত্য সত্যই পার্থক্য হবে।

(a) **একটি কাল্পনিক পরীক্ষা**—কয়েকটি প্রাচীন পরীক্ষার ফল পরোক্ষভাবে আইনষ্টাইনের মত সমর্থন করে। আমরা একটি কাল্পনিক পরীক্ষার কথা এখানে বলব যার ফল কি হবে তা আমরা জানি কারণ অন্য কতকগুলি পরীক্ষার ফল থেকে এটা অনুমান করা যায়।

প্রস্তাবিত পরীক্ষার বিন্যাস চিত্র 3—24 (a) তে দেখান হয়েছে। প্রস্তাব করা হচ্ছে যে, $\pi$ মেসনের একটি অক্ষিকৃত জ্যোতিরেখা যেন একটি স্ফুলিঙ্গায়নকারী কাউন্টার $C_2$ র মধ্য দিয়ে পাঠান হয়। দ্বিতীয় কাউন্টারটি প্রথমটির পাশাপাশি বসান হয় এবং $C_1$ ও $C_2$ র গণনার সমাপতন লক্ষ করা হয়। $\pi$-মেসন জ্যোতিরেখার তীব্রতা কম হলে এই ধরণের সমাপতনের সংখ্যা কম হবে। $\pi$-মেসন ক্ষয়ের ফলে যে মিউয়নগুলির সৃষ্টি

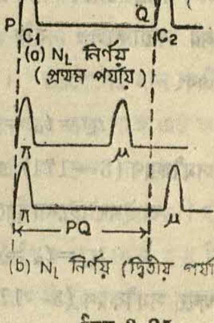



চিত্র 3-24

হবে সেগুলি সাধারণতঃ একই দিকে যাবে না এবং $C_1$ ও $C_2$ কাউন্টারের গণনার মধ্যে সমাপতনের সৃষ্টি করবে না। অবশ্য অল্প কিছু সংখ্যক মিউয়ন $C_1$ ও $C_2$ দ্বারা উৎপন্ন ঘনকোণের মধ্যে সৃষ্ট হবে এবং এই ধরণের অতিরিক্ত সমাপতনের জন্য সংশোধন করা যায়। যে $\pi$-মেসনগুলি যাত্রা শুরু করেছিল তাদের সংখ্যা পাওয়া যাবে শুধু $C_1$ কাউন্টারের গণনা থেকে এবং যে $\pi$-মেসনগুলি যাত্রা সমাপ্ত করেছে তাদের সংখ্যা পাওয়া যাবে $C_1$ ও $C_2$ কাউন্টারের গণনার মধ্যে সমাপতনের সংখ্যা থেকে (এটা $N_R$ দ্বারা সূচিত হবে)। ফোকাস করার জন্য কিছু হ্রাস পায়, সেজন্য এবং অতিরিক্ত সমাপতনের জন্য সংশোধন করা যায়। চিত্র 3—24 (a) এর মত নির্দিষ্ট পথে $N_0$ সংখ্যক $\pi$ মেসন নিয়ে শুরু করে তাদের মধ্যে ক'টি $C_2$ র মধ্য দিয়ে যায় তা লক্ষ না করে পর পর $N_0$ $\pi$-মেসনকে একে একে ঐ পথে যেতে লক্ষ করা যায় এবং ক'টি $C_2$ তে

পেঁছায় দেখা যায়। এটা $N_0$ সংখ্যক $\pi$-মেসনকে রকেটে প্রেরণ করে ফেরার পর কতগুলি মেসন ক্ষয়প্রাপ্ত হয়নি তা নির্ণয় করার সমতুল্য। যদি সমশক্তি সম্পন্ন $\pi$-মেসন ব্যবহার করা হয় তা হলে $N_0$ বার একটি একটি $\pi$-মেসন নিয়ে পরীক্ষা করা এবং একসঙ্গে $N_0$ সংখ্যক $\pi$-মেসন নিয়ে শুরু করে একটি পরীক্ষা করা দুইই সমতুল্য। এইভাবে $N_R$ নির্ণয় করা হয়।

এবার পরীক্ষাগারের কাঠামোয় ক্ষয়প্রাপ্ত হয় নি সেই $\pi$-মেসনের সংখ্যা $N_L$ নির্ণয় করতে হবে। এটা আমরা দুই পর্যায়ে করতে পারি। প্রথম পর্যায়ে যে সমস্ত $\pi$-মেসন যাত্রা সম্পন্ন করে তা দ্বারা $C_1$ ও $C_2$ কাউন্টারে সৃষ্ট আলোক সংকেতগুলির মধ্যে কাল বিলম্ব নির্ণয় করতে হবে। আধুনিক যন্ত্রের সাহায্যে $10^{-10}$ সেকেণ্ড পর্যন্ত বিলম্ব নির্ণয় করা যায়। মোট 4 মিটার পথ $2\times10^8$ মি./সে. বেগে যাত্রা করলে সময় লাগে $2\times10^{-8}$ সে.। আধুনিক যুগের দ্রুত অসিলোস্কোপ যন্ত্রে এটা নির্ণয় করা যায়। অসিলোস্কোপে শূন্য কাল বিলম্বের নিয়ন্ত্রণ করার জন্য কাউন্টার দুটিকে চিত্র 3—24 (b) এর মত পর পর স্থাপন করা যায় এবং অসিলোস্পোক থেকে ফোটোমাল্টিপ্লায়ার সংযোগকারী বৈদ্যুতিক তারগুলির দৈর্ঘ্য এমনভাবে নেওয়া যায় যে দুটি আলোক সংকেতই অসিলোস্কোপের কাঁচের উপর একসঙ্গে আসে। তারপর চিত্র 3—24 (a) র বিন্যাসের জন্য দুটি আলোক সংকেতের মধ্যে কাল বিলম্ব অসিলোস্কোপের কাঁচের উপর দুই সংকেতের অবস্থানের দূরত্ব থেকে নির্ণয় করা যায়। পূর্বেই স্ফটিকের স্পন্দন-কালের সাহায্যে অসিলোস্কোপের কাঁচের ব্যাসের সমতুল্য কাল বিলম্বের পরিমাণ নির্ণয় করা যায়। এই কালের পরিমাণ নির্ণয় করার জন্য ব্যবহৃত বৈদ্যুতিক যন্ত্রকে 'ইলেকট্রনিক ঘড়ি' বলা যায়। $C_1$ কাউন্টারের মধ্য দিয়ে একটি $\pi$-মেসন গেলে অসিলোস্কোপের কাঁচের উপর একটি আলোক সংকেত পাওয়া যায় এবং $\pi$ মেসনটি ঘুরে এসে যখন $C_2$ র মধ্য দিয়ে যায় তখন অপর একটি আলোক সংকেত পাওয়া যায়।



চিত্র 3-25

এই দুই সংকেতের অবস্থানের দূরত্ব PQ ( চিত্র 3—25 *a* ) থেকে যাত্রাকাল

নির্ণয় করা যায়। PQ এর গড় পরিমাপ থেকে $t_L$ নির্ণয় করা হয়। সমশক্তি সম্পন্ন $\pi$-মেসনের ক্ষেত্রে যাত্রাকাল ধ্রুবক হবে এবং ফলে PQ সব ক্ষেত্রে সমান হবে।

এবার আমরা $N_L$ নির্ণয়ের দ্বিতীয় পর্যায় সম্বন্ধে আলোচনা করব। ধীরগতি $\pi^+$ মেসন এমন বড় একটি কেলাসের ভিতর দিয়ে পাঠান হয় যে $\pi^+$ মেসন তাতে গিয়ে থেমে যায় এবং স্থির অবস্থাতেই কিছুক্ষণ পরে তা থেকে মিউয়ন নির্গত হয়। প্রথম পর্যায়ে ব্যবহৃত 'ইলেকট্রনিক ঘড়ি' দ্বারা $\pi$-মেসন এবং মিউয়নজনিত আলোকসংকেতদ্বয়ের মধ্যে কালের ব্যবধান নির্ণয় করা যায়। প্রথমে যে সময়ের পর $\pi^+$-মেসনটি কেলাসের মধ্যে গিয়ে থেমে যায় সেটা $\pi^+$ মেসনটির আয়ুর তুলনায় এত কম যে তা উপেক্ষা করা যায়। যদি $N_0$ সংখ্যক $\pi$ মেসন নিয়ে যাত্রা শুরু করা হয় তা হলে $N_L$ হচ্ছে সেই সমস্ত $\pi$ মেসনের সংখ্যা, যারা $t_L$ সময়ের পর ক্ষয়প্রাপ্ত হয় অর্থাৎ যাদের ক্ষেত্রে $\pi$ ও $\mu$ জনিত আলোক সংকেতের মধ্যে ব্যবধান PQ এর চেয়ে বেশী।

$N_R$ ও $N_L$ সংখ্যা এইভাবে নির্ণয় করা হয়। আইনষ্টাইনের মত সত্য হলে $t_L > t_R'$ হবে (সমীকরণ 3—171)। আমরা দেখেছি যে, গতিশীল $\pi$ মেসনের আয়ু $\gamma T_0$ হবে, যেখানে $T^0$ হচ্ছে যথার্থ আয়ু :

$$N_R = N_0 e^{-t_R/\gamma T_0} \tag{3—175}$$

$T_0$ পরীক্ষাগারের কাঠামোর $\pi$-মেসনের গড় আয়ু, যা বিভিন্ন $\pi$ মেসনের বিভিন্ন আয়ু থেকে নির্ণয় করা যায়। $t_R$ হচ্ছে পরীক্ষাগারের কাঠামোয় $\pi$ মেসনের যাত্রাকাল। যদি আইনষ্টাইনের মত ঠিক হয় তা হলে $t_R = t_L$ হবে এবং

$$t_L = t_R = \gamma t'_R \tag{3—175}$$

এটি সমীকরণ (3—171) এর সঙ্গে সামঞ্জস্য সম্পন্ন।

আইনষ্টাইনের বিরোধীদের মতানুসারে

$$t_L = t_R = t'_R \tag{3—177}$$

সে ক্ষেত্রে সমীকরণ (3—175) এর পরিবর্তে পাব :

$$N_R = N_0 e^{-t_R/T_0} \tag{3—178}$$

কিন্তু আমরা দেখেছি যে, ডারবিন, লোর ও হ্যাভেন্সের (পৃষ্ঠা ১৩৪) পরীক্ষার ফল সমীকরণ (3—175) কেই সমর্থন করে। এখানে $v$ এর মান নির্ণয় করা হয় $\pi$ মেসনের ভরবেগ থেকে এবং এই ভরবেগ নির্ণয় করা যায় চৌম্বকক্ষেত্রে তাদের যাত্রাপথের বক্রতা থেকে। $\pi$ মেসনের ভরবেগ আপেক্ষিকতা তত্ত্বে নিম্নলিখিত সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$\mathrm{p}=\frac{m_0 \mathrm{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (3\text{—}179)$$

যেখানে $m_0$ $\pi$ মেসনের স্থিতি ভর। আমরা ভবিষ্যতে পঞ্চম পরিচ্ছেদে এই সূত্রের কথা আলোচনা করব।

ডারবিন এবং তাঁর সহকর্মীদের পরীক্ষার ফল পেতে হলে সমীকরণ (3—178) এ $t_R$ এর মান $\frac{t_R}{\gamma}$ হবে অর্থাৎ $\pi$ মেসনের বেগ $v$ র স্থলে $\gamma v$ হবে, অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র থেকে বেগ $v$ এর যে মান নির্ণয় করা হয় $\pi$ মেসনের প্রকৃত বেগ তার $\gamma$ গুণ হবে। কাজেই খুব উচ্চশক্তি কণিকাগুলির বেগ $c$ র চেয়ে বেশী হবে। আইনষ্টাইনের বিরুদ্ধ মতাবলম্বী ডিঙ্গ্‌ল্ (Dingle) প্রস্তাব করেছিলেন যে, গতিশীল কণিকার বেগ $\gamma v$ হবে। কিন্তু অধিকাংশ বিজ্ঞানীর মত যে, বস্তুকণিকার বেগ সব সময় $c$ এর চেয়ে কম হবে। তা ছাড়া চেম্বারলেন (Chamberlain), সেগ্রে (Segre), উইগ্যাণ্ড (Wiegand) এবং ইপ্সিল্যাণ্টিস (Ypsilantis) 1955 খ্রীষ্টাব্দে 40 ফিট দূরত্ব অতিক্রম করতে 1.19 Bev/$c$ ভরবেগযুক্ত $\pi$ মেসন এবং ঋণাত্মক প্রোটনের কত সময় লাগে তা নিরূপণ করেন। তাঁরা দেখেন যে $\pi$-মেসন ও প্রোটনের যথাক্রমে $38\times10^{-9}$ সে. ও $51\times10^{-9}$ সে. সময় লাগে। ভরবেগের মান সমীকরণ (3—179) অনুযায়ী হলে $v$ এর যে মান পাওয়া যায় তার সঙ্গে এই কালের পরিমাপ সামঞ্জস্যপূর্ণ। ডিঙ্গ্‌লের মতানুযায়ী যদি $\pi$ মেসনের বেগ $\gamma v$ হয় তা হলে এই সময় হবে $5\times10^{-9}$ সেকেণ্ড, অর্থাৎ বেগ $c$ র চেয়ে বেশী হবে। প্রচলিত তত্ত্বানুযায়ী স্ট্যানফোর্ডের ইলেকট্রনের রৈখিক বেগবর্ধক যন্ত্র নির্মাণ সফল হয়েছে যা থেকে 60 Mev এর বেশী শক্তিসম্পন্ন ইলেকট্রন পাওয়া যায় যার $\gamma$ র মান 1200 এরও বেশী। প্রচলিত তত্ত্বানুযায়ী বস্তুকণিকার বেগ সব সময় $c$ র চেয়ে কম হবে। যদি ডিঙ্গ্‌লের মত সত্য হয় তা হলে ধরে

এবং পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির ঘড়ির তুলনায় কাল প্রসারণের গুণক হবে

$$\left\{1+\frac{(R\Omega-v)^2}{2c^2}\right\}\left(1+\frac{R^2\Omega^2}{2c^2}\right)^{-1}=1-\frac{R\Omega v}{c^2}+\frac{v^2}{2c^2} \quad (3-182)$$

ঘণ্টায় 600 মাইল বেগে যদি জেট বিমান উড়ে তা হলে উপরের শেষ রাশিটি দ্বিতীয়টির প্রায় এক চতুর্থাংশ। কাজেই পশ্চিমগামী ঘড়িটি পৃথিবীর ঘড়ির তুলনায় এগিয়ে যায় এছাড়া উষ্ণতার জন্য ঘড়ির চলার হারের কিছুটা পরিবর্তন হয় সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী। নিচের তালিকায় তত্ত্বগত ও পরীক্ষাগত সময়ের পার্থক্য এবং তাদের ভ্রমসীমা দেওয়া হয়েছে।

তালিকা 3—2

চারটি সিজিয়াম ঘড়ির গড় সময়ের পার্থক্য $\Delta t$ ($10^{-9}$ sec) :

| | পূর্বগামী | পশ্চিমগামী |
|---|---|---|
| পরীক্ষাগত | $-59\pm10$ | $273\pm17$ |
| তত্ত্বগত | $-40\pm23$ | $275\pm21$ |

পূর্বগামী ঘড়ির ক্ষেত্রে সময়ের পার্থক্য দেখা যায় $-59\times10^{-9}$ সে. এবং পশ্চিমগামী ঘড়ির ক্ষেত্রে $273\times10^{-9}$ সে.। দেখা যাচ্ছে যে, ভ্রমসীমার মধ্যে পরীক্ষাগত ও তত্ত্বগত ফলের মধ্যে মিল আছে। কিন্তু সার্ণের পরীক্ষার তুলনায় এই পরীক্ষার ভ্রমসীমা অনেক বেশী কিন্তু এটিতে প্রকৃত ঘড়িই পরীক্ষায় ব্যবহার করা হয়েছে। সেজন্য আইনষ্টাইনের বিরুদ্ধ মতাবলম্বী স্যাক্স্ও এই পরীক্ষার ফলাফল গ্রহণ করতে স্বীকৃত হয়েছিলেন। তখনও অবশ্য এই পরীক্ষার ফল প্রকাশিত হয় নি। এখানেও দেখা যায় যে, যাত্রার প্রথমের ও শেষের ত্বরণ সময়ের উপর কোন প্রভাব বিস্তার করে না। সম্প্রতি ১৯৮০ খ্রীষ্টাব্দে এই ধরণের একটি পরীক্ষা আরও যাথার্থ্যের সঙ্গে করা হয়েছে। ভেসো (Vessot) এবং তাঁর সহকর্মীরা একটি হাইড্রোজেন মেজার ঘড়িকে রকেটে করে প্রায় উল্লম্বভাবে পৃথিবী থেকে 10,000 কি. মি. উপরে পাঠিয়ে দেন। সেখান থেকে বেতার সঙ্কেতের সাহায্যে পৃথিবীতে অবস্থিত অনুরূপ একটি ঘড়ির সঙ্গে তার চলার হারের তুলনা করা হয়েছিল। এখানেও হ্যাফেল ও

কিটিঙের পরীক্ষার মত গতিবেগ এবং উচ্চতা উভয় কারণেই ঘড়ির চলার হারের পরিবর্তন হবে। প্রথমটি বিশেষ এবং দ্বিতীয়টি সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের ফল। যেহেতু হাইড্রোজেন মেজারদ্বারা অনেক যথার্থ ভাবে কম্পাঙ্ক নিরূপণ করা যায় অতএব এই পরীক্ষার ভ্রমসীমা 14 হাজার ভাগের এক ভাগ ( Phys. Rev. Lett. 45, 2081 (1980) ) অন্যদিকে পাউন্ড ও রেবকার পরীক্ষার ভ্রমসীমা 100 ভাগের 1 ভাগ এবং বেলি ও সহকর্মীদের পরীক্ষার ভ্রমসীমা 1000 ভাগের 1 ভাগ।

আমরা আগামী পরিচ্ছেদেও এই ঘড়ি সম্বন্ধীয় আত্মবিরোধী সত্য নিয়ে আরও আলোচনা করব (বিভাগ 4—6)।

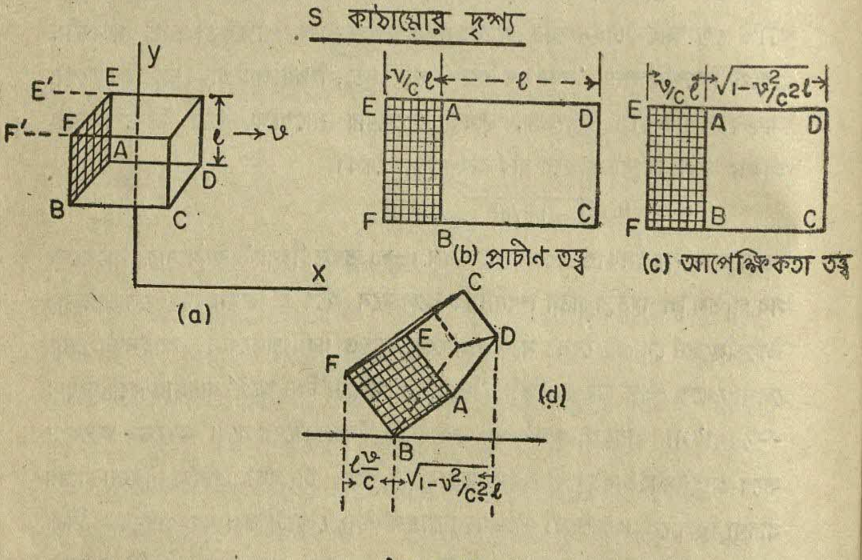
**3-13. দ্রুতগামী বস্তুর দৃষ্টিগোচর আকার-টেরেল প্রক্রিয়া**—1905 খ্রীষ্টাব্দে আইনষ্টাইন তাঁর ঐতিহাসিক বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধীয় প্রবন্ধে লিখেছিলেন, "অতএব একটি দৃঢ় বস্তু, স্থির অবস্থায় যার গোলকের আকার, গতিশীল অবস্থায়, স্থির কাঠামোর সাপেক্ষে, তার উপগোলকের আকার বলে বিবেচিত হবে যার অক্ষগুলির দৈর্ঘ্য

$$R\sqrt{1-v^2/c^2}\ ,\ R,\ R"$$

তিনি তার পর সিদ্ধান্ত করেন যে, যখন $v \to c$ তখন 'স্থির' কাঠামোর সাপেক্ষে সব গতিশীল বস্তুর গঠন দ্বিমাত্রিক বলে মনে হবে। এমন কি লোরেণ্ট্স্ লিখেছিলেন যে এই দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন ফোটোতেও ধরা পড়বে। আইনষ্টাইনের লেখা থেকে স্পষ্ট নয় যে তিনি 'বিবেচিত' কথাটা কি অর্থে ব্যবহার করেছিলেন —'দেখা' না 'পরিমাপ করা' এবং এই নিয়ে বিজ্ঞানীদের মধ্যে মতভেদ আছে। তবে আইনষ্টাইনের লেখা প্রকাশ হবার পর প্রায় 55 বছর পর্যন্ত বিজ্ঞানীদের ধারণা ছিল যে, এই দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন চোখে এবং ফোটোতেও ধরা পড়বে। কিন্তু 1959 খ্রীষ্টাব্দে প্রথম পেনরোজ (Penrose) প্রমাণ করেন যে, একটি গোলক সব সময় দর্শকের চোখে গোলক বলে মনে হবে। পরে টেরেল (Terrell) প্রমাণ করেন যে, দর্শকের চোরে সকল আকারের বস্তুর আকার অপরিবর্তিত থাকবে, শুধু সেগুলিকে কিছুটা ঘুরে গেছে বলে মনে হবে।

এই ভুল ধারণার কারণ হচ্ছে যে, আমরা 'নিরীক্ষক' এবং 'দর্শক' কথা দু'টি অসতর্কভাবে একই অর্থে ব্যবহার করি। কিন্তু একদিকে 'পরিমাপ করা' বা

'নিরীক্ষণ করা' এবং অন্যদিকে 'দেখা' বা 'ফোটো তোলা' দু'টি ভিন্ন প্রক্রিয়া। আমরা পৃষ্ঠা ৬৩ এ দেখেছি যে একটি গতিশীল দণ্ডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করার সময় সেটি একটি পরিমাপ দণ্ডের পাশে বসিয়ে দণ্ডের দু'টি প্রান্তের সঙ্গে পরিমাপ দণ্ডের যুগপৎ সমাপতন নির্ণয় করি। আমরা দেখেছি যে, এইভাবে পরিমাপ করলে দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন ধরা পড়ে। কিন্তু যখন আমরা সেই দণ্ডটিকে দেখি তখন আমাদের অক্ষিপটের উপর যে ফোটনগুলি যুগপৎ এসে পেঁছায় তারাই চিত্র তৈরী করে। ভাইসকফের (Weisskopf) ভাষায় বলতে পারি "যখন আমরা কোন বস্তুকে দেখি বা তার ফোটো তুলি, তখন ঐ বস্তুদ্বারা নিক্ষিপ্ত যে সমস্ত আলোর কোয়াণ্টাম অক্ষিপট অথবা ফোটো ফিল্মের উপর যুগপৎ এসে পেঁছায় তার নিবেশন করি। তার অর্থ হল এই যে, ঐ আলোক




চিত্র 3-26

কোয়াণ্টামগুলি বস্তুটির সকল বিন্দু থেকে যুগপৎ নিক্ষিপ্ত হয় নি। দর্শকের কাছ থেকে যে বিন্দুগুলি দূরে অবস্থিত তারা তাদের চিত্রের অংশ নিকটবর্তী বিন্দুগুলির চেয়ে পূর্বে প্রেরণ করেছে। কাজেই যখন বস্তুটি গতিশীল তখন চোখে বা ফোটোয় তার একটি বিকৃত চিত্র ধরা পড়ে কারণ ঐ বস্তুটির বিভিন্ন অংশ চিত্রে দৃষ্ট আলোক বিভিন্ন সময়ে প্রেরণ করেছে এবং তখন বস্তুটি

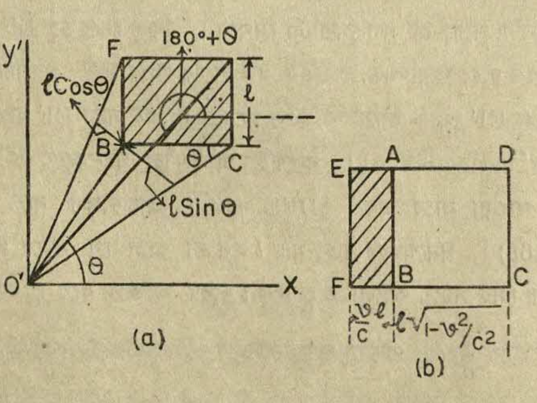
বিভিন্ন স্থানে ছিল।" এর অর্থ এই নয় যে লোরেণ্টস্‌ সঙ্কোচনের কোন অস্তিত্ব নেই—এটা শুধু এক ধরণের পরিমাপে ধরা পড়ে যখন বস্তুর দুই প্রান্ত থেকে আলোক যুগপৎ নিক্ষিপ্ত হয়। এই প্রক্রিয়াকে 'নিরীক্ষণ' আখ্যা দেওয়া হয়েছে। 55 বছর ধরে যে ভুল ধারণা চলে এসেছিল সেদিকে যখন প্রথম সকলের দৃষ্টি আকর্ষণ করা হল তখন আপেক্ষিকতা তত্ত্ববিদরা একটু লজ্জিত হয়েছিলেন। টেরেলের এই আবিষ্কার থেকে বোঝা গেল যে, বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের এত পুঙ্খানুপুঙ্খ বিশ্লেষণ হওয়া সত্ত্বেও আজও এ বিষয়ে মৌলিক আবিষ্কারের সুযোগ আছে।

মনে করা যাক যে, একটি ঘনক্ষেত্রকে S কাঠামোর দর্শক ABCD তলের লম্ব ভাবে দেখছে বহু দূর থেকে। কাজেই S কাঠামোর মূলবিন্দু O থেকে দর্শকের চোখে ঘনক্ষেত্রটি একটি ছোট কোণ উৎপন্ন করে। প্রথমে আমরা প্রাচীন তত্ত্ব (প্রাক্‌-আপেক্ষিকতা তত্ত্ব) প্রয়োগ করব। দর্শকের দূরত্ব খুব বেশী কাজেই ঘনক্ষেত্র থেকে নিক্ষিপ্ত আলোক রশ্মিগুলি সমান্তরাল হবে। যেহেতু A, B, C ও D এই চারটি কৌণিক বিন্দু দর্শক থেকে সমদূরবর্তী, অতএব এই চার বিন্দু থেকে যুগপৎ নিক্ষিপ্ত আলোর কোয়াণ্টামগুলি চোখেও যুগপৎ এসে পেঁছিবে এবং এটি একটি বর্গক্ষেত্র হিসাবে দেখা যাবে। ঘনক্ষেত্রটি স্থির থাকলে দর্শক শুধু এই বর্গক্ষেত্রটিই দেখবে। কিন্তু যেহেতু EF বাহু দর্শক থেকে আরও দূরে অবস্থিত, অতএব অক্ষিপটের উপর EF এর চিত্র রচনাকারী ফোটনগুলি EF থেকে পূর্বে নিক্ষিপ্ত হয়েছে। এই সময় EF বাহুর অবস্থান ছিল E′F′ এ (চিত্র 3-26$a$)। কাজেই গতিশীল ঘনক্ষেত্রের ABFE তলও দেখতে পাওয়া যাবে এবং ADFE একটি আয়তক্ষেত্র বলে মনে হবে (চিত্র 3-26$b$)। ঘনক্ষেত্রের বাহু যদি $l$ হয় তা হলে যে সময়ে E′ বিন্দু E পর্যন্ত যায় সেই সময়ে আলো অতিরিক্ত $l$ দূরত্ব অতিক্রম করে। কাজেই E′E এর দৈর্ঘ্য হবে $\frac{v}{c}\,l$। প্রাচীন তত্ত্বানুযায়ী অক্ষিপটের উপর উৎপন্ন চিত্র হবে চিত্র 3-26($b$) এর মত। যদি ঘনক্ষেত্রটিকে বাঁকা করে ধরা হয় (চিত্র 3-26$d$) যাতে BF বাহু আনুভূমিক রেখার সঙ্গে $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে তা হলে BF বাহুর আনুভূমিক দিকে অভিক্ষেপ হবে $l\cos\theta = l\frac{v}{c}$, যেখানে $\theta = \cos^{-1}\frac{v}{c}$ ।

তা হলে BC বাহুর অভিক্ষেপ হবে $l \sin\theta = l\sqrt{1-v^2/c^2}$ কাজেই প্রাক্ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী ঘনক্ষেত্রটির দৃষ্টিগোচর আকার ঘোরান স্থিতিশীল ঘনক্ষেত্রের মত ঠিক হবে না কারণ BCর অভিক্ষেপ $l\sqrt{1-v^2/c^2}$ হওয়া উচিত ছিল কিন্তু তার প্রকৃত দৈর্ঘ $l$। কাজেই প্রাচীন তত্ত্ব অনুযায়ী ঘনক্ষেত্রটিকে ঘোরান অবস্থায় দেখা যাবে কিন্তু BC বাহুটিকে $1 : 1\sqrt{1-v^2/c^2}$ অনুপাতে বড় দেখাবে।

আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী গতিশীল ঘনক্ষেত্রের আপেক্ষিক গতির দিকের দৈর্ঘ্য সংকোচনের ফলে হবে $l\sqrt{1-v^2/c^2}$, কিন্তু তার সমকোণের দিকের দৈর্ঘ্যের কোন পরিবর্তন হবে না। অতএব ABFE আয়ত ক্ষেত্রের বাহুগুলি প্রাচীন তত্ত্বের মতই হবে শুধু BC বাহুর দৈর্ঘ্য হবে $l\sqrt{1-v^2/c^2}$। কাজেই আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী গতিশীল ঘনক্ষেত্রটিকে অবিকৃত ঘোরান স্থিতিশীল ঘনক্ষেত্র বলে মনে হবে, এই ঘূর্ণনের পরিমাণ $\theta = \cos^{-1}\frac{v}{c}$।

এখন দেখা যাক S′ কাঠামোর দর্শকের কাছে ঘনক্ষেত্রটি কেমন দেখায়। এই কাঠামোয় ঘনক্ষেত্রটি স্থিতিশীল। মনে করা যাক যে যখন ঘনক্ষেত্রটি থেকে আলো O বিন্দুতে অবস্থিত দর্শকের চোখে পৌঁছায় তখন S′ কাঠামোর




চিত্র 3—27

মূলবিন্দু O′ বিন্দুর স্থিতিশীল দর্শকের O বিন্দুর উপর সমাপতন হয়। S কাঠামোর দর্শকের মতে ঘনক্ষেত্রটি $y$ অক্ষের উপর অবস্থিত। যেহেতু S′ কাঠামোর সাপেক্ষে S কাঠামো ডানদিকে গতিশীল এবং যখন দর্শকের চোখে

আলো এসে পড়ে তখন O এবং O′ সমস্থানিক, অতএব ABCD র $y$ অক্ষের সঙ্গে সমাপতন O এবং O′ বিন্দুর সমাপতনের পূর্বে ঘটবে। অতএব S′ এর দর্শকের কাছে ABCD থেকে আলো বাঁকাভাবে আসবে ( চিত্র 3—27$a$ )। আলোর অপেরণের সূত্র থেকেও এটা স্পষ্ট। সমীকরণ (3—95) এ $\alpha = 90°$, অতএব

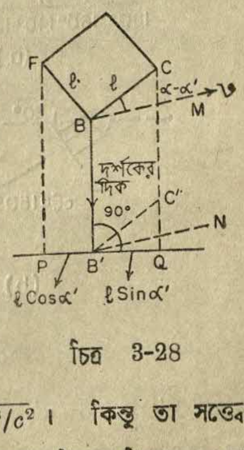
$$\cot \alpha' = -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

অতএব $\cos \alpha' = \pm \frac{v}{c}$

এক্ষেত্রে $\alpha' = 180° + \theta$, এবং $\cos \alpha' = -\cos \theta = -\frac{v}{c}$

যেহেতু S′ এর দর্শক বাঁকাভাবে ঘনক্ষেত্রটিকে দেখে, অতএব স্থিতিশীল ঘনক্ষেত্রটিও $\theta$ কোণে হেলান অবস্থায় দেখা যাবে। কাজেই S′ কাঠামোর দর্শকও ABFE তলের খানিকটা দেখতে পাবে। অতএব S ও S′ উভয় কাঠামোর দর্শকই ঘনক্ষেত্রটিকে একভাবে দেখবে। কিন্তু দুজনের কাছে ঘনক্ষেত্রের দূরত্ব ভিন্ন বলে মনে হবে।

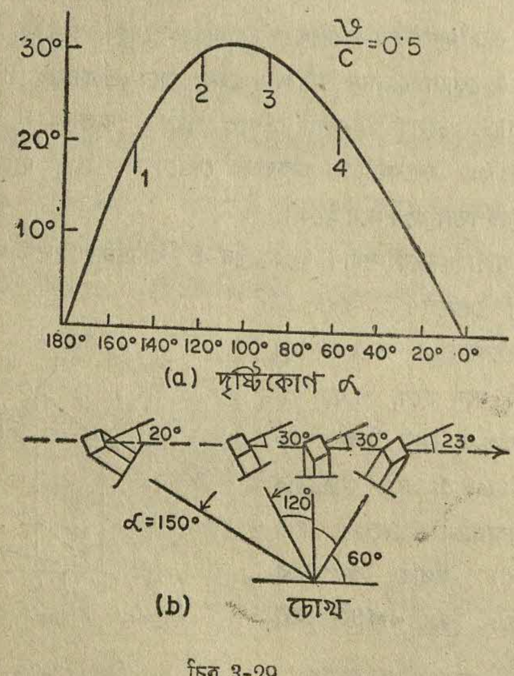
টেরেল সাধারণভাবে প্রমাণ করেন যে S কাঠামোর দর্শক ঘনক্ষেত্রটিকে লম্বভাবে না দেখলেও S এবং S′ কাঠামোর দর্শকের চোখে তার আকার অভিন্ন বলে মনে হবে, শুধু S′ কাঠামোর দর্শককে ভিন্ন দিক থেকে দেখতে হবে। এই S ও S′ কাঠামোর দর্শকের অবস্থানের দিকের মধ্যে কোণ $(\alpha - \alpha')$ অর্থাৎ অপেরণের সঙ্গে সমান। কিন্তু $\alpha \neq 90°$ হলে $\cos \alpha' \neq \frac{v}{c}$। অতএব BC বাহুর




চিত্র 3-28

অভিক্ষেপ $l \sin \theta = l \sin \alpha' \neq l\sqrt{1-v^2/c^2}$। কিন্তু তা সত্ত্বেও S′ কাঠামোর দর্শক যখন B ও C বিন্দুর যুগপৎ নিজ পরিমাপ দণ্ডের সঙ্গে সমাপতন নির্ণয় করে BC র দৈর্ঘ্যের পরিমাপ করবে তখন সে $l\sqrt{1-v^2/c^2}$

পাবে। চিত্র 3—28 এ S কাঠামোর দর্শকের চোখে এ ক্ষেত্রে ঘনক্ষেত্রটি কি রকম দেখাবে তা দেখান হয়েছে। ঘনক্ষেত্রটিকে আপেক্ষিক বেগের দিক থেকে বামাবর্তে (ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে $\alpha-\alpha'$ কোণে ঘোরান দেখা যাচ্ছে। $B'C' \parallel BC$, অতএব $\angle C'B'N=\alpha-\alpha'$। $BB'$ দর্শকের দিক, অতএব $\angle BB'N=\alpha$, যেখানে $B'N \parallel BM$। যদি PQ, BB' এর সঙ্গে লম্ব হয় তা হলে BC র PQ এর উপর অভিক্ষেপ $B'Q=B'C' \cos C'B'Q$। এখন $\angle C'BQ=\angle C'BN + \angle NB'Q=\angle CBM + 90^\circ - \angle BB'N =90^\circ-\alpha'$।




চিত্র 3-29

অতএব $B'Q=l \sin \alpha'$, অনুরূপে $PB'=l \cos \alpha'$। চিত্র 3—29 এর লেখচিত্রে বিভিন্ন দিক থেকে দেখলে ঘনক্ষেত্রটিকে কতখানি ঘোরান দেখায় তা দেখান হয়েছে যখন $\frac{v}{c}=0{\cdot}5$।

আমরা ধরে নিয়েছি যে,

(1) গতিশীল বস্তু ক্যামেরা ( বা চোখ ) থেকে বহু দূরে অবস্থিত, যাতে ক্যামেরার লেন্সের উপর উৎপন্ন ঘনকোণ ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র,

(2) ক্যামেরার ঢাকনা অত্যন্ত সামান্য সময়ের জন্য খোলা থাকে অর্থাৎ তার ঢাকনির বেগ অসীম। নতুবা বস্তুটির ক্ষণিক চিত্র পাওয়া যাবে না।

এখন যদি আমরা প্রথম সর্ত না মানি অর্থাৎ বস্তুটিদ্বারা ক্যামেরার লেন্সের উপর উৎপন্ন কোণ যদি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র না হয় তা হলে বস্তুটির বিভিন্ন অংশ থেকে নিক্ষিপ্ত আলোক রশ্মিগুলি সমান্তরাল হবে না এবং তারা বিভিন্ন আপতন দৃষ্টি কোণে আসবে এবং তার উপযুক্ত অপেরণও বিভিন্ন প্রকারের হবে। কাজেই বস্তুর বিভিন্ন অংশের আপাত ঘূর্ণন বিভিন্ন হবে কাজেই বস্তুটির আকার বিকৃত দেখাবে। পেনরোজ প্রমাণ করেন যে এক্ষেত্রে একটি গোলকের সীমারেখা বৃত্তাকার থাকবে কিন্তু তার উপর যদি অক্ষ এবং দ্রাঘিমা রেখা আঁকা থাকে তা হলে সেগুলি বিকৃত দেখাবে।[1]

আমরা জানি যে, অপেরণ ছাড়াও গতিশীল বস্তু থেকে নিক্ষিপ্ত আলোর ডপলার অপসরণ হবে। বস্তুটি একরঙা হলে দর্শকাভিমুখী বস্তুর রঙের বেগুনীর দিকে অপসরণ হবে এবং দর্শক থেকে দূরগামী বস্তুর রঙের লালের দিকে অপসরণ হবে। এ ছাড়া আমরা দেখেছি যে, $S'$ কাঠামোয় বস্তুটি থেকে নিক্ষিপ্ত আলোর তীব্রতা দিক নিরপেক্ষ হলেও $S$ কাঠামোয় বস্তুটির আলো সামনে দিকে কেন্দ্রীভূত হবে। একে সম্মুখবাতি প্রক্রিয়া ( পৃষ্ঠা ১১১ ) বলা হয়। দর্শকাভিমুখী বস্তুকে উজ্জ্বল ও নীলাভ দেখায় এবং দর্শক থেকে দূরগামী বস্তুকে ক্ষীণ এবং রক্তাভ দেখায়।

আমরা ধরে নিয়েছি যে, ক্যামেরা এবং চোখ উভয়েই ত্রিমাত্রিক বস্তুর দ্বিমাত্রিক চিত্র দেখে। কিন্তু মানুষের দু'টি চোখ থাকায় সে তৃতীয় মাত্রার অনুভূতি পায়। এখানে জটিলতা এড়াবার জন্য আমরা এক চোখের চিত্রের কথাই বলেছি। তা ছাড়া আমাদের অক্ষিপটের উপর চিত্র $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড স্থায়ী হয়, তৎক্ষণাৎ মুছে যায় না। এখানে আমরা এই দৃষ্টি নির্বন্ধের কথা বিবেচনা করিনি।

---

1. অনুসন্ধিৎসু পাঠক এ ব্যাপারে নিম্নলিখিত বই দেখতে পারেন, H. Muirhead—The Special Theory of Relativity ( Mac Millan 1973)—পৃষ্ঠা 43-7.

*3-14. **টমাস অয়নচলন**—আমরা জানি যে, দু'টি জাড্যিক কাঠামোর মধ্যে গালিলীয় রূপান্তর সমীকরণ হবে

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{v}_1 t, \qquad t'=t, \tag{3—183}$$

যেখানে $\mathbf{v}_1$ S ও S′ কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ। অনুরূপে যদি অপর একটি কাঠামো S″ নেওয়া হয় যার S′ কাঠামোর সাপেক্ষে আপেক্ষিক গতি $\mathbf{v}_2$ তা হলে

$$\mathbf{r}''=\mathbf{r}'-v_2 t', \qquad t''=t' \tag{3—184}$$

সমীকরণ (3—184) থেকে সমীকরণ (3—183)-এ প্রতিস্থাপন করলে পাই

$$\mathbf{r}''=\mathbf{r}-(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)t, \qquad t''=t \tag{3—185}$$

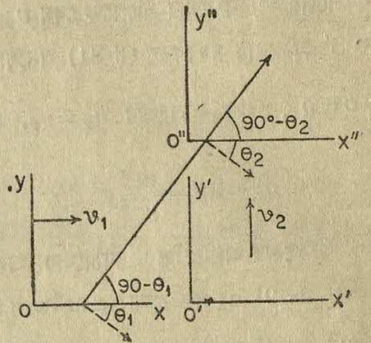
এটি S″ ও S এর মধ্যে একটি গালিলীয় রূপান্তর যেখানে S ও S″ কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$. কাজেই S ও S′ কাঠামোর কার্টিজীয় অক্ষগুলি যদি পরস্পর সমান্তরাল হয় এবং S′ ও S″ কাঠামোর অক্ষগুলিও যদি পরস্পর সমান্তরাল হয় তা হলে S এবং S″ কাঠামোর অক্ষগুলিও সমান্তরাল হবে।[1]

লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের ক্ষেত্রে আমরা দেখেছি যে, $\mathbf{v}_1$ এবং $\mathbf{v}_2$ যদি সমান্তরাল হয় এবং S ও S′ কাঠামোর অক্ষগুলি এবং S′ ও S″ কাঠামোর অক্ষগুলি যদি পরস্পরের সমান্তরাল হয় তা হলে S ও S″ কাঠামোর অক্ষগুলি সমান্তরাল হবে (পৃষ্ঠা ৯৯-১০০ এবং ১১৪)। এখানে বলা দরকার, সমান্তরাল বলতে আমরা কি বুঝি। S কাঠামোর সাপেক্ষে S′ কাঠামোর আপেক্ষিক বেগকে যদি $\mathbf{v}'$ বলা হয় এবং S′ কাঠামোর সাপেক্ষে S কাঠামোর বেগকে $\mathbf{v}$ বলা হয় তা হলে $\mathbf{v}'=-\mathbf{v}$ হবে। S ও S′ কাঠামোর অক্ষগুলিকে সমান্তরাল বলা হবে যদি $\mathbf{v}'$ এর S′ কাঠামোর অক্ষগুলির সাপেক্ষে নতি এবং $\mathbf{v}$ এর S কাঠামোর অক্ষগুলির সাপেক্ষে নতি সমান হয়।

S কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির কোন সরলরেখা $l$ কে S′ কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির একটি সরলরেখা $l'$ এর সমান্তরাল বলা হবে (S এবং S′ এর মধ্যে সম্পর্ক বিশেষ লেরেন্ট্স্ সমীকরণ (3-36) থেকে পাওয়া যায়) যদি S′ কাঠামোর নিরীক্ষক তার অক্ষগুলির সাপেক্ষে $l'$ রেখার যে নতি নির্ণয় করে S কাঠামোর নিরীক্ষক তার অক্ষগুলির সাপেক্ষে $l$ রেখার সেই নতিই নির্ণয় করে।

1. এটা অন্যভাবেও প্রকাশ করা যায়। গালিলীয় রূপান্তরগুলি একটি গ্রুপের সৃষ্টি করে। তার মধ্যে যেগুলিতে অক্ষের ঘূর্ণন থাকে না সেগুলি একটি উপগ্রুপের সৃষ্টি করে।

দু'টি জাড্যিক কাঠামো S এবং S′ নেওয়া যাক। S কাঠামোর অক্ষগুলিকে ঘুরিয়ে এমনভাবে নেওয়া হোক যে, S এর সাপেক্ষে S′ কাঠামোর আপেক্ষিক গতি $x$ অক্ষের সমান্তরাল হয়। এর পর S′ কাঠামোর অক্ষগুলিকে এমনভাবে ঘোরান হোক যে S″ কাঠামোর S′ কাঠামোর সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ $y''$ অক্ষের সমান্তরাল। এক্ষেত্রে S′ ও S″ কাঠামোর অক্ষগুলি পরস্পরের সঙ্গে সমান্তরাল। ধরা যাক যে S ও S′ কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক গতি $v_1$। মনে করা যাক যে S ও $S''$ কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ **u**। **u** কোন অক্ষের সঙ্গে সাধারণতঃ সমান্তরাল হবে না, কাজেই S ও S″ কাঠামোর মধ্যে রূপান্তর সমীকরণ (3—36) এর মত হবেনা। যদি S ও S″ কাঠামোর অক্ষগুলি সমান্তরাল হয় তা হলে তাদের মধ্যে রূপান্তর সমীকরণ (3—79) এর মত হবে। S ও S′ কাঠামোর মধ্যে রূপান্তর সমীকরণ হবে



চিত্র 3—30

$$x'=\gamma_1(x-v_1t),\ y'=y, z'=z, t'=\gamma_1\left(t-\frac{v_1}{c^2}x\right) \qquad (3\text{—}186)$$

যেখানে $\gamma_1=\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

অনুরূপে S′ ও S″ কাঠামোর মধ্যে রূপান্তর সমীকরণ হবে (সমীকরণ 3-79 অনুযায়ী, যখন $v_y=v=v_2,\ v_x=v_z=o$)

$$x''=x',\ y''=\gamma_2(y'-v_2t'),\ z''=z',\ t''=\gamma_2\left(t'-\frac{v_2}{c^2}y'\right), \qquad (3\text{—}187)$$

যেখানে $\gamma_2=\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

এখন সমীকরণ (3-187) থেকে সমীকরণ (3-186) এ প্রতিস্থাপিত করলে S ও S″ কাঠামোর মধ্যে রূপান্তর সমীকরণ পাই

$$x''=\gamma_1(x-v_1t),\ y''=\gamma_2(y-v_2t')=\gamma_2\left(y+\frac{v_1v_2\gamma_1^2}{c^2}x-v_2\gamma_1t\right)$$

$$z''=z,\ t''=\gamma_2\left(\gamma_1t-\frac{\gamma_1v_1}{c^2}x-\frac{v_2}{c^2}y\right) \tag{3-188}$$

S″ কাঠামোর S′ কাঠামোর সাপেক্ষে বেগ $v_2$। এখন $v_2$ বেগের S′ কাঠামো থেকে S′ কাঠামোর সমীকরণ (3-81) অনুযায়ী রূপান্তর করলে সেখানে $u'=v_2,\ v=v_1,\ \gamma=\gamma_1$ অতএব $u_x=v_1,\ u_y=\frac{v_2}{\gamma_1},\ u_z=o$,

$$u^2=v_1^2+\frac{v_2^2}{\gamma_1^2} \tag{3—189}$$

যদি S″ কাঠামোর অক্ষগুলি S কাঠামোর অক্ষগুলির সমান্তরাল হত তা হলে সমীকরণ (3-79) এর মত রূপান্তর সমীকরণ হবে অর্থাৎ

$$x''=x+\frac{(\gamma-1)v_1}{u^2}\left\{xv_1+\frac{yv_2}{\gamma_1}\right\}-\gamma v_1t \tag{3—190}$$

সমীকরণ (3-188) এর প্রথমটিকে এই সমীকরণে রূপান্তরিত করা যায় না। অতএব দু'টি ঘূর্ণনবিহীন লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সংযোজনের ফলে আমরা একটি তৃতীয় ঘূর্ণনবিহীন লোরেন্ট্স্ রূপান্তর পাই না।[1] এখন আমরা S কাঠামোর অক্ষগুলির সাপেক্ষে S″ কাঠামোর অক্ষগুলির ঘূর্ণনের পরিমাণ নির্ণয় করব।

মনে করা যাক যে S ও S″ কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ ভেক্টর $x$ অক্ষের সঙ্গে $90°-\theta_1$ এবং $x''$ অক্ষের সঙ্গে $90°-\theta_2$ কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ আপেক্ষিক বেগ ভেক্টরের উপর লম্ব যথাক্রমে $x$ ও $x''$ অক্ষের সঙ্গে $\theta_1$ ও $\theta_2$ কোণ উৎপন্ন করে। অতএব কাঠামোগুলির ঘূর্ণনের পরিমাণ হবে $\theta_2-\theta_1$ (চিত্র 3-30)। একে বলা হয় টমাস (Thomas) অয়নচলন। আপাততঃ আমরা $xy$ তলের বিন্দুগুলির দেশ কালাঙ্কের রূপান্তরের দিকে দৃষ্টি নিবদ্ধ করব।

1. অন্যভাবে বলা যায় যে, সম্পূর্ণ লোরেন্ট্স্ গ্রুপের মধ্যে ঘূর্ণনবিহীন লোরেন্ট্স্ রূপান্তরগুলি উপগ্রুপের সৃষ্টি করে না। সাধারণ ঘূর্ণনবিহীন লোরেন্ট্স্ রূপান্তরগুলি উপগ্রুপের সৃষ্টি না করলেও একটি বিশেষ রেখার সমান্তরাল আপেক্ষিক বেগ সম্পন্ন ঘূর্ণনবিহীন লোরেন্ট্স্ রূপান্তরগুলি উপগ্রুপের সৃষ্টি করে।

আমরা জানি যে, অবস্থান ভেক্টর $\boldsymbol{r}$ ও $\boldsymbol{r}''$ এর আপেক্ষিক বেগের লম্বের দিকের উপাংশ নিলে তারা লোরেণ্ট্স্ রূপান্তরের সময় অপরিবর্তিত থাকে। অতএব

$$x \cos \theta_1 - y \sin \theta_1 = x'' \cos \theta_2 - y'' \sin \theta_2 \qquad (3\text{—}191)$$

সমীকরণ (3-188) থেকে পাই

$$x'' \cos \theta_2 - y'' \sin \theta_2 = \gamma_1 x \left( \cos \theta_2 - \frac{v_1 v_2 \gamma_2 \sin \theta_2}{c^2} \right)$$

$$- \gamma_2 y \sin \theta_2 - \gamma_1 t (v_1 \cos \theta_2 - v_2 \gamma_2 \sin \theta_2) \qquad (3\text{—}192)$$

উপরোক্ত সমীকরণটি (3-191) এর সঙ্গে অভিন্ন হতে হলে $t$ এর সহগ শূন্যে পরিণত হবে। অতএব

$$\tan \theta_2 = \frac{v_1}{v_y \gamma_2} \qquad (3\text{—}193)$$

অতএব

$$\sin \theta_2 = \frac{v_1}{D\gamma_2}, \cos \theta_2 = \frac{v_2}{D}, \text{ যেখানে } D^2 = v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} \qquad (3\text{—}194)$$

$\theta_2$ র এই মান সমীকরণ (3-192) এ প্রতিস্থাপন করলে পাই

$$x'' \cos \theta_2 - y'' \sin \theta_2 = \gamma_1 x \left( \frac{v_2}{D} - \frac{v_1^2 v_2}{c^2 D} \right) - \frac{v_1 y}{D} = \frac{v_2 x}{D\gamma_1} - \frac{v_1 y}{D}$$

$$= x \cos \theta_1 - y \sin \theta_1 \qquad (3\text{—}195)$$

অতএব $$\tan \theta_1 = \frac{v_1 \gamma_1}{v_2} \qquad (3\text{—}196)$$

অতএব $\theta_1 \neq \theta_2$ । এখন সমীকরণ (3-193) ও (3-196) থেকে পাই

$$\tan (\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1} = \frac{-\dfrac{v_1}{v_2}\left(\gamma_1 - \dfrac{1}{\gamma_2}\right)}{1 + \dfrac{v_1^2 \gamma_1}{v_2^2 \gamma_2}}$$

$$= - \frac{v_1 v_2 (\gamma_1 \gamma_2 - 1)}{v_1^2 \gamma_1 + v_2^2 \gamma_2} \qquad (3\text{—}197)$$

এখন মনে করা যাক যে $v_1$ এবং $v_2$ র মান $c$ র তুলনায় খুব কম। কাজেই $\theta_1$ ও $\theta_2$ র মানও খুব ছোট হবে। অতএব $\tan (\theta_2 - \theta_1) \simeq \theta_2 - \theta_1$ ।

কাজেই এখন $\frac{v}{c}$ র দ্বিঘাত পর্যন্ত রাখলে সমীকরণ (3-197) থেকে পাই

$$\theta_2-\theta_1\simeq-\frac{v_1v_2(v_1{}^2+v_2{}^2)}{2c^2(v_1{}^2+v_2{}^2)}=-\frac{v_1v_2}{2c^2} \qquad (3\text{—}198)$$

এখন যদি যে কোন দু'টি বেগ ভেক্টর $v_1$ এবং $v_2$ নিই এবং তার পর $v_2$ কে $v_1$ এর সমান্তরাল এবং সমকোণে দু'টি উপাংশে ভাগ করে ফেলি তা হলে $v_1$ এর সমান্তরাল উপাংশের জন্য টমাস অয়নচলন শূন্য হবে কারণ আমরা জানি যে সমান্তরাল আপেক্ষিক বেগ বিশিষ্ট ঘূর্ণন বিহীন লোরেণ্ট্স্ রূপান্তরের সংযোজনের ফলে ঘূর্ণনবিহীন লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর পাওয়া যায়। অতএব আমরা পাব

$$\theta_2-\theta_1=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2/2c^2 \qquad (3\text{—}199)^1$$

এখন যদি মনে করি যে $\mathbf{v}_2$ ও $\mathbf{v}_1$ ভেক্টরের মধ্যে অন্তর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অর্থাৎ

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v} \text{ এবং } \mathbf{v}_2=\mathbf{v}+d\mathbf{v}$$

তা হলে

$$d\theta=-\frac{\mathbf{v}\times d\mathbf{v}}{2c^2} \qquad (3\text{—}200)$$

ঋণাত্মক চিহ্নের অর্থ হল যে, কাঠামোটি ঘড়ির বিপরীত দিকে ঘোরে। অতএব টমাস অয়নচলনের হার হবে

$$\boldsymbol{\omega}_T=\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}}{2c^2}=-\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}}{2c^2} \qquad (3\text{—}201)$$

যেখানে $\mathbf{a}\equiv\dot{\mathbf{v}}=$ ত্বরণ ভেক্টর।

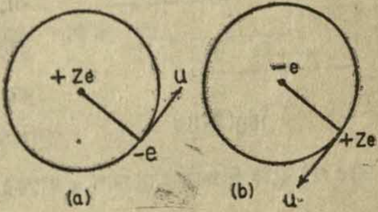
ইলেকট্রনের যে ঘূর্ণন থাকতে পারে সে কথা প্রথম প্রস্তাব করেন কম্পটন (Compton) পরমাণুর চৌম্বকত্বের ব্যাখ্যা করবার জন্য। কিন্তু 1925 খৃীষ্টাব্দে

---

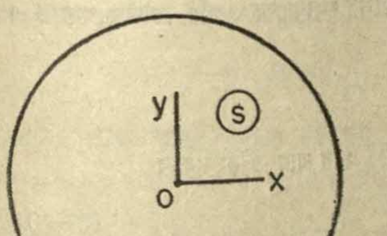
1. এই সমীকরণের আরও যথাযথ প্রমাণের জন্য অনুসন্ধিৎসু পাঠক নিম্নলিখিত বই দেখতে পারেন: (1) C. Moller—The Theory of Relativity (Oxford Univ. Press 1962) পৃষ্ঠা 56, (2) H. Arzelies—Relativistic Kinematics ( Pergamon 1966(পৃষ্ঠা 179, (3) R. D. Sard—Relativistic Mechanics ( Benjamin 1970 ) পৃষ্ঠা 290, (4) মাত্র দু'টি পরিমাপ কাঠামো ব্যবহার করে এর এ'কে সহজ প্রমাণ দিয়েছিলেন Ashworth ( Nuov, Cim 40 B, 242-6 (1977) )

উলেনবেক (Uhlenbeck) এবং গাউড্স্মিট (Goudsmit) প্রস্তাব করেন যে, ইলেকট্রনের সহজাত কৌণিক ভরবেগ এবং চৌম্বক ভ্রামক আছে এবং এই ভাবে জীমান প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যা দেন। তার পর থেকে এই প্রস্তাব সকলের কাছে গ্রাহ্য হয়। কিন্তু তাঁরা মন্তব্য করেন যে ব্যতিক্রান্ত জীমান প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যা করবার জন্য আবর্তন চৌম্বক অনুপাতের ( অর্থাৎ কৌণিক ভরবেগ ও চৌম্বক ভ্রামকের মধ্যে অনুপাত ) যে মান নেওয়া দরকার সেই মান ব্যবহার করলে পরমাণুর শক্তি স্তরগুলির সূক্ষ্ম গঠন সম্বন্ধে ভুল সিদ্ধান্তে আসা যায়। বর্ণালীর সূক্ষ্ম গঠন সংক্রান্ত সঠিক সিদ্ধান্ত করা যায় যদি মনে করা হয় যে ইলেকট্রনের চৌম্বক ভ্রামক জীমান প্রক্রিয়া থেকে যা পাওয়া যায় তার অর্ধেক।

টমাস (Thomas) 1927 খৃীষ্টাব্দে প্রথম এর ব্যাখ্যা দেন প্রাচীন তত্ত্বানুযায়ী। পরে অবশ্য ডিরাকের ( Dirac ) ইলেকট্রন সম্পর্কিত কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সমীকরণ দ্বারা এর ব্যাখ্যা করা হয়েছে। আমরা এখন টমাসের প্রাচীন তত্ত্বগত ব্যাখ্যা নিয়ে আলোচনা করব।



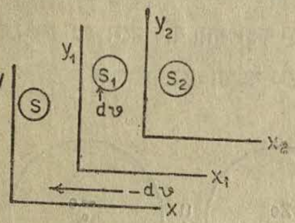

চিত্র 3-31




চিত্র 3-32

এখন বোরের অর্ধপ্রাচীন পরমাণু নকশা অনুযায়ী মনে করব যে $e$ আধানযুক্ত ইলেকট্রন $+ze$ আধানযুক্ত নিউক্লিয়সের চারদিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে ( চিত্র 3—31 $(a)$ )। যে কাঠামোর সাপেক্ষে নিউক্লিয়স স্থির ( S কাঠামো ) তার নিরীক্ষক পরমাণুকে চিত্র 3—31 $(a)$ র মত দেখবে। আবার যে কাঠামোর সাপেক্ষে ইলেকট্রন স্থির তার নিরীক্ষক পরমাণুকে চিত্র 3-31 $(b)$ র

মত দেখবে। ইলেকট্রনের বৃত্তাকার গতির ফলে তার ক্ষণিক বেগ ক্রমাগত পরিবর্তিত হয় এবং ত্বরণের পরিমাণ হবে $\mathbf{a} = -\frac{e\mathbf{E}}{m}$, যেখানে $\mathbf{E}$ নিউক্লিয়াস জনিত তড়িৎ ক্ষেত্রের তীব্রতা। চিত্র 3-32 এ S কাঠামো নিউক্লিয়সের যথার্থ কাঠামো। $S_1$ কাঠামোয় $t$ কালাঙ্কে ইলেকট্রন স্থির থাকে। এই কালাঙ্কে S কাঠামোর সাপেক্ষে ইলেকট্রনের বেগ $\mathbf{v}$। $t+dt$ কালাঙ্কে এই বেগ হবে $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$, অতএব এই কালাঙ্কে ইলেকট্রনের যথার্থ কাঠামো হবে $S_2$। তার পর মুহূর্তে ইলেকট্রনের যথার্থ কাঠামো হবে $S_3$। যেহেতু ত্বরণ কেন্দ্রাভিমুখী অতএব $S_1$ কাঠামোর S এর সাপেক্ষে বেগ $x_1$, এর দিকে $v$ এবং $S_2$ কাঠামোর $S_1$ এর সাপেক্ষে বেগ হবে $y_1$ এর দিকে $dv = adt$ (চিত্র 3-33)। ইলেকট্রনের যথার্থ কাঠামো $S_1$ এবং




চিত্র 3-33

তার সাপেক্ষে S কাঠামোর বেগ $x$ অক্ষের দিকে $-v$। কাজেই এই কাঠামোয় $+ze$ আধানযুক্ত নিউক্লিয়সের বেগ $-v$ হলে এটি বিদ্যুৎপ্রবাহ $\mathbf{j}$ এর সমতুল্য হবে, যেখানে

$$\mathbf{j} = -ze\mathbf{v} \qquad (3-202)$$

কুলম্বের সূত্র অনুযায়ী এটি ইলেকট্রনের স্থানাঙ্কে একটি চৌম্বকক্ষেত্র $\mathbf{B}$ এর সৃষ্টি করবে

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} ze \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{\mathbf{r}^3} \qquad (3-203)$$

ইলেকট্রনের স্থানাঙ্কে তড়িৎ ক্ষেত্রের সৃষ্টি হবে যার তীব্রতা হবে

$$\mathbf{E} = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \qquad (3-204)$$

অতএব $$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E} \qquad (3-205)$$

সমীকরণ (3-203) থেকে পাওয়া যায়

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ze}{m} \frac{\mathbf{r}\times(m\mathbf{v})}{\mathbf{r}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze}{mr^3}\mathbf{L} \qquad (3-206)$$

যেখানে $\mathbf{L}$ ইলেকট্রনের কৌণিক ভরবেগ।

ব্যতিক্রান্ত জীমান প্রক্রিয়া থেকে দেখা যায় যে ইলেকট্রনের ঘূর্ণন জনিত আবর্তন চৌম্বক অনুপাতের বিপরীতের মান হয়

$$\frac{\mu_s}{s}=\frac{e}{m} \qquad (3-207)$$

যেখানে $\mu_s$ ইলেকট্রন ঘূর্ণন জনিত চৌম্বক ভ্রামক এবং $s$ ঘূর্ণন জনিত কৌণিক ভরবেগ। (3—206) এর চৌম্বক ক্ষেত্রে ঘূর্ণনরত ইলেকট্রনের অয়নচলন হবে এবং এর কম্পাঙ্ক (আবিষ্কর্তার নামানুসারে একে লারমর কম্পাঙ্ক বলা হয়)

$$\omega_L=\frac{e}{m}B \qquad (3-208)$$

জীমান প্রক্রিয়ায় শক্তি স্তরগুলির মধ্যে শক্তির পার্থক্য হবে

$$\Delta E_s=\frac{h}{2\pi}\omega_L$$

যেখানে $h$ প্লাঙ্কের ধ্রুবক।

সমীকরণ (3—207) অনুযায়ী

$$\mu_s=\frac{e}{m}s \qquad (3-210)$$

কাক্ষিক গতি ও ঘূর্ণনের মিথষ্ক্রিয়ার জন্য বর্ণালীর সূক্ষ্ম গঠনের সৃষ্টি হয় এবং সেজন্য শক্তিস্তরের অন্তর হবে

$$\Delta E_{fs}=-\mu_s.B=-\frac{e}{m}\;\frac{\mu_0}{4\pi}\;\frac{ze}{mr^3}\,L.S \qquad (3-211)$$

বৃত্তাকার কক্ষে আবর্তনজনিত কৌণিক ভরবেগের মান $mvr$ হলে (সমীকরণ 3—208, 3—206 এবং 3—211 থেকে)

$$\Delta E_{fs}=-\frac{\omega_L L.S}{mvr} \qquad (3-212)$$

কিন্তু তত্ত্বগত মান বর্ণালী থেকে প্রাপ্ত মানের দ্বিগুণ। টমাস প্রথম এর ব্যাখ্যা করেন। ইলেকট্রনের প্রকৃত অয়নচলন টমাস অয়নচলন ও লারমর অয়নচলনের সমষ্টি (সমীকরণ 3—205, 3—207 এবং 3—201):

$$\omega_L{}'=\omega_L+\omega_T=-\frac{e}{mc^2}(\mathbf{v}\times E)-\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}}{2c^2} \qquad (3-213)$$

যখন $v \ll c$ তখন[1]

$$ma = -eE \tag{3-214}$$

অতএব

$$\omega_L' = -\frac{e}{mc^2}(v \times E) + \frac{e}{2mc^2}(v \times E) =$$

$$-\frac{e}{2mc^2}(v \times E) = -\omega_T \tag{3-215}$$

অতএব $\omega_L' = \frac{1}{2}\omega_L$। কাজেই সূক্ষ্ম গঠন ব্যাখ্যা করবার জন্য $\omega_L$ এর পরিবর্তে $\frac{1}{2}\omega_L$ প্রতিস্থাপন করতে হবে। বিকল্পস্বরূপ আমরা মনে করতে পারি যে, এক্ষেত্রে সক্রিয় চৌম্বক ক্ষেত্র প্রকৃত ক্ষেত্রের অর্ধেক। আমরা দেখেছি যে, সমীকরণ (3—214) ঠিক নয় কারণ এখানে বেগের সঙ্গে ভরের আপেক্ষিকতা তত্ত্বগত পরিবর্তনের জন্য সংশোধন করা দরকার।

উপরোক্ত সমস্যার সঙ্গে আর একটি সমস্যার পার্থক্য বোঝা দরকার। সেটি হল যে ইলেকট্রনের কাক্ষিক আবর্তনজনিত আবর্তন চৌম্বক অনুপাত ঘূর্ণনজনিত আবর্তন চৌম্বক অনুপাতের দ্বিগুণ।

প্রাচীন তত্ত্ব অনুযায়ী ইলেকট্রনের কক্ষপথের ক্ষেত্রে

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{3-216}$$

বোরের তত্ত্ব অনুযায়ী কৌণিক ভরবেগ $\hbar \left(=\frac{h}{2\pi}\right)$ এর গুণিতক। অতএব

$$mvr = n\hbar \tag{3-217}$$

সমীকরণ (3—216) ও (3—217) থেকে পাওয়া যায়

$$v = \frac{ze^2}{nh(4\pi\epsilon\ )},\ r = \frac{n^2h^2(4\pi\epsilon_0)}{mze^2} \tag{3-218}$$

কাজেই ইলেকট্রনের বোর কম্পাঙ্ক অর্থাৎ সেকেণ্ডে পরিক্রমণের সংখ্যা

$$\nu_B = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{mz^2e^4}{2\pi n^3\hbar^3(4\pi\epsilon_0)^2} \tag{3-219}$$

অনুরূপে টমাস অয়নচলনের ফলে $2\pi$ রেডিয়ান সম্পূর্ণ করতে যে সময় লাগবে

1. এ ক্ষেত্রে (3—214) প্রাক্ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সূত্র, কিন্তু এখানে এই সূত্র ব্যবহার করলে যথেষ্ট শুদ্ধ উত্তর পাওয়া যাবে।

তার বিপরীতকে টমাস কম্পাঙ্ক বলা হয়। এর মান হবে ( সমীকরণ (3—201) থেকে )

$$\nu_T = \frac{va}{4\pi c^2}$$

অনুরূপে (3—218) থেকে পাই

$$a = ত্বরণ = \frac{v^2}{r}, \quad \therefore \quad \nu_T = \frac{v^3}{4\pi c^2 r} = \frac{mz^4 e^8}{4\pi n^5 h^5 c^2 (4\pi\epsilon_0)^4} \qquad (3—220)$$

$$\therefore \quad \frac{\nu_T}{\nu_B} = \frac{z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2 c^2 (4\pi\epsilon_0)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{z^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{137n}\right)^2 \qquad (3—221)$$

এখানে $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$ = সূক্ষ্ম গঠন ধ্রুবক

পারমাণবিক নিউক্লিয়সে নিউক্লিয়নগুলি শক্তিশালী নিউক্লীয় বলক্ষেত্রে গতিশীল কাজেই তাদের ত্বরণের মান বেশী হবে কাজেই টমাস অয়নচলনের মান বেশী হবে। অন্যদিকে নিউক্লিয়সের ভিতর তড়িৎচুম্বকীয়ক্ষেত্র খুব ক্ষীণ হবে কাজেই $\omega_L$ খুব কম হবে এবং $\omega_L \ll \omega_T$। অতএব নিউক্লিয়নের ক্ষেত্রে কক্ষ ও ঘূর্ণনের মিথষ্ক্রিয়ার মধ্যে $\omega_L$ এর অবদান উপেক্ষনীয়। অতএব এক্ষেত্রে $\omega = +\omega_T$। সমীকরণ (3—215) এর সঙ্গে তুলনা করলে দেখতে পাওয়া যাবে যে এক্ষেত্রে শক্তি স্তরগুলি পারমাণবিক স্তরের সাপেক্ষে ওলটানো বলে মনে হবে।

* 3 15. আলোর চেয়ে দ্রুততর বেগ? ট্যাকিয়ন—কোন বস্তুর বেগ আলোর চেয়ে বেশী হতে পারে কি? এই প্রশ্ন নিয়ে বৈজ্ঞানিক কাহিনীতে প্রচুর দূর-কল্পনা হয়েছে। সম্প্রতি এটি বিজ্ঞানের গন্ডীর মধ্যে চলে এসেছে।

লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণে $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ গুণক হিসাবে থাকে এবং যখন $v > c$ হয় তখন এটি কল্পিত সংখ্যা। এইজন্য পূর্বে বলা হত যে, কোন বস্তু আলোর চেয়ে দ্রুততর বেগে যেতে পারে না কারণ তখন দেশ ও কাল কল্পিত রাশি হয়ে যাবে। অন্য দিকে দেখা যায় যে দুটি আলোর বেগের চেয়ে

ছোট বেগের সংযোজনের ফলে কখনও আলোর বেগের চেয়ে বেশী বেগ পাওয়া যায় না। ভবিষ্যতে আমরা আপেক্ষিতা তাত্বিক বলবিদ্যার সূত্রদ্বারা প্রমাণ করব যে, কোন সসীম বল দ্বারা একটি আলোর চেয়ে কম বেগ সম্পন্ন বস্তুকে আলোর চেয়ে বেশী বেগে ত্বরিত করা যায় না। কাজেই সাধারণ বস্তুর কাছে আলোর বেগ একটি অলংঘ্য বাধা।

কিন্তু উপরোক্ত যুক্তি দিয়ে শুধু এই কথাই প্রমাণ করা যায় যে, যে সমস্ত বস্তু আলোর চেয়ে কম বেগে গতিশীল তারা আলোর সমান বা তার চেয়ে বেশী বেগে গতিশীল হতে পারে না। এর থেকে কেহ যদি সিদ্ধান্ত করে বসেন যে, আলোর চেয়ে বেশী বা সমান বেগে কোন মৌলকণিকা ছুটতে পারে না তবে ভুল করবেন। অনুরূপ একটা উদাহরণ নেওয়া যাক। প্রাচীন কালে ভারতবর্ষের উত্তর দিকের হিমালয় পর্বতশ্রেণী ছিল মানুষের কাছে দুর্লংঘ্য বাধা। কিন্তু এ থেকে কেহ যদি সিদ্ধান্ত করেন যে, তখন হিমালয়ের উত্তর দিকে কোন মানুষ বাস করত না তা হলে ভুল করবেন। আমরা বলেছি যে, সাধারণ বস্তুকণাগুলি আলোর সমান বেগেও গতিশীল হতে পারে না। কিন্তু আমরা জানি যে দুটি অন্য ধরণের মৌল কণিকা, ফোটন ও নিউট্রিনো সব সময় আলোর সমান বেগ সম্পন্ন এবং তাদের বেগ তার চেয়ে কমান যায় না। আমরা সেইরকম অন্য এক শ্রেণীর বস্তুকণিকা কল্পনা করতে পারি যারা সব সময় আলোর চেয়ে বেশী বেগসম্পন্ন।

আমরা জানি যে, আমাদের যথার্থ জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে অন্য একটি কাঠামোর যদি আলোকোর্ধ বেগ থাকে তা হলে সেই কাঠামোর কোন বস্তুর দৈর্ঘ্যের আমাদের কাঠামোর নিরীক্ষকের সাপেক্ষে আপাত মান হবে

$$l=\frac{l_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (3-222)$$

অর্থাৎ একটি কল্পিত সংখ্যা। কিন্তু ঐ বস্তুর যথার্থ দৈর্ঘ্য $l_0$ যদি একটি কল্পিত সংখ্যা হয় তা হলে $l$ বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। যেহেতু এই আলোকোর্ধ কাঠামোর বস্তুগুলির বেগ কখনও আলোর চেয়ে কম হতে পারে না, অতএব সমীকরণ (3—222) এর ডানদিকের হর সব সময় কল্পিত সংখ্যা এবং $l$ সব সময় বাস্তব সংখ্যা হবে। কাজেই সে ক্ষেত্রে আলোর চেয়ে বেশী বেগসম্পন্ন কণিকার অস্তিত্ব থাকা অসম্ভব নয়। সুদর্শন (Sudarshan) প্রথম

1962 খ্রীষ্টাব্দে এই ধরণের কণিকার অস্তিত্ব কল্পনা করেন এবং তার নামকরণ করেন ট্যাকিয়ন (tachyon)। গ্রীক শব্দ tachys=দ্রুত থেকে এর উৎপত্তি। বহু চেষ্টা করেও এ ধরণের মৌল কণিকা আবিষ্কার করা সম্ভব হয় নি। আমরা দেখেছি যে, এ ধরণের মৌল কণিকার ক্ষেত্রে কার্যকারণ সূত্র লঙ্ঘিত হবে (পৃষ্ঠা ৯৮)। এ ব্যাপার নিয়ে আমরা ভবিষ্যতে আরও বিশদভাবে আলোচনা করব (বিভাগ 4-4)। আপাততঃ আমাদের মন খোলা রাখা উচিত। ভবিষ্যতে ট্যাকিয়ন আবিষ্কার করা সম্ভব হলেও হতে পারে।

## আরও পড়ার জন্য সুপারিশ


1. H. Arzelies—Relativistic Kirematics (Pergamon 1966)
2. H. M. Schwartz—Introduction to Special Relativity (McGraw Hill 1968)
3. J. Aharoni—The Special Theory of Relativity (Oxford Clarendon Press 1965)
4. W. Pauli—Theory of Relativity (B. I. Pub. Bombay 1963)
5. W. Rindler—Essential Relativity—Special, General and Cosmological (Springer Verlag 1977)
6. W. G. V. Rosser—An Introduction to the Theory of Relativity (Butterworths 1964)
7. J. G. Taylor—Special Relativity (Oxford Univ. Press 1975)


———

# চতুর্থ পরিচ্ছেদ

## মিন্‌কভ্‌স্কির চতুর্মাত্রিক জগৎ

'এখন থেকে স্বতন্ত্র দেশ এবং স্বতন্ত্র কাল ছায়ায় মিলিয়ে যাবে এবং শুধু উভয়ের এক ধরণের মিলনের গুরুত্ব থাকবে।'

—মিন্‌কভ্‌স্কি

'হয়ত অন্য এক জগতে আমরা দেশের প্রকৃতি সম্বন্ধে অন্য অন্তদৃষ্টি লাভ করতে পারি যা বর্তমানে আমাদের অনধিগম্য। কিন্তু ততদিন পর্যন্ত আমাদের জ্যামিতিকে সমান মর্যাদা দিতে হবে—পাটীগণিতের সঙ্গে নয়, যা পুরোপুরি যুক্তিমূলক বরং বলবিদ্যার সঙ্গে, যা পরীক্ষামূলক।'

—গাউস।

**4—1. লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তরের জ্যামিতিক প্রতিরূপ :** আমরা প্রথম পরিচ্ছেদে দেখেছি ( পৃষ্ঠা ৫ ) যে, গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে কোন কঠিন বস্তুর দৈর্ঘ্য অপরিবর্তনীয়। এ ছাড়া কালও কাঠামো নিরপেক্ষ। কিন্তু লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তরের সাপেক্ষে কঠিন বস্তুর দৈর্ঘ্যও কাঠামো নিরীক্ষকের সাপেক্ষে তার বেগের উপর নির্ভর করে ( ফিট্‌জজেরাল্ড—লোরেন্ট্‌স্‌ সঙ্কোচন )। কিন্তু বেগ $=\frac{\text{দূরত্ব}}{\text{কাল}}$। অতএব দৈর্ঘ্য পরোক্ষভাবে কালের পরিমাপের উপর নির্ভরশীল। অনুরূপে কালের ব্যবধান ঘড়ির বেগের উপর নির্ভরশীল ( আইনষ্টাইন কাল প্রসারণ )। কিন্তু বেগের পরিমাপের জন্য দেশ ও কাল উভয়ের পরিমাপ করা প্রয়োজন। কাজেই কালের ব্যবধান পরোক্ষভাবে দেশের পরিমাপের উপর নির্ভর করে। কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, প্রাচীন বলবিদ্যার মত আমরা এখন দেশ ও কালকে অনধীন বলে মনে করতে পারি না। প্রাচীন বলবিদ্যায় আমরা তিন মাত্রার দেশ এবং এক মাত্রার কালকে স্বাধীন রাশি হিসাবে ব্যবহার করি। কোন বিন্দুর অবস্থান তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয় অথবা বিকল্প হিসাবে অবস্থান ভেক্টর দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়। দুই বিন্দু $P_1(x_1, y_1, z_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2, z_2)$ এর মধ্যে দূরত্ব $l$ ( অর্থাৎ দুই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\mathbf{r}_1$ ও $\mathbf{r}_2$ এর বিয়োগফলের মান ) নিম্নলিখিত সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় ( চিত্র 1—4 ) :

$$l^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad (4-1)$$

অতএব দু'টি অতি নিকটবর্তী বিন্দুর মধ্যে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দূরত্ব $dl$ এর ক্ষেত্রে

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2 \quad (4-1a)$$

সমীকরণ (4-1) ও (4-1$a$) পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাওয়া যায়, ত্রিমাত্রিক দেশের ক্ষেত্রে। এই উপপাদ্য ইউক্লিডীয় জ্যামিতির ক্ষেত্রে সত্য। যে সকল রূপান্তরের ফলে (4-1$a$) অপরিবর্তনীয় থাকে তাকে বলা হয় সমকোণীয় রূপান্তর। এই সমকোণীয় রূপান্তরের মধ্যে নিম্নলিখিত তিন রকমের রূপান্তর আছে :

(1) কাঠামোর বিশুদ্ধ আবর্তন, যেখানে দুই কাঠামোর মূলবিন্দু সমস্থানিক, (2) কাঠামোর মূলবিন্দুর স্থানান্তরণ, যেখানে অক্ষরেখাগুলির দিক পরিবর্তন হয় না, (3) একটি অক্ষরেখার প্রতিফলন, যেখানে মূলবিন্দুর অবস্থানের বা অন্য অক্ষরেখাগুলির দিকের পরিবর্তন হয় না।

আমরা এখন ইউক্লিডীয় জ্যামিতির চতুর্মাত্রিক রূপ কল্পনা করতে পারি যেখানে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দূরত্বের বর্গ নিম্নলিখিত হবে

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2+dw^2 \quad (4-2)$$

যেখানে $w$ চতুর্থ চল।

§ 3-10 এ আমরা দেখেছি যে, লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তরের সাপেক্ষে নিম্নলিখিত রাশিমালা অপরিবর্তনীয় থাকে :

$$ds^2=-c^2d\tau^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2 \quad (4-3)$$

এখন আমরা নিম্নলিখিত সংজ্ঞা অনুযায়ী চারটি নূতন চল উপস্থিত করতে পারি :

$$x_1\equiv x,\ x_2\equiv y,\ x_3\equiv z,\ x_4\equiv ict \text{ যেখানে } i=\sqrt{-1}, \text{ কল্পিত সংখ্যা} \quad (4-4)$$

তা হলে

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2 \quad (4-5)$$

সমীকরণ (4-2) এর সঙ্গে তুলনা করলে দেখা যায় যে দেশ ও কালকে মিলিত করে আমরা চতুর্মাত্রিক ইউক্লিডীয় জ্যামিতি পাই এবং এখানে $x_1, x_2, x_3$ ও $x_4$ কে কোন ঘটনার দেশ-কালাঙ্ক বলা হয়। এখানে চতুর্মাত্রিক জগতের একটি স্থানাঙ্ক কল্পিত সংখ্যা, সেজন্য এটিকে অনেক সময় ছদ্ম ইউক্লিডীয়

জ্যামিতি বলা হয়। তাছাড়া ইউক্লিডীয় জ্যামিতির সঙ্গে এই জ্যামিতির একটি মৌলিক পার্থক্য আছে। ইউক্লিডীয় জ্যামিতিতে দু'টি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব (সমীকরণ (4-1) অথবা (4-1a)) শূন্য হয় তখনই যখন দু'টি বিন্দুই সমস্থানিক। ইউক্লিডীয় জ্যামিতির সঙ্গে সাদৃশ্য থাকায় সমীকরণ (4-3) এর $ds$ কে দু'টি খুব নিকটবর্তী বিন্দুর মধ্যে চতুর্মাত্রিক অন্তর বলা হয়। এই সাদৃশ্য অনুযায়ী দু'টি ঘটনা $P_1$ ও $P_2$ র মধ্যে চতুর্মাত্রিক অন্তর হবে (সমীকরণ 4-3)

$$s_{12}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2 \quad (4—6)$$

হোয়াইটহেড (Whitehead) প্রথম এই চতুর্মাত্রিক অন্তরের কথা বলেন। কিন্তু এক্ষেত্রে দু'টি ঘটনার মধ্যে চতুর্মাত্রিক অন্তর শূন্য হতে পারে যখন $c(t_2-t_1)$

$$=\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (4—7)$$

অর্থাৎ আলোক তরঙ্গের $P_1$ ও $P_2$ বিন্দুতে পেঁছান যদি উপরোক্ত দু'টি ঘটনা হয় তা হলে সমীকরণ (4-7) সত্য হবে। অতএব আলোর গতিপথের দু'টি ঘটনার মধ্যে চতুর্মাত্রিক অন্তর শূন্য হয়। $s_{12}^2$ ধনাত্মক ($s_{12}$ বাস্তব) হলে অন্তরকে দেশতুল্য বলা হয়। $s_{12}^2$ ঋণাত্মক ($s_{12}$ কল্পিত) অথবা শূন্য ($s_{12}$ শূন্য) হলে অন্তরকে যথাক্রমে কালতুল্য অথবা আলোকতুল্য বলা হয়। আমরা দেখলাম যে, ইউক্লিডীয় জ্যামিতির সঙ্গে এক্ষেত্রে পার্থক্য হচ্ছে যে, এখন দু'টি ভিন্ন বিন্দুর (ঘটনার) মধ্যে চতুর্মাত্রিক অন্তর শূন্য হতে পারে। কিন্তু ইউক্লিডীয় জ্যামিতির ক্ষেত্রে তা সম্ভব নয়। তার কারণ এই যে, ইউক্লিডীয় জ্যামিতিতে দূরত্বের বর্গ কতকগুলি ধনাত্মক রাশির সমষ্টি (একে বলা হয় 'নির্দিষ্ট ধনাত্মক')। কিন্তু এক্ষেত্রে চারটি রাশির মধ্যে তিনটির পূর্বে ধনাত্মক চিহ্ন এবং একটির পূর্বে ঋণাত্মক চিহ্ন আছে (একে বলা হয় 'অনির্দিষ্ট')।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে, আপেক্ষিকতা তত্ত্বে দেশ ও কাল স্বাতন্ত্র্য বজায় রাখে না এবং অপরিবর্তনীয় রাশিমালার মধ্যে (সমীকরণ 4-3 ও 4-6) দেশাঙ্ক ও কালাঙ্ক উভয়ের অন্তরই আছে। হুইলার (Wheeler) দেশ ও কালের সাদৃশ্য খুব সুন্দরভাবে ব্যাখ্যা করেছেন: "সময় প্রকৃতপক্ষে দৈর্ঘ্য, এটির কোন স্বতন্ত্র সত্তা নেই। সাধারণতঃ দেশ ও কালের মধ্যে যে পার্থক্য করা হয় সেটা যে ভুল তা এইভাবে বোঝা যায়। আমরা রাজপথের প্রস্থের

পরিমাপ করি ফুটে এবং দৈর্ঘ্যের পরিমাপ করি মাইলে এর মধ্যেও যেমন অসঙ্গতি আছে সেইরূপ দেশকালের একদিকের অন্তরের পরিমাপ সেকেন্ডে এবং অন্য তিনদিকের অন্তরের পরিমাপ সেণ্টিমিটারে করার মধ্যেও অসঙ্গতি আছে। সেণ্টিমিটারের পরিমাপ থেকে সেকেণ্ডের পরিমাপের পরিবর্তনের জন্য গুণনীয়ক আলোর বেগ যার সংখ্যাসূচক মান $3 \times 10^{10}$ এবং এই গুণনীয়কও যতটা ঐতিহাসিক বা আকস্মিক, ফুট থেকে মাইলে পরিবর্তনের গুণনীয়ক 5280 ও ততটা। 5280 সংখ্যার 'ব্যাখ্যা' করার যেমন প্রয়োজন নেই $3 \times 10^{10}$ এরও নেই।"

বিশেষ লোরেণ্ট্‌স্‌ রূপান্তর সমীকরণ (3-19) কে সমীকরণ (4-4) এর নূতন চলগুলি দ্বারা প্রকাশ করলে লেখা যায়ঃ

$$x_1' = \gamma(x_1 + i\beta x_4), \text{ যেখানে } \beta = \frac{v}{c}, \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4-8)$$

$$x_2' = x_2 \qquad (4-9)$$

$$x_3' = x_3 \qquad (4-10)$$

$$x_4' = \gamma(x_4 - i\beta x_1) \qquad (4-11)$$

এখন সমীকরণ (4-8) ও (4-11) কে নিম্নলিখিত রূপে লেখা যায়ঃ

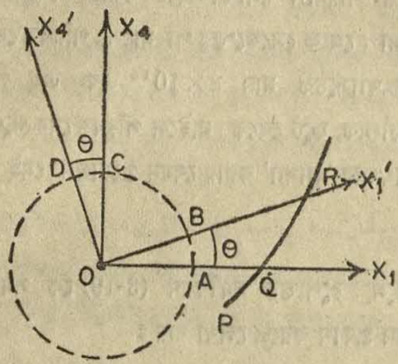
$$x_1' = x_1 \cos\theta + x_4 \sin\theta \qquad (4-12)$$

$$x_4' = -x_1 \sin\theta + x_4 \cos\theta \qquad (4-13)$$

যেখানে $\cos\theta = \gamma$, $\sin\theta = i\gamma\beta$, $\tan\theta = i\beta$ 4—14)

যেহেতু $x_2$ ও $x_3$ স্থানাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকে, অতএব আমরা এই দু'টিকে আপাততঃ বাদ দিয়ে সমীকরণ (4 – 12) ও (4 – 13) দ্বারা প্রদত্ত রূপান্তরকে দ্বিমাত্রিক $x_1$ - $x_4$ দেশে চিত্রিত করতে পারি। চিত্র 4 – 1 এ $x_1$ এবং $x_4$ অক্ষ দু'টিকে সমকোণে আঁকা হয়েছে। এই দুই অক্ষকে কঠিন বস্তুর মত $\theta$ কোণে আবর্তিত করলে $x_1'$, $x_4'$ অক্ষ দু'টি পাওয়া যায়। সহজেই পরীক্ষা করে দেখা যায় যে, কোন বিন্দু P র স্থানাঙ্ক $x_1$, $x_4$ হলে আবর্তিত কাঠামো $x_1'$, $x_4'$ এর সাপেক্ষে Pর স্থানাঙ্ক সমীকরণ (4 – 12) ও (4 – 13) থেকে পাওয়া যায়। সমীকরণ (4 – 14) থেকে $\theta = \tan^{-1}(i\beta)$ একটি কল্পিত কোণ। এখানে $t = t' = 0$ কালাঙ্কে দু'টি কাঠামোর মূলবিন্দু O এবং O'

সমস্থানিক কাজেই চিত্রে মূলবিন্দুর কোন স্থানান্তরণ হয় না। $x_2$ ও $x_3$ দেশাঙ্ক $x_1$ ও $x_4$ এর সঙ্গে যোগ করলে আমরা চতুর্থমাত্রিক জগৎ পাই এবং



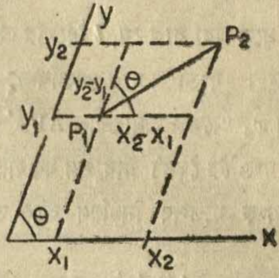

চিত্র 4—1

বিশেষ লোরেন্ট্স্ রূপান্তর $x_1 - x_4$ তলে কাঠামোর একটি 'দৃঢ়' আবর্তন সূচিত করে। এটি একটি বিশুদ্ধ আবর্তন যা সমকোণীয় রূপান্তরের একটি অঙ্গ (পৃষ্ঠা ১৮৩)। $x_1$ $x_4$ তল ছাড়াও $x_1$ $x_2$ বা $x_1$ $x_3$ তলের আবর্তনও সমকোণীয় রূপান্তরের অন্তর্ভুক্ত। তবে শেষের দুটি ক্ষেত্রে আমরা বিশেষ লোরেন্ট্স্ রূপান্তর (3 – 19) পাব না, তার সামান্য রূপ পাব। এই রূপান্তরকে সমকোণীয় রূপান্তর এই জন্য বলা হয় যে, অক্ষগুলি পরস্পরের সঙ্গে সমকোণে অবস্থিত। যদি আমরা তির্যক অক্ষ ব্যবহার করি তা হলে দুই বিন্দুর মধ্যে দূরত্বের বর্গ শুধুমাত্র তাদের স্থানাঙ্কের অন্তরগুলির বর্গের সমষ্টি হবে না বরং তাদের পরস্পরের গুণফলের উপরও নির্ভর করবে। উদাহরণ স্বরূপ দ্বিমাত্রিক দেশে তির্যক অক্ষ $x$ ও $y$ নেওয়া হোক। দুই বিন্দু $p_1(x_1, y_1)$ এবং $p_2(x_2, y_2)$ র মধ্যে দূরত্বের বর্গ হবে (চিত্র 4 – 2)

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \theta \quad (4—14)$$

যেখানে $\theta$ $x$ ও $y$ অক্ষের মধ্যস্থ সূক্ষ্ম কোণ। আমাদের ক্ষেত্রে $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ সব ক'টি অক্ষই পরস্পরের সঙ্গে সমকোণে অবস্থিত যেহেতু চতুর্মাত্রিক অন্তরের রাশিমালায় (সমীকরণ (4 – 5)) দুই দেশাঙ্কের অন্তরের গুণফল নেই, সব ক'টিই দেশাঙ্কের অন্তরের বর্গ।

চতুর্মাত্রিক জগতের একটি বিন্দুকে জাগতিক বিন্দু বলা হয়, যা একটি ঘটনা সূচিত করে। অনেকগুলি বিন্দু একটি রেখার সৃষ্টি করে এবং চতুর্মাত্রিক জগতে এই ধরণের রেখাকে জাগতিক রেখা বলা হয়। চিত্র 4—1 এ PQR রেখাটি একটি জাগতিক রেখার নমুনা। জাগতিক রেখা অনেকগুলি ঘটনার সমষ্টি। যখন কোন বস্তুকণা ত্রিমাত্রিক দেশে স্থান পরিবর্তন করে তখন তার প্রতিনিধি বিন্দু চতুর্মাত্রিক জগতে জাগতিক রেখার উপর স্থান পরিবর্তন করে।




চিত্র 4—2

আমরা স্পষ্টভাবে না বললেও চিত্র 4—1 এ অনুমান করে নিয়েছি যে, সব দিকেই দূরত্বের একক সমান। অর্থাৎ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে একক ব্যাসার্ধের একটা বৃত্ত আঁকলে যে কোন দিকে O থেকে বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত দৈর্ঘ্যের পরিমাণ একক হবে। আমরা যদি তিনটি দেশাঙ্কের পরিবর্তে দু'টি দেশাঙ্ক একটি কালাঙ্ক নিই তা হলে ত্রিমাত্রিক জগৎ পাই, সেখানে একক বৃত্তের পরিবর্তে একক গোলক পাওয়া যাবে। চতুর্মাত্রিক জগতের ক্ষেত্রে একক বিন্দু সংযোজনকারী তল ত্রিমাত্রার হবে এবং তাকে আমরা অধিগোলক বলতে পারি।

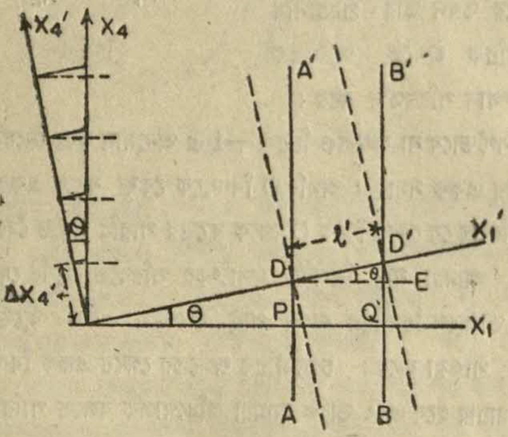
লোরেন্ট্স্ রূপান্তরকে কল্পিত দৃঢ় আবর্তন হিসাবে চিত্রিত করেন প্রথম পোয়াঁকারে[1] 1906 খ্রীষ্টাব্দে। পরে 1908 খ্রীষ্টাব্দে রুশ বিজ্ঞানী মিনকভ্স্কি কল্পিত স্থনানাঙ্ক ব্যবহার না করে' বাস্তব চতুর্মাত্রিক জগতে লোরেন্ট্স্ রূপান্তর চিত্রিত করেন কিন্তু তিনি ইউক্লিডীয় জ্যামিতির পরিবর্তে পরাবৃত্তীয় জ্যামিতি ব্যবহার করেন। এ ব্যাপার নিয়ে আমরা পরে আলোচনা করব। এখানে এ কথার উল্লেখ করা হল এজন্য যে, অনেকের ভুল ধারণা আছে যে, মিনকভ্স্কি প্রথম দৃঢ় আবর্তনের কথা বলেন।

---

1. Poincare—Rend. del Circ. Mat. di Palermo 21, 168 (1906). এর ইংরাজী অনুবাদের জন্য নিম্নলিখিত বই দেখুন: C. W. Kilmister—Special Theory of Relativity (Pergamon 1970) পৃষ্ঠা 176.

এখন আমরা দেখব, কিভাবে এই জ্যামিতিক প্রতিরূপ থেকে ফিট্‌জেরাল্ড লোরেন্ট্‌স্‌ সংকোচন এবং আইনষ্টাইন কাল প্রসারণ পাওয়া যায়।

মনে করা যাক যে, $l$ দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড S কাঠামোর $x$ অক্ষের উপর স্থির আছে। দণ্ডটির দুই প্রান্তবিন্দু P ও Q স্থিতিশীল, কাজেই তাদের জাগতিক রেখা $x_4$ অক্ষের সমান্তরাল APA′ এবং BQB′ হবে। S′ কাঠামোর নিরীক্ষক যদি দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নিরূপণ করবার চেষ্টা করে তা হলে সে প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যুগপৎ নির্ধারণ করে তার অন্তর নির্ণয় করবে। S′ কাঠামোয় $x_1'$




চিত্র 4—3

অক্ষের উপরিস্থিত জাগতিক বিন্দুগুলি সমকালীন ঘটনা সমূহ নির্দেশ করে কারণ এই সকল বিন্দুর প্রত্যেকটির জন্য $x_4'=0$। জাগতিক রেখা দু'টির $x_1$ অক্ষের সঙ্গে ছেদ বিন্দু D ও D′, S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে সমকালীন ঘটনা বলে মনে হবে। অতএব দণ্ডের দৈর্ঘ্য S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে $l'=DD'$ বলে মনে হবে। এখন চিত্র থেকে স্পষ্ট যে

$$l'=l\sec\theta=l\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (4\text{—}15)$$

অতএব দৈর্ঘ্য সংকুচিত হবে। অনুরূপে দণ্ডটি S′ কাঠামোয় স্থির থাকলে তার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের জাগতিক রেখা $x_4'$ অক্ষের সমান্তরাল (চিত্র 4—3 এ

D ও D′ এর মধ্যে দিয়ে ফুটকি দেওয়া রেখা দু'টি ) হবে। কাজেই S কাঠামোর নিরীক্ষক দণ্ডটির দৈর্ঘ্য DE বলে মনে করবে। পূর্বের মত

$$DE = DD' \sec\theta = l'\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (4-15a)$$

অতএব দৈর্ঘ্য সংকোচন পারস্পরিক।

এবার কাল প্রসারণের কথা ধরা যাক। মনে করা যাক যে, একটি ঘড়ি S কাঠামোর মূল বিন্দু O তে স্থিতিশীল। তার জাগতিক রেখা হবে $Ox_4$ অক্ষ। মনে করা যাক যে, ঘড়িটি $\Delta x_4 = 1$ অন্তর একটি করে সংকেত প্রেরণ করে। চিত্র 4-3 এ এই ঘটনাগুলির প্রতীক জাগতিক বিন্দুগুলিকে দেখাবার জন্য $x_4$ অক্ষের উপর ক্রুশ চিহ্নিত করা হয়েছে। এই ঘটনাগুলির S′ কাঠামোর কালাঙ্ক নির্ণয় করার জন্য $Ox_1'$ অক্ষের সমান্তরাল রেখা টানা হয়েছে। $x_4'$ অক্ষের উপর এই ছেদ বিন্দুগুলির মধ্যে দূরত্ব $\Delta x_4 \cos\theta$। অতএব

$$\Delta x_4' = \Delta x_4 \quad \cos\theta = \frac{\Delta x_4}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

অর্থাৎ $$ic\Delta t' = \frac{ic\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

অথবা $$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (4-16)$$

কাজেই কাল প্রসারণ দেখা যাচ্ছে। অনুরূপে কোন ঘড়ি যদি S′ কাঠামোর মূলবিন্দুতে স্থিতিশীল থাকে তা হলে তার জাগতিক রেখা হবে $Ox_4'$। চিত্রে ফুটকি রেখা দিয়ে $\Delta x_4'$ এবং $\Delta x_4$ এর মধ্যে সম্পর্ক দেখান হয়েছে। পূর্বের মত এক্ষেত্রে

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (4-16a)$$

অতএব কালপ্রসারণও পারস্পরিক।

সমীকরণ (4-13) অনুযায়ী

$$\tan\theta = i\beta = i\frac{v}{c}$$

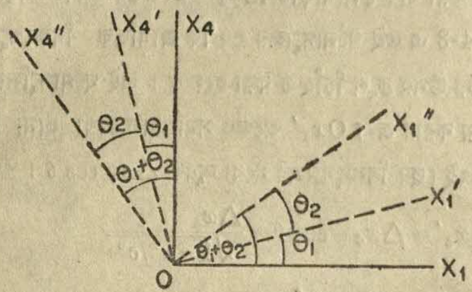
কাজেই কাঠামোর আবর্তন কোণ তাদের আপেক্ষিক বেগের উপর নির্ভর করে। কাজেই এখন যদি S′ কাঠামোর S কাঠামোর সাপেক্ষে বেগ $v_1$ হয় এবং S″

কাঠামোর S′ কাঠামোর সাপেক্ষে বেগ $v_1$ হয় তা হলে S কাঠামোর সাপেক্ষে S′ কাঠামোর আবর্তন হবে $\theta_1$, যেখানে

$$\tan\theta_1 = i\frac{v_1}{c} = i\beta_1 \qquad (4\text{—}17)$$

অনুরূপে S′ কাঠামোর সাপেক্ষে S″ কাঠামোর আবর্তন হবে $\theta_2$, যেখানে

$$\tan\theta_2 = i\frac{v_2}{c} = i\beta_2 \qquad (4\text{—}18)$$




চিত্র 4-4

এখন S কাঠামোর সাপেক্ষে S″ কাঠামোর আবর্তন $(\theta_1+\theta_2)$ (চিত্র 4-4)।
এখন

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$= \frac{i\dfrac{v_1+v_2}{c}}{1+\dfrac{v_1 v_2}{c^2}} = i\frac{u}{c} \quad (4\text{—}19)$$

আমরা জানি যে, S ও S″ কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ $u$ হলে উপরোক্ত সমীকরণ সত্য হবে। অতএব

$$u = \frac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1 v_2}{c^2}} \qquad (4\text{—}20)$$

উপরোক্ত সূত্রটি আইনষ্টাইনের বেগ সংযোজন সূত্র (সমীকরণ 3-45)। অতএব আমাদের জ্যামিতিক প্রতিরূপ সংযোজন সূত্রের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

যদিও উপরোক্ত জ্যামিতিক প্রতিরূপ চতুর্মাত্রিক, তবুও এখানে দেশ ও কাল

পুরোপুরি সমতুল্য নয় কারণ এখানে কালের উপযুক্ত স্থানাঙ্ক কল্পিত সংখ্যা। এখানে রূপান্তরের ফলে দেশ ও কালাঙ্কের বিনিময় সম্ভব নয়। উপরোক্ত চিত্র গাণিতিক দিক থেকে সহজ কারণ এখানে ইউক্লিডীয় জ্যামিতির পিথাগোরাসের উপপাদ্য সত্য (সমীকরণ (4-5) দেখুন)। কাজেই আমরা আমাদের পরিচিত ইউক্লিডীয় জ্যামিতি সূত্রগুলি ব্যবহার করতে পারি। কিন্তু কোন ভৌত রাশি নির্ণয় করতে হলে কল্পিত সংখ্যার উপযুক্ত বাস্তব সংখ্যা ব্যবহার করতে হবে।

4·2. অইউক্লিডীয় জ্যামিতি উপরে বর্ণিত লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তরের জ্যামিতিক প্রতিরূপের এখন শুধু ঐতিহাসিক গুরুত্ব আছে। আমরা বলেছি যে, ইউক্লিডীয় জ্যামিতি বলবৎ রাখবার জন্য কল্পিত চতুর্থ মাত্রা ব্যবহার করতে হয়। কিন্তু এই জ্যামিতিক চিত্র থেকে কোন ভৌত রাশির মান সম্বন্ধে গণনার অর্থপূর্ণ ফল পেতে হলে কল্পিত সংখ্যাগুলিকে বাস্তব সংখ্যায় পরিবর্তন করে নিতে হয়। কিন্তু এখন এই কল্পিত চতুর্থমাত্রা আর ব্যবহার করা হয় না, তার পরিবর্তে বাস্তব চতুর্থমাত্রা $x_4 = ct$ ব্যবহার করা হয়। কিন্তু সেক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্য বলবৎ থাকে না এবং দুই বিন্দুর মধ্যে নিঃসীম ক্ষুদ্র চতুর্মাত্রিক অন্তরের বর্গকে দেশ-কালাঙ্কের অন্তরগুলির বর্গের যোগফল হিসাবে লেখা যায় না (তু. সমীকরণ 4·3)।

ঊনবিংশ শতাব্দীর পূর্বে সকলের ধারণা ছিল যে, ইউক্লিড প্রদত্ত জ্যামিতির উপপাদ্যগুলি সব ক্ষেত্রে সত্য এবং সেগুলি অসত্য হতেই পারে না। ইউক্লিড তাঁর উপপাদ্যগুলি প্রমাণ করেন কয়েকটি সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের উপর ভিত্তি করে। পাঁচটি স্বীকার্য ছিল যথাক্রমে

(১) দু'টি বিন্দুকে যোগ করে একটি সরলরেখা টানা সম্ভব,

(2) একটি সসীম সরলরেখাকে দুই দিকেই সীমাহীনভাবে বাড়ান যায়,

(3) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকা সম্ভব যা' অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়ে যায়,

(4) সব সমকোণই সমান,

(5) যদি একটি তলের দু'টি সরলরেখাকে সেই তলের তৃতীয় একটি

সকলরেখা ছেদ করে এবং এই তৃতীয় রেখার একই দিকের দুটি অন্তঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের কম হয় তা হলে প্রথম দু'টি রেখা তৃতীয় রেখার সেই দিকে বাড়িয়ে দিলে পরস্পরকে ছেদ করবে। (এটিকে 'সমান্তরাল স্বীকার্য' বলা হয় কারণ ইউক্লিড এই স্বীকার্যের উপর ভিত্তি করে প্রমাণ করেন যে, একটি সরলরেখার কোন একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দুর মধ্য দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল একটি এবং একটিমাত্র সরলরেখা টানা যায়)।

বহুদিন পর্যন্ত গণিতজ্ঞদের ধারণা ছিল যে, ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য প্রথম চারটি স্বীকার্যের অনধীন নয়। অর্থাৎ প্রথম চারটি স্বীকার্য থেকে পঞ্চমটি প্রমাণ করা সম্ভব। বহু শতাব্দী ধরে অনেক গণিতজ্ঞ এটি প্রমাণ করতে চেষ্টা করেন, কিন্তু সব চেষ্টাই বিফল হয়। শেষে একজন হাঙ্গেরীয় গণিতজ্ঞ বোলিয়াই (Bolyai) প্রথম থেকে ধরে নেন যে সরলরেখাটির সমান্তরাল একাধিক সরলরেখা টানা সম্ভব। এইভাবে প্রথম চারটি স্বীকার্য এবং এই পরিবর্তিত পঞ্চম স্বীকার্যের উপর ভিত্তি করে তিনি ইউক্লিডের মত একের পর এক উপপাদ্য প্রমাণ করতে লাগলেন এই আশায় যে, শেষ পর্যন্ত কোন দু'টি পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্তে আসা সম্ভব হবে অর্থাৎ দেখান যাবে যে এই নূতন জ্যামিতিটির মধ্যে অসংগতি আছে। কিন্তু তা হল না। পরে দেখা গেল যে, এই পরিবর্তিত পঞ্চম স্বীকার্যের উপর ভিত্তি করে যে জ্যামিতি রচিত হয় তা ইউক্লিডীয় জ্যামিতির মতই সংগতিপূর্ণ। কাজেই একেও ইউক্লিডীয় জ্যামিতির সংগে সমান মর্যাদা দেওয়া উচিত। এই জ্যামিতিতে একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের কম। একে বলা হয় পরাবৃত্তীয় জ্যামিতি এবং এর কথা প্রকাশ করেন বোলিয়াই 1832 খৃষ্টাব্দে। এই সময়েই রুশ গণিতজ্ঞ লোবাচেভ্স্কিও (Lobatchevsky) (1829) স্বতন্ত্রভাবে অইউক্লিডীয় জ্যামিতি আবিষ্কার করেন। ইতিপূর্বেই গাউস (Gauss) অইউক্লিডীয় জ্যামিতি আবিষ্কার করেছিলেন, কিন্তু প্রকাশ করেন নি। সেজন্য গাউস, বোলিয়াই এবং লোবাচেভ্স্কি তিনজনকেই অইউক্লিডীয় জ্যামিতির আবিষ্কর্তা বলে স্বীকার করা হয়। এর পর রীমান (Riemann) নামক এক জার্মান গণিতজ্ঞ 1854 খৃষ্টাব্দে উপবৃত্তীয় জ্যামিতি আবিষ্কার করেন যাতে ধার নেওয়া হয় যে, কোন একটি সরলরেখার সমান্তরাল অন্য কোন সরলরেখা টানা সম্ভব নয়। এই জ্যামিতিতে ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে বেশী।

ত্রিমাত্রার ইউক্লিডীয় জ্যামিতির ক্ষেত্রে রেখাণুর বর্গ সমীকরণ ( $4-1(a)$ ) থেকে পাওয়া যায়। এই সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত রূপে প্রকাশ করা যায়ঃ

$$dl^2 = \sum_{i,\,k=1}^{3} \eta_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{4—20}$$

যেখানে $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ এবং $\eta_{ik}$ র উপাংশগুলি হবে

| | | |
|---|---|---|
| $\eta_{11}$ | $\eta_{12}$ | $\eta_{13}$ |
| 1 | 0 | 0 |
| $\eta_{21}$ | $\eta_{22}$ | $\eta_{23}$ |
| 0 | 1 | 0 |
| $\eta_{31}$ | $\eta_{32}$ | $\eta_{33}$ |
| 0 | 0 | 1 |

$\eta_{ik}$ একটি ত্রিমাত্রিক দ্বিতীয় শ্রেণীর টেন্সর এবং এর উপাংশের সংখ্যা $(3)^2 = 9$. সাধারণভাবে যদি একটি টেন্সরের শ্রেণী সংখ্যা $m$ হয় এবং মাত্রার সংখ্যা হয় $n$ তা হলে উপাংশের সংখ্যা হবে $(n)^m$। $\eta_{ik}$ র উপাংশগুলি নিম্নলিখিতরূপে লেখা হয়

$$\eta_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{4—20a}$$

প্রথম অন্তাক্ষর $i$ সারিসংখ্যা নির্দেশ করে, অর্থাৎ $i=1$ হলে প্রথম সারি বোঝাবে, $i=2$ দ্বিতীয় সারি ইত্যাদি। দ্বিতীয় অন্তাক্ষর $k$ স্তম্ভ সংখ্যা নির্দেশ করে। আইনষ্টাইনের রীতি অনুসারে আমরা এখন সমষ্টি চিহ্ন বাদ দিয়ে লিখব এবং কোন অন্তাক্ষর দু'বার উপস্থিত থাকলে সেটির সম্ভাব্য সকল মানের জন্য সমষ্টি নেব। অতএব আমরা সমীকরণ (4—20) কে এখন নিম্নলিখিত রূপে লিখব

$$dl^2 = \eta_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{4—20b}$$

পোয়াঁকারের রূপান্তর (4 – 4) ব্যবহার করলে রেখাণুর বর্গকে সমীকরণ (4—5) এর সাহায্যে লেখা যায়। এক্ষেত্রে লেখা যায়

$$ds^2 = +\eta_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{4—21}$$

এখানে $\mu$ ও $\nu$ এর মান 1 থেকে 4 হতে পারে এবং $\mu$ ও $\nu$ এর সকল মানের জন্য সমষ্টি নির্ণয় করতে হবে। আমরা এখন থেকে 1 থেকে 4 সংখ্যার

পরিবর্তে গ্রীক অক্ষর এবং 1 থেকে 3 সংখ্যার পরিবর্তে ল্যাটিন অক্ষর ব্যবহার করব। এখন

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (4—21a)$$

সমীকরণ (4—20$a$) এবং (4—21$a$) থেকে দেখা যাচ্ছে যে, $\eta_{ik}$ এবং $\eta_{\mu\nu}$ এর কর্ণস্থ উপাংশগুলি সব সমান। কাজেই সবদিকে পরিমাপের একক সমান হবে। আমরা পূর্বেই দেখেছি যে, চিত্র (4 – 1) এ সব অক্ষের একক বিন্দুগুলি মূলবিন্দু O থেকে সমদূরবর্তী। এখন আমরা যদি দেশ-কালাঙ্কের সবগুলির জন্য বাস্তব সংখ্যা নিই তা হলে রেখাণুর বর্গ হবে

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 \qquad (4—22)$$

যেখানে $x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z,\ x_4 = ct$

এক্ষেত্রে

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad (4—22a)$$

মিনকভস্কি বাস্তব দেশ-কালাঙ্ক ব্যবহার করেছিলেন, কাজেই এ ক্ষেত্রে $\eta_{\mu\nu}$ এর সব কর্ণস্থ উপাংশগুলি সমান নয়। অতএব এখন একক বিন্দুগুলির সংযোজনকারী রেখাটি বৃত্ত হবে না। এই জ্যামিতি ইউক্লিডীয় হবে না। পরে আমরা মিনকভস্কি প্রদত্ত চতুর্মাত্রিক জগৎ সম্বন্ধে বিশদভাবে আলোচনা করব। দেখা যাচ্ছে যে, কল্পিত কালাঙ্ক ত্যাগ করতে হলে ইউক্লিডীয় জ্যামিতিও ত্যাগ করতে হয়। কিন্তু সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বে আমরা ইউক্লিড়ীয় জ্যামিতি ব্যবহার করতে পারি না। সেখানে আইনষ্টাইন রীমানীয় জ্যামিতি ব্যবহার করেছিলেন। রীমান সাধারণভাবে সেই সমস্ত জ্যামিতির কথা আলোচনা করেন যাতে রেখাণুর বর্গ নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায়ঃ

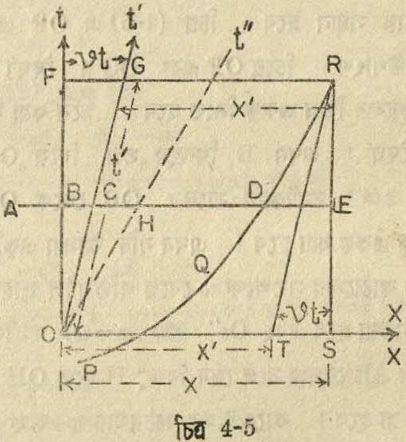
$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad (4—23)$$

এক্ষেত্রে $\eta_{\mu\nu}$ এর স্থানে $g_{\mu\nu}$ লেখা হয়েছে। $g_{\mu\nu}$ র উপাংশগুলি $\eta_{\mu\nu}$ এর

উপাংশগুলির মত ধ্রুবরাশি নয়, সেগুলি দেশ-কালাঙ্কের অপেক্ষক। $g_{\mu\nu}$ বা $\eta'_{\mu\nu}$ কে পরিমাপক টেন্সর বলা হয়। এদের উপাংশের সংখ্যা $(4)^2=16$। এই পরিমাপক টেন্সরটি জানা থাকলে জ্যামিতির অন্যান্য গুণাগুণ নির্ণয় করা যায়। $g_{\mu\nu}$ টেন্সরটি প্রতিসম অর্থাৎ $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$। অতএব $g_{\mu\nu}$ এর অনধীন উপাংশের সংখ্যা 10, কর্ণস্থ উপাংশ $g_{11}, g_{22}, g_{33}$, ও $g_{44}$ এই চারটি এবং কর্ণ-বহিঃস্থ অনধীন উপাংশের সংখ্যা 6টি, $g_{12}, g_{23}, g_{31}, g_{14}, g_{24}, g_{34}$।

সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বে কাজে লাগে বলে এখন পোয়াঁকারে প্রদত্ত জ্যামিতিক প্রতিরূপের চেয়ে মিন্‌কভ্‌স্কি প্রদত্ত প্রতিরূপ বেশী ব্যবহৃত হয়।

**4-3 গালিলীয় রূপান্তরের জ্যামিতিক প্রতিরূপ**—মিন্‌কভ্‌স্কির চতুর্মাত্রিক জগৎ নিয়ে আলোচনা করার পূর্বে আমরা আলোচনা করব, গালিলীয় রূপান্তরের জ্যামিতিক প্রতিরূপ দেওয়া যায় কি না। মনে করা যাক যে (চিত্র 4-5) একটি বস্তুকণা $x$ অক্ষের সমান্তরাল দিকে গতিশীল। তাহলে আমরা $x-t$ লেখ




চিত্র 4-5

এঁকে বস্তুকণার গতি চিত্রিত করতে পারি। মনে করা যাক যে, S কাঠামোয় $x$ ও $t$ অক্ষ পরস্পরের উপর লম্ব।

এখন উক্ত বস্তুকণার গতি S′ কাঠামো থেকে কি রকম দেখাবে? গালিলীয় রূপান্তর অনুযায়ী

$$x'=x-vt, \; t'=t \qquad (4-24)$$

S ও S′ কাঠামোর মূলবিন্দু দু'টি $t=t'=0$ কালাঙ্কে সমস্থানিক। S′ কাঠামোর মূলবিন্দুতে $x'=0$। অতএব মূলবিন্দুর S কাঠামোর সাপেক্ষে গতি $x=vt$ সমীকরণ দ্বারা নির্দিষ্ট হবে। চিত্র (4-5) এ OG রেখাটির জন্য এই সমীকরণ সত্য। এখন $Ox$ এবং OG কে যথাক্রমে তির্যক অক্ষ $Ox'$ এবং $Ot'$ হিসাবে ব্যবহার করা হবে, বস্তুকণার S′ কাঠামোর সাপেক্ষে গতি নির্দিষ্ট করার জন্য। S′ কাঠামোর সাপেক্ষে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হলে R বিন্দু থেকে $Ox'$ এবং $Ot'$ অক্ষের সমান্তরাল যথাক্রমে RG এবং RT রেখা টানতে হবে। এই রেখাগুলি $Ot'$ এবং $Ox'$ অক্ষ দু'টিকে যথাক্রমে G ও T বিন্দুতে ছেদ করে। R বিন্দুর $x'$ ও $t'$ স্থানাঙ্ক যথাক্রমে OT এবং OG হবে। অনুরূপে R বিন্দুর $x$ ও $t$ স্থানাঙ্ক যথাক্রমে OS এবং OF। $FG=vt$, এখন $OS=FR=x$। অতএব $x'=OT=GR=FR-FG=x-vt$। অতএব $x$ ও $x'$ অক্ষ একই দিকে নেওয়া যায় এবং তাদের একক ও সমান হবে।

গালিলীয় রূপান্তরে কালাঙ্ক কাঠামো নিরপেক্ষ। কাজেই কালাঙ্কের মান S ও S′ কাঠামোয় সমান হবে। চিত্র (4-5) এ OF এবং OG R বিন্দুর যথাক্রমে $t$ ও $t'$ উপাংশ। চিত্রে OF এবং OG র দৈর্ঘ্য এক নয়। কাজেই $Ot'$ এর দিকে কালের ভিন্ন একক নিতে হবে। মনে করা যাক যে S কাঠামোয় OB র একক দৈর্ঘ। এখন B বিন্দুর মধ্য দিয়ে $Ox$ রেখার সমান্তরাল ABCDE রেখা $t=1$ সমীকরণ মানে। OC থেকে $Ox'$, $Ot'$ অর্থাৎ S′ কাঠামোর কালের একক ধরা হবে। এখন যদি আমরা একটি তৃতীয় কাঠামো S″ নিই যেটি S কাঠামোর সাপেক্ষে $w$ বেগে গতিশীল তাহলে তার $Ox''$ অক্ষ $Ox$ এর দিকে নেওয়া হবে এবং $Ot''$ অক্ষ $x=wt$ সমীকরণ মানবে। এই নূতন $t''$ অক্ষের AE রেখার সঙ্গে ছেদ বিন্দু H হলে OH $t''$ অক্ষের দিকের একক দৈর্ঘ্য নেওয়া হবে। কাজেই সব কাঠামোর $x$ অক্ষ অভিন্ন হবে কিন্তু কাল অক্ষ বিভিন্ন হবে এবং তাদের একক দৈর্ঘ্যও AE রেখার সঙ্গে ছেদ বিন্দু থেকে জানা যাবে। বস্তুকণার জাগতিক রেখা সব কাঠামোতেই PQR হবে। যদি বস্তুকণাটি সমবেগে চলে তা হলে জাগতিক রেখাটি সরলরেখা হবে। জাগতিক রেখা বক্ররেখা হবার অর্থ যে বেগের পরিবর্তন হচ্ছে অর্থাৎ এটি ত্বরিত গতি।

আমরা সহজ করার জন্য ধরে নিয়েছিলাম যে, বস্তুকণার গতি $x$ অক্ষের সমান্তরাল। $y$ ও $z$ অক্ষ এর সঙ্গে নিলে আমরা চতুর্মাত্রিক চিত্র পাব। $y$ ও $z$ স্থানাংক সব কাঠামোয় সমান। অতএব $x$, $y$ ও $z$ অক্ষ সব কাঠামোতেই অভিন্ন। $t$ অক্ষ $x$ অক্ষের সঙ্গে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে কিন্তু অন্য অক্ষগুলির সঙ্গে লম্ব। $t$ অক্ষের একক বিন্দুগুলির সংযোজনকারী রেখাটি $x$ অক্ষের সমান্তরাল হবে।

**4-4. মিনকভ্‌স্কির চতুর্মাত্রিক জগৎ**—আমরা ইতিপূর্বেই 4-1 বিভাগে লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তরের জ্যামিতিক প্রতিরূপ নিয়ে আলোচনা করেছি যেখানে একটি স্থানাংক কল্পিত সংখ্যা। এখানে আমরা সব স্থানাংককেই বাস্তব ধরে নেব :

$$x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z,\ x_4 \equiv ct \tag{4—25}$$

পূর্বে আমরা কল্পিত কোণ নিয়েছিলাম, এখন সে জায়গায় আমরা একটি বাস্তব ছদ্মকোণ $\phi$ নেব, যেখানে

$$\theta = i\phi \tag{4—26}$$

সমীকরণ (4 – 13) থেকে পাব

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2} = \cosh\phi = \gamma \tag{4—27a}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i\ \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2} = i\sinh\phi = i\,\gamma\beta \tag{4—27b}$$

$$\therefore\quad \sinh\phi = \gamma\beta$$
$$\tanh\phi = \beta \tag{4—27c}$$

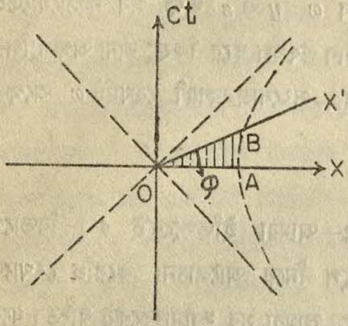
অতএব সমীকরণ (4 – 11) ও (4 – 12) থেকে পাই

$$x_1' = x_1 \cosh\phi - x_4 \sinh\phi \tag{4—28}$$

$$x_4' = -x_1 \sinh\phi + x_4 \cosh\phi \tag{4—29}$$

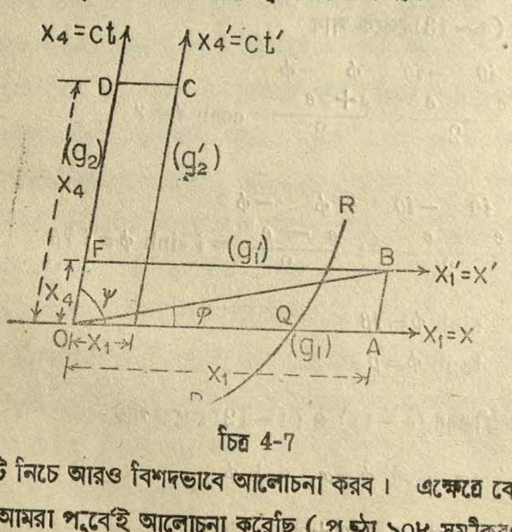
এখানে মনে রাখতে হবে যে, (4 – 11) ও (4 – 12) এর $x_4$ এখানে $i\,x_4$

চিত্র 4-6 এ চিত্র 4-1 এর মত $x$ ও $x'$ অক্ষ আঁকা হয়েছে কিন্তু এখানে একক বৃত্তের পরিবর্তে একটি একটি একক পরাবৃত্ত আঁকা হয়েছে। প্রমাণ করা যায় যে ছদ্মকোণ $\phi$ নূতন $x'$ অক্ষ, পুরাতন $x$ অক্ষ এবং পরাবৃত্তটির মধ্যস্থিত স্থানের ক্ষেত্রফলে সমান। পরাবৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির (cosh $\phi$, sinh $\phi$ ইত্যাদি) পরাবৃত্তের সাপেক্ষে যেভূমিকা বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলিরও (cos $\theta$, sin $\theta$ ইত্যাদি) বৃত্তের সাপেক্ষে সেই ভূমিকা। আমরা জানি যে, একক বৃত্তের




চিত্র 4-6

ক্ষেত্রে দুই ব্যাসার্ধ এবং বৃত্তের চাপের মধ্যস্থিত অংশের ক্ষেত্রফলকে ব্যাসার্ধ দু'টির মধ্যস্থিত কোণের পরিমাপ হিসাবে ব্যবহার করা যায়। দেখা যাচ্ছে যে, বাস্তব দেশ-কালাঙ্ক নিলে লোরেন্ট্স্ রূপান্তরকে পরাবৃত্তের দুই যুগ্ম ব্যাসের মধ্যে রূপান্তর হিসাবে দেখা যায়। অন্যদিকে কল্পিত কালাঙ্ক নিলে লোরেন্ট্স্ রূপান্তরকে বৃত্তের দুই ব্যাসার্ধের মধ্যে রূপান্তর বলে মনে করা যায়। আমরা




চিত্র 4-7

এই ব্যাপারটি নিচে আরও বিশদভাবে আলোচনা করব। এক্ষেত্রে বেগ সংযোজন সূত্রের কথা আমরা পূর্বেই আলোচনা করেছি ( পৃষ্ঠা ১০৮ সমীকরণ 3-67 )

মনে করা যাক যে, OA এবং OD $x_1 = x$ এবং $x_4 = ct$, S কাঠামোর দুই

অক্ষ। আমরা এখনও দুই অক্ষের মধ্যস্থ কোণকে সমকোণ ধরি নি'। মনে করা যাক যে, এই কোণের পরিমাপ $\psi < 90^\circ$। এখন PQR একটি বস্তুকণার জাগতিক রেখা। এই রেখাটি S কাঠামোর সাপেক্ষে বস্তুকণার গতি নির্দেশ করে। এখন আমরা S' কাঠামোর অক্ষ $x_1'$ এবং $x_4'$ কে এমনভাবে নেব যে, একই জাগতিক রেখা S' কাঠামোর সাপেক্ষে বস্তু কণাটির গতি নির্দেশ করে। S ও S' কাঠামোর মধ্যে লোরেন্টস্‌ রূপান্তর হবে ( সমীকরণ 3-19 ):

$$\left.\begin{aligned} x_1' &\equiv x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - \frac{v}{c}.ct) = \gamma(x_1 - \beta x_4) \\ x_4' &\equiv ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) = \gamma(x_4 - \beta x_1) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{—}30)$$

আমরা জানি যে, S কাঠামোর $x_1$ অক্ষের সমীকরণ $x_4 = 0$ এবং $x_4$ অক্ষের সমীকরণ $x_1 = 0$। অনুরূপে (4-30) থেকে পাই যে, $x_4' = 0$ ( S' কাঠামোর $x_1'$ অক্ষ ) হলে

$$x_4 = \beta x_1 \qquad (4\text{—}31)$$

এটি $x_1$, $x_4$ তির্যক অক্ষের সাপেক্ষে একটি সরলরেখা OB। যদি এই রেখার OA র সঙ্গে নতি $\phi$ হয় তা হলে:

$$\beta = \frac{x_4}{x_1} = \frac{OF}{OA} = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin\phi}{\sin(\psi - \phi)} \qquad (4\text{—}32)$$

অনুরূপে $x_4'$ অক্ষের জন্য $x_1' = 0$ এবং (4-30) থেকে পাই

$$x_1 = \beta x_4 \qquad (4\text{—}33)$$

এটি ও একটি সরলরেখা যার OD রেখার সঙ্গে নতি $\phi$ হবে এবং

$$\beta = \frac{OE}{OD} = \frac{CD}{OD} = \frac{\sin\phi}{\sin(\psi - \phi)} \qquad (4\text{—}34)$$

কাজেই $x_1'$ এবং $x_4'$ অক্ষ দু'টি $x_1$ ও $x_4$ অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। নিউটনীয় বলবিদ্যার সঙ্গে এক্ষেত্রে পার্থক্য এই যে, এখন $x_1'$ ও $x_4'$ দু'টি অক্ষেরই দিক পরিবর্তিত হয়েছে।

আমরা গালিলীয় রূপান্তরের জ্যামিতিক প্রতিরূপ আলোচনা করার সময় দেখেছি যে $x$ ও $t$ অক্ষের দিকের পরিমাপের মানদণ্ড এক নাও হতে পারে। এখানে মনে করা যাক যে, $x_1$, $x_4$, $x_1'$ ও $x_4'$ অক্ষের মানদণ্ড যথাক্রমে $g_1$,

$g_2$, $g_1'$ ও $g_2'$। এর অর্থ হল যে, একটি স্কেল দিয়ে এই সমস্ত অক্ষের দিকের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা হলে তা থেকে প্রকৃত স্থানাঙ্ক জানতে হলে উপযুক্ত মানদণ্ড দ্বারা ভাগ করতে হবে; অর্থাৎ $x_1$ অক্ষের দিকের দৈর্ঘ্যকে $g_1$ দিয়ে $x_4$ অক্ষের দিকের দৈর্ঘ্যকে $g_2$ দিয়ে ইত্যাদি। আমরা এখন সহজ করার জন্য মনে করব যে, S কাঠামোর $x_1$ ও $x_4$ অক্ষের দিকের মানদণ্ড সমান, অর্থাৎ $g_1 = g_2 = g$, অনুরূপে $g_1' = g_2' = g'$।

মনে করা যাক যে, $x'$ অক্ষের দিকে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক S′ কাঠামোয় (1′, 0′)। অতএব ঐ বিন্দুর S কাঠামোর স্থানাঙ্ক হবে

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\equiv x = \gamma(x_1' + vt') = \gamma(x_1' + \beta x_4') = \gamma \\ x_4 &\equiv ct = \gamma\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right) = \gamma(x_4' + \beta x_1') = \gamma\beta \end{aligned}\right\} \quad (4-35)$$

সামন্তরিক OABF থেকে আমরা পাই

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 + 2OA.AB \cos\psi$$

অতএব $g'^2 = \gamma^2 g^2 + \gamma^2\beta^2 g^2 + 2\gamma^2\beta g^2 \cos\psi$

অর্থাৎ
$$\frac{g'^2}{g^2} = \gamma^2(1 + 2\beta\cos\psi + \beta^2) \quad (4-36)$$

এ ছাড়া $\beta$ র মান সমীকরণ (4-34) থেকে পাওয়া যায়।

কাঠামোগুলির আপেক্ষিক বেগের উপর তাদের $x_1$, $x_4$ অক্ষের অন্তঃস্থ কোণের মান নির্ভর করবে। তার মধ্যে একটি কাঠামো থাকবে যার অক্ষ দুটির অন্তর্গত কোণ সমকোণ। আমরা যদি সেটিকে আমাদের প্রথম কাঠামো S ধরি, তা হলে গণনায় সুবিধা হয়। কিন্তু তার অর্থ এই নয় যে, ঐ কাঠামোর কোন বিশেষ গুণ আছে। সেক্ষেত্রে $\psi = 90°$ এবং আমরা পাই

$$\frac{g'^2}{g^2} = \gamma^2(1 + \beta^2) = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \quad (4-37)$$

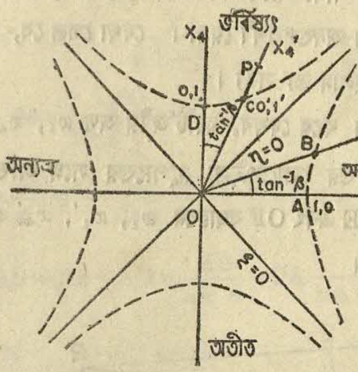
সমীকরণ (4-34) থেকে পাই

$$\tan\phi = \beta \quad (4-38)$$

অতএব (4-37) ও (4-38) থেকে

$$\frac{g'^2}{g^2} = \frac{1+\tan^2\phi}{1-\tan^2\phi} = \frac{1}{\cos 2\phi} \quad (4-39)$$

সমীকরণ (4-38) থেকে স্পষ্ট যে, এক্ষেত্রে আলোর জাগতিক রেখা হবে $x_1$ ও $x_4$ অক্ষের $45^\circ$ কোণে আনত রেখা (চিত্র 4-7)। $x_1'$ এবং $x_4'$ অক্ষও এই আলোক রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। এখন আমরা দেখব, মূলবিন্দু থেকে একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর সঞ্চার পথ কি হবে।




চিত্র 4-8

S কাঠামোর মানদণ্ডকে একক ধরা হউক, তা হলে $g=1$. অতএব (4-39) থেকে

$$g'^2=\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}=\frac{\gamma^2+\gamma^2\beta^2}{\gamma^2-\gamma^2\beta^2} \qquad (4\text{—}40)$$

যেহেতু (1′, 0′) বিন্দুর S কাঠামোর স্থানাঙ্ক $x_1=\gamma$ এবং $x_4=\gamma\beta$ (সমীকরণ 4-35 দেখুন)। অতএব

$$g'^2=\frac{x_1^2+x_4^2}{x_1^2-x_4^2} \qquad (4\text{—}41)$$

$x_1$, $x_4$ কার্টেজীয় কাঠামো, অতএব

$$OB^2=g'^2=x_1^2+x_4^2 \qquad (4\text{—}42)$$

সমীকরণ (4-41) ও (4-42) থেকে পাই

$$x_1^2-x_4^2=1 \qquad (4\text{—}43)$$

এটি একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ এবং বিভিন্ন $x_1$ অক্ষের একক দূরত্বের বিন্দুর সঞ্চারপথ—একে 'একক পরাবৃত্ত' বলা যায়। অনুরূপে C (0′, 1′) বিন্দু নিয়ে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে, $x_4$ অক্ষের একক পরাবৃত্ত হবে

$$x_1^2-x_4^2=-1 \qquad (4\text{—}44)$$

এখন আমরা যদি চলের পরিবর্তন করে লিখি

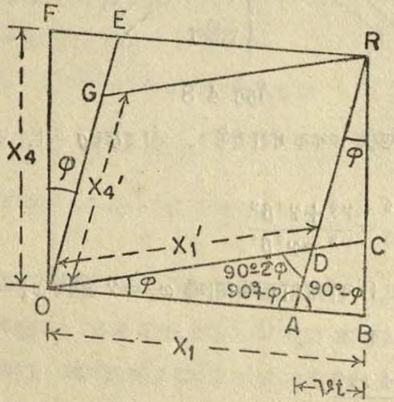
$$x_1 - x_4 = \eta,\ x_1 + x_4 = \xi \qquad (4\text{—}45)$$

তা হলে একক পরাবৃত্তগুলির সমীকরণ হবে

$$\xi\eta = \pm 1 \qquad (4\text{—}46)$$

প্রত্যেকটি পরাবৃত্তের দু'টি শাখা আছে এবং $x_1 = x_4$ ($\xi = 0$) এবং $x_1 = x_4$ ($\eta = 0$) এই পরাবৃত্তগুলির অনন্তস্পর্শী রেখা। দেখা গেল যে, আমরা পৃষ্ঠা ১৯৮ এ যা অনুমান করেছিলাম তা' সত্য।

এখন আমরা পরীক্ষা করে দেখব, কার্টেজীয় অক্ষ $x_1$, $x_4$ থেকে তির্যক অক্ষ $x_1'$, $x_4'$ এ রূপান্তর লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সঙ্গে অভিন্ন হয় কিনা। চিত্র 4-9 এ OB, OC, OE এবং OF যথাক্রমে $x_1$, $x_1'$, $x_4'$ এবং $x_4$ অক্ষ। R একটি জাগতিক বিন্দু।




চিত্র 4-9

$$x_1 = \text{OB},\ x_4 = \text{OF}$$

$$x_1' = \frac{\text{OD}}{g'},\ x_4' = \frac{\text{OG}}{g'}$$

$\triangle$OAD তে

$$\text{OD} : \text{OA} : \text{AD} = \sin(90^\circ + \phi) : \sin(90^\circ - 2\phi) : \sin\phi$$

$$= \cos\phi : \cos 2\phi : \sin\phi$$

$$\therefore\ \text{OD} = \text{OA}\ \frac{\cos\phi}{\cos 2\phi} \qquad (4\text{—}47)$$

এখন $AB = RB \tan\phi = \grave{O}F.\ \frac{v}{c} = ct.\ \frac{v}{c} = v\,t$

$$\therefore\quad OA = OB - AB = x - vt$$

$$\therefore\quad OD = (x - vt)\ \frac{\cos\phi}{\cos 2\phi} \qquad (4\text{—}48)$$

এখন $\tan\phi = \beta,\ \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}},\quad \sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}},$

$$\cos\ 2\phi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^1} \qquad (4\text{—}49)$$

$$x' = \frac{OD}{g'} = \frac{(x-vt)\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} = \gamma(x - vt) \qquad (4\text{—}50)$$

এখন $OG = RD = RA - AD = \frac{RB}{\cos\phi} - OA\ \frac{\sin\phi}{\sin(90^\circ - 2\phi)}$

$$= \frac{ct}{\cos\phi} - \frac{(x-vt)\sin\phi}{\cos 2\phi} \qquad (4\text{—}51)$$

$$\therefore\quad ct' = \frac{OG}{g'} = \frac{ct\sqrt{\cos 2\phi}}{\cos\phi} - \frac{(x-vt)\sin\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

$$= ct\sqrt{1-\beta^2} - \frac{(x-vt)\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{ct(1-\beta^2) - (x-vt)\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(ct - \beta x) \qquad (4\text{—}52)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad (4\text{—}53)$$

সমীকরণ (4-50) এবং (4-53) লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তরের সঙ্গে অভিন্ন।

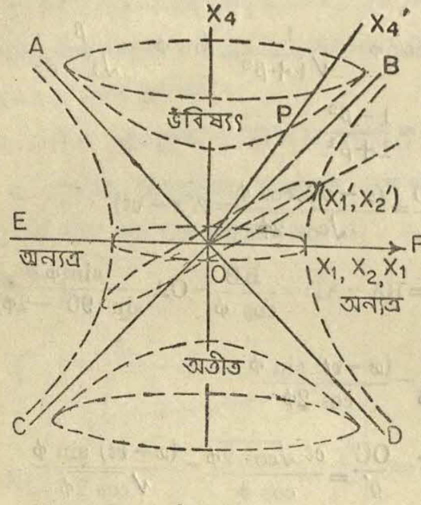
পরাবৃত্তের সমীকরণগুলি চতুর্মাত্রার জগতে হবে

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - x_4{}^2 = \pm 1 \qquad (4\text{—}54)$$

এগুলিকে আমরা চতুর্মাত্রিক পরাগোলক বলতে পারি কারণ দেশের এক মাত্রা কমালে এটি পরাগোলক হয় ( চিত্র 4-10 )। আলোক রেখার সমীকরণ চতুর্মাত্রিক জগতে হবে

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - x_4{}^2 = 0 \qquad (4\text{—}55)$$

এটিকে আমরা চতুর্মাত্রিক শঙ্কু বলতে পারি কারণ দেশের এক মাত্রা কমালে এটি শঙ্কু হবে। এই শঙ্কুর উপরস্থ জাগতিক বিন্দুগুলি এমন ঘটনাসমূহ সূচিত করে যাদের সঙ্গে মূল ঘটনার (মূল বিন্দুদ্বারা সূচিত ঘটনার) চতুর্মাত্রিক অন্তর শূন্য। সে জন্য এই শঙ্কুকে শূন্য শঙ্কু বা আলোক




চিত্র 4-10

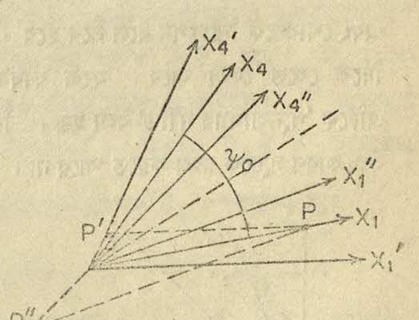
শঙ্কু বলা হয়।

যেহেতু $y=y'$ এবং $z=z'$, অর্থাৎ $x_2=x_2'$, $x_3=x_3'$ এই দু'দিকের মানদণ্ড সমান হবে এবং $Ox_2$, $Ox_2'$ এবং $Ox_3$, $Ox_3'$এর সমাপতন হবে।

উপরোক্ত আলোক শঙ্কু চতুর্মাত্রিক জগৎকে চারভাগে ভাগ করে। AOB এবং COD র মধ্যস্থিত উপরের ও নিচের অংশের বিন্দুগুলি সেই সব ঘটনা সূচিত করে যাদের সঙ্গে মূল ঘটনার চতুর্মাত্রিক অন্তর কালতুল্য। উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে, সব কাল-অক্ষের ধনাত্মক দিক AOB র মধ্যে থাকবে কারণ $x_4'$ অক্ষের $x_4$ অক্ষের সঙ্গে নতি $\tan^{-1}\frac{v}{c}$ এবং বস্তুকণার জন্য $v<c$। অতএব $x_4$ অক্ষের সঙ্গে কোণ $45^\circ$ ডিগ্রির চেয়ে কম হবে। এই কাল-অক্ষগুলির নিচের ঋণাত্মক অংশ COD শঙ্কুর মধ্যে থাকবে। অতএব AOB শঙ্কুর মধ্যস্থিত বিন্দুগুলির কালাঙ্ক ধনাত্মক, অর্থাৎ এই ঘটনাগুলি মূল ঘটনার ভবিষ্যতে থাকবে এবং যেহেতু

সব কাঠামোর কাল-অক্ষ AOB র মধ্যে থাকে, অতএব এই ঘটনাগুলি সব কাঠামোতেই ভবিষ্যতে থাকবে। কাজেই এই অংশটিকে চরম ভবিষ্যৎ বলা যায় এবং মূল ঘটনা এগুলিকে প্রভাবিত করতে পারে। এই ঘটনাগুলিকে উপযুক্ত কাঠামোয় মূল ঘটনার সঙ্গে সমস্থানিক করা যায় (তু. পৃ: ১৪৬)। P যদি ঘটনাটির জাগতিক বিন্দু হয় তা হলে মূল বিন্দুর সঙ্গে সংযোগকারী রেখা OP কে উপযুক্ত কাঠামোর কাল-অক্ষ হিসাবে ব্যবহার করা যায় এবং সেই কাঠামোয় O এবং P সমস্থানিক। আলোক রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম দেশ-অক্ষ আঁকা যায়।

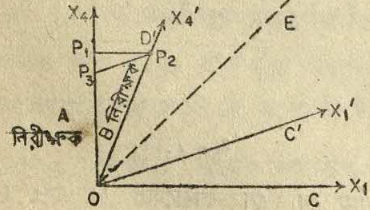
অনুরূপে COD র মধ্যস্থিত বিন্দুগুলি চরম অতীতের ঘটনা সূচিত করে। এগুলি মূল ঘটনাকে প্রভাবিত করতে পারে। দুই পাশের (অর্থাৎ AOC ও BOD র মধ্যস্থিত অংশ) সংযুক্ত অংশ সেই সমস্ত ঘটনা সূচিত করে যেগুলির সঙ্গে মূল ঘটনার চতুর্মাত্রিক অন্তর দেশ-তুল্য। উপযুক্ত কাঠামোয় এই ঘটনাগুলিকে মূল ঘটনার সঙ্গে সমকালীন করা যায়। সেই কাঠামোয় OP কে $x_1$-অক্ষ হিসাবে ব্যবহার করা হবে ফলে এই কাঠামোয় O এবং P সমকালীন। এই সমস্ত ঘটনা মূল ঘটনার সাপেক্ষে চরম অতীত বা চরম ভবিষ্যৎ হবে না। কোন কোন কাঠামোয় তাদের মূল ঘটনার পূর্বে এবং কোন কোনটিতে পরে ঘটেছে বলে মনে হবে। সেজন্য এই অঞ্চলকে আমরা বলছি 'অন্যত্র'। কেহ কেহ একে 'বর্তমান' বলেন যেহেতু কোন না কোন কাঠামোয় প্রত্যেকটি ঘটনাই বর্তমান বলে মনে হবে। চিত্র 4-11 এ দেখা যায় যে, যে কাঠামোয় O এবং P সমকালীন তার $x_1$ এবং $x_4$ অক্ষের মধ্যস্থ কোণ $\psi_0$। যে কাঠামোয় $x_1$ ও $x_4$ অক্ষের অন্তর্গত কোণ $\psi_0$ র চেয়ে বড় (উদাহরণস্বরূপ $x_1'$, $x_4'$ অক্ষ) সেখানে P ঘটনা O র পরে ঘটেছে বলে মনে



চিত্র 4-11

হবে। অন্য দিকে যে কাঠামোয় $x_1$ এবং $x_4$ এর অন্তর্গত- কোণ $\psi_0$ র চেয়ে ছোট (উদাহরণস্বরূপ চিত্র 4-9 এ $x_1''$, $x_4''$ অক্ষ) সেখানে P কে O র পূর্বে ঘটেছে বলে মনে হবে। যদি O এবং P এই দুই ঘটনার মধ্যে কার্যকারণ সম্পর্ক থাকে তা হলে কোন কোন কাঠামোয় P ঘটনা O র পূর্বে ঘটবে এবং সেখানে কার্যকারণ সূত্র লঙ্ঘিত হবে। কিন্তু O এবং P র মধ্যে কার্যকারণ সম্পর্ক থাকলে O থেকে কোন প্রভাবকে $c$ র চেয়ে বেশী বেগে P তে যেতে হবে কারণ O এবং P র মধ্যে দেশ-কালিক অন্তর দেশতুল্য। কিন্তু আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী কোন কার্যকরী প্রভাবের সর্বোচ্চ বেগ $c$। অতএব কার্যকারণ সূত্র এখানে লঙ্ঘিত হবার কোন সম্ভাবনা নেই (তু. পৃষ্ঠা ৯৮)।

আমরা অবশ্য পূর্বেই বলেছি যে, সুদর্শন আলোর চেয়ে দ্রুততর কণিকা ট্যাকিয়নের কল্পনা করেছেন (পৃষ্ঠা ১৭৯-৮১)। তাদের অস্তিত্বের বিরুদ্ধে অন্যতম যুক্তি হচ্ছে যে, তাদের ক্ষেত্রে কার্যকারণ সূত্র লঙ্ঘিত হবে অর্থাৎ কোন কোন কাঠামোয় ট্যাকিয়ন শোষণের পর নিক্ষিপ্ত হয়েছে বলে মনে হবে। ভবিষ্যতে আমরা দেখাব (বিভাগ 5-5) যে, সেই সমস্ত কাঠামোয় ট্যাকিয়নের শক্তি ঋণাত্মক হবে। তখন ঋণাত্মক শক্তির নিক্ষেপনকে ধনাত্মক শক্তির শোষণ এবং শোষণকে নিক্ষেপন বলে মনে হবে। কাজেই ট্যাকিয়ন্ কণিকাকে উল্টো দিকে যেতে দেখা যাবে। ফলে কার্যকারণ সূত্রের লঙ্ঘন বোঝা যাবে না। এটিকে 'পুনর্ব্যাখ্যার নীতি' বলা হয়। কিন্তু সবক্ষেত্রে এই পুনর্ব্যাখ্যার নীতি কার্যকারণ সূত্রকে রক্ষা করতে পারে না।




চিত্র 4-12

মনে করা যাক যে (চিত্র 4-12), A এবং B দু'জন নিরীক্ষক এবং B বিন্দু $x$ অক্ষের সমান্তরাল দিকে A থেকে $v$ বেগে সরে যাচ্ছে। A র কাঠামোর $x_1$ ও $x_4$ অক্ষ যথাক্রমে OC এবং OD। OE আলোর জাগতিক রেখা। B নিরীক্ষকের কাঠামোর $x_1'$ ও $x_4'$ অক্ষ যথাক্রমে OC' ও OD'। মনে করা যাক যে, A এবং B নিরীক্ষকের মধ্যে চুক্তি হয়েছে যে, A

কালাংক $t_A$ পর্যন্ত B র কাছ থেকে কোন ট্যাকিয়ন না পেলে সে B র কাছে তার কাঠামোর সাপেক্ষে অসীম বেগসম্পন্ন একটা ট্যাকিয়ন পাঠাবে এবং B সেই ট্যাকিয়ন গ্রহণ করা মাত্র তার নিজের কাঠামোর সাপেক্ষে অন্য একটি ট্যাকিয়ন A র কাছে পাঠাবে।

B র কাল-অক্ষের সমীকরণ ( অর্থাৎ OD′ এর সমীকরণ ) হবে $x=vt$। A র কাঠামোর সাপেক্ষে অসীম বেগ সম্পন্ন ট্যাকিয়নের জাগতিক রেখা তার $x_1$ অক্ষের সমান্তরাল হবে। মনে করা যাক যে, $P_1$ $(t_A)$ কালাংক পর্যন্ত B র কাছ থেকে কোন ট্যাকিয়ন না পেয়ে সে একটি অসীম বেগসম্পন্ন ট্যাকিয়ন পাঠাল যার জাগতিক রেখা $P_1P_2 \parallel OC$। $P_1$ এর স্থানাংক A র কাঠামোয় $(O, t_A)$। যেহেতু OD′ $x=vt$ সমীকরণ মানে, অতএব $P_2$ র S কাঠামোর দেশাংক হবে $vt_A$। যেহেতু $P_1P_2$ $x_1$ অক্ষের সমান্তরাল, অতএব $P_2$ র কালাংক $P_1$ এর সমান হবে। অতএব S কাঠামোয় $P_2$ র স্থানাংক $(vt_A, t_A)$। S′ কাঠামোয় $P_2$ র স্থানাংক হবে

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x-vt) = \gamma\,(vt_A - vt_A) = 0 \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(t_A - \frac{v^2 t_A}{c^2}\right) = \frac{t_A}{\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{—}56)$$

এখন B তার কাঠামোর সাপেক্ষে অসীম বেগে একটি ট্যাকিয়ন A র কাছে পাঠাল যার জাগতিক রেখা $x_1'$ অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ $P_2P_3$ হবে। $P_3$ র S′ কাঠামোর কালাংক $P_2$ র কালাংকের সমান অর্থাৎ $t_A/\gamma$ হবে। S′ কাঠামোর সাপেক্ষে OD র সমীকরণ হবে $x'=-vt'$। অতএব $P_3$ র S′ কাঠামোর স্থানাংক হবে $\left(-\frac{vt_A}{\gamma},\ \frac{t_A}{\gamma}\right)$ S কাঠামোর সাপেক্ষে $P_3$ র স্থানাংক হবে

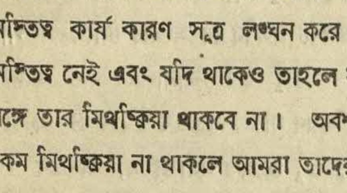
$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma\,(x'+vt') = \gamma\left(-\frac{vt_A}{\gamma}+\frac{vt_A}{\gamma}\right) = 0 \\ t &= \gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}\,x'\right) = \gamma\left(\frac{t_A}{\gamma}-\frac{v^2 t_A}{c^2\gamma}\right) = t_A\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{—}57)$$

$P_3$ র কালাংক $t_A\ \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) < t_A$ অর্থাৎ $P_1$ এর কালাংকের চেয়ে কম। অর্থাৎ B থেকে পাঠান ট্যাকিয়ন A র ট্যাকিয়ন পাঠানর আগে এসে পৌঁছবে। কিন্তু B র সঙ্গে চুক্তি অনুযায়ী A ট্যাকিয়ন পাঠাবে না। এ ব্যাপারটা আত্মবিরোধী হচ্ছে।

আমরা উপরের আলোচনায় গণনার সুবিধার জন্য ধরে নিয়েছি যে, ট্যাকিয়নগুলির বেগ অসীম কিন্তু সেটার প্রয়োজন নেই। ট্যাকিয়নের বেগ অসীম না হলেও ঘটনাগুলি আত্মবিরোধী হতে পারে।

পুনর্ব্যাখ্যা নীতিদ্বারা B মনে করবে যে, সে বস্তুকণা পাঠিয়েছে এবং A গ্রহণ করছে। কিন্তু তাতে অতীতমুখো ট্যাকিয়ন পাঠান বন্ধ হয় না। অনুরূপে A তার অতীতের সঙ্কেত পাঠিয়ে তার পিতামাতার বিবাহ বন্ধ করে দিতে পারে এবং তার নিজের জন্মই অসম্ভব হয়ে যাবে। কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, ট্যাকিয়নের অস্তিত্ব কার্য কারণ সূত্র লঙ্ঘন করে। এইজন্য অনেকের মতে ট্যাকিয়নের অস্তিত্ব নেই এবং যদি থাকেও তাহলে সাধারণ বস্তুকণার ব্রেডিয়ন (Bradyon) সঙ্গে তার মিথষ্ক্রিয়া থাকবে না। অবশ্য সাধারণ বস্তু বা শক্তির সঙ্গে কোন রকম মিথষ্ক্রিয়া না থাকলে আমরা তাদের অস্তিত্ব কোনদিন জানতে পারব না।

যদি চিত্র 4-8 এ কোটি $ct$ না ধরে $t$ ধরা হত তা হলে লেখের চেহারা চিত্র 4-13 এর মত হত। এ ক্ষেত্রে আলোর জাগতিক রেখা $t$ অক্ষের সঙ্গে $\tan^{-1}(c)$ কোণ উৎপন্ন করবে। এই কোণ খুব বড় কারণ $c$ এর মান খুব বড়। কাজেই $x'$ অক্ষের দিক খুব একটি সংকীর্ণ স্থানের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে। প্রকৃতপক্ষে ডান ও বাঁ দিকের একক পরাবৃত্তগুলি আরও সংকীর্ণ হবে, আমরা চিত্রে তাদের অনেক বড় করে দেখিয়েছি। আমরা জানি, যখন $c \to \infty$ তখন লোরেন্ট্‌স্ রূপান্তর গালিলীয় রূপান্তর থেকে অভিন্ন হয়ে যায়। চিত্র 4-13 এ সে ক্ষেত্রে $t$ অক্ষের সঙ্গে $x'$ অক্ষের কোণ 90° হবে

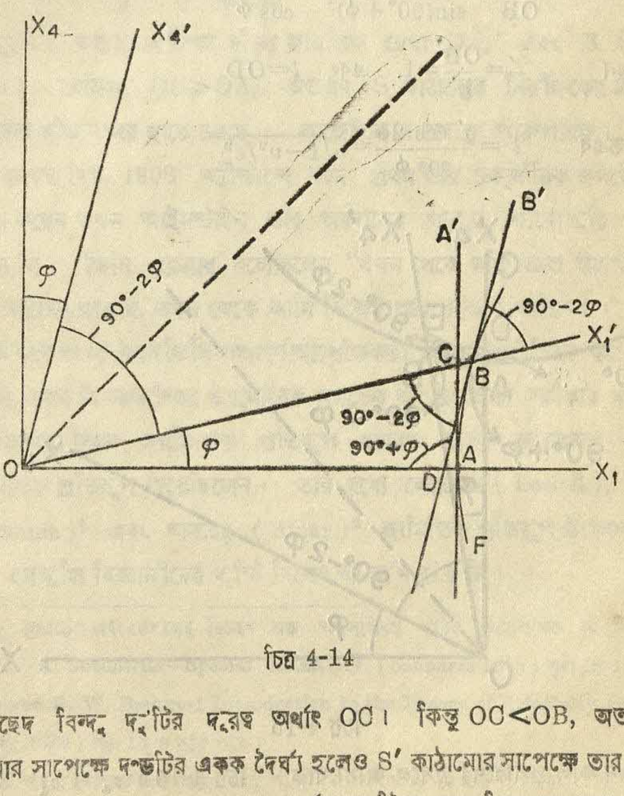


চিত্র 4-13

কারণ $\tan 90° = \infty$। অর্থাৎ $x$ ও $x'$ অক্ষের সমাপতন হবে (তু: চিত্র 4-4)। তা ছাড়া $t$ অক্ষের একক পরাবৃত্ত $x$ অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখায় রূপান্তরিত হবে।

এবার দেখা যাক মিনকভ্‌স্কি জগতে দৈর্ঘ্য সঙ্কোচন এবং কাল প্রসারণ কি ভাবে চিত্রিত করা যায়। মনে করা যাক যে, একটি এককদৈর্ঘ্যের দণ্ড S কাঠামোয় $x$ অক্ষের উপর স্থির আছে। S কাঠামোর ক্ষেত্রে $x_1$ ও $x_4$ অক্ষ সমকোণে

অবস্থিত। মনে করা যাক যে, দণ্ডটির প্রান্তবিন্দু দু'টি O এবং A। যেহেতু দণ্ডটি S কাঠামোয় স্থির কাজেই তার সব বিন্দুর জাগতিক রেখা $x_4$ অক্ষের সমান্তরাল হবে। এ ক্ষেত্রে প্রান্তবিন্দু O এবং A র জাগতিক রেখা যথাক্রমে $Ox_4$ এবং AA′ (চিত্র 4-14)। এখন মনে করা যাক যে, S′ কাঠামোর $x_1'$ ও $x_4'$ অক্ষ যথাক্রমে $x_1$ ও $x_4$ অক্ষের সঙ্গে $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। মনে করা যাক, FAB একক পরাবৃত্ত। $x_1'$ অক্ষের একক দৈর্ঘ্য হচ্ছে OB এবং $x_1$ অক্ষের OA। S′ কাঠামোর নিরীক্ষক দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হলে প্রান্তবিন্দু দু'টির সমকালীন অবস্থান নির্ণয় করতে হবে। চিত্র 4-14 S′ কাঠামোর সাপেক্ষে দণ্ডের দৈর্ঘ্য হবে $Ox_4$ এবং AA′ জাগতিক রেখা দু'টির $Ox_1'$ অক্ষের




চিত্র 4-14

সঙ্গে ছেদ বিন্দু দু'টির দূরত্ব অর্থাৎ OC। কিন্তু OC<OB, অতএব S কাঠামোর সাপেক্ষে দণ্ডটির একক দৈর্ঘ্য হলেও S′ কাঠামোর সাপেক্ষে তার দৈর্ঘ্য এককের চেয়ে কম বলে মনে হবে অর্থাৎ দণ্ডটিকে সংকুচিত বলে মনে হবে।

কাজেই লেখ থেকে দৈর্ঘ্য সঙ্কোচনের গুণীয় চিত্র পাওয়া গেল, এখন মাত্রিক পরিমাণ জানতে হবে। চিত্রে OC = OA sec $\phi$ = sec $\phi$, অতএব

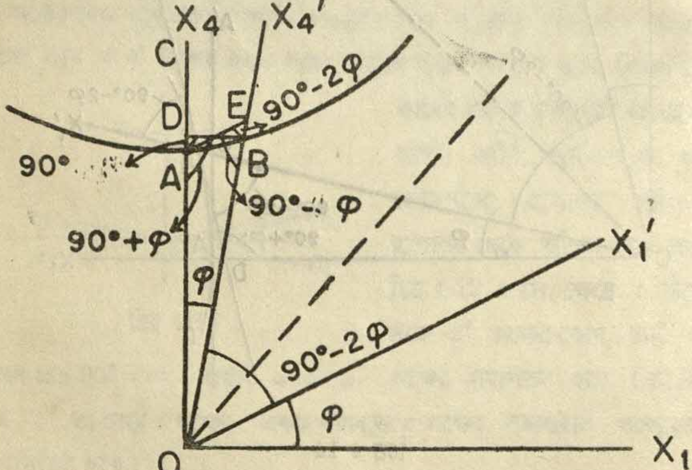
$$l' = \frac{OC}{g'} = \frac{\sec\phi}{g'} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

এখন মনে করা যাক যে, একক দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড S′ কাঠামোর $x'$ অক্ষের উপর স্থির আছে। চিত্রে OB তার অবস্থান। এখন প্রান্তবিন্দু দু'টির জাগতিক রেখা $Ox_4'$ এবং BB′ $x_4'$ অক্ষের সমান্তরাল। এই দুই জাগতিক রেখার সঙ্গে $x_1$ অক্ষের ছেদবিন্দু দু'টির মধ্যে দূরত্ব OD < OA। অতএব S কাঠামোর নিরীক্ষক দণ্ডটিকে সঙ্কুচিত দেখবে। এখন

$$\frac{OD}{OB} = \frac{\sin(90^\circ - 2\phi)}{\sin(90^\circ + \phi)} = \frac{\cos 2\phi}{\cos\phi}$$

এখন $$l' = \frac{OB}{g'} = 1, \quad \text{এবং} \quad l = OD$$

অতএব $$l = \frac{g' \cos 2\phi}{\cos\phi} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$




চিত্র 4-15

এখন কাল প্রসারণের প্রসঙ্গে আসা যাক। চিত্র 4-15এ $x_4$ ও $x_4'$ অক্ষের দিকের একক পরাবৃত্ত আঁকা হয়েছে। মনে করা যাক যে, S কাঠামোর মূল

বিন্দু Oতে একটি ঘড়ি স্থির আছে। তা হলে তার জাগতিক রেখা হবে $Ox_4$। মনে করা যাক, A বিন্দুতে ঐ ঘড়ির সময় অনুযায়ী $x_4=1$. এখন S′ কাঠামোর নিরীক্ষক যদি তার নিজের কাঠামোয় A বিন্দুর কালাঙ্ক নির্ণয় করে তা হলে সে A থেকে $x_1'$ অক্ষের সমান্তরাল AE রেখা টানবে এবং $x_4'$ অক্ষের সঙ্গে তার ছেদবিন্দু E উক্ত কালাঙ্ক দেবে। স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে যে OE>OB। অতএব, $S'$ কাঠামোর ঘড়ি অনুযায়ী E বিন্দুতে $x_4'>1$। অর্থাৎ কালের প্রসারণ ঘটেছে। তার মতে S কাঠামোর ঘড়ি মন্থর হারে চলেছে। পূর্বের মত $\frac{OE}{OA}=\frac{\cos\phi}{\cos 2\phi}$

$$x_4'=\frac{OE}{g'}=\frac{\cos\phi}{g'\cos 2\phi}=\gamma.$$

অনুরূপে S′ কাঠামোয় স্থির ঘড়ির জাগতিক রেখা $Ox_4'$ এবং B বিন্দুতে $x_4'=1$. যেহেতু OC>OA, অতএব S কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে S′ কাঠামোর ঘড়ি মন্থর হারে চলছে। কাজেই কাল প্রসারণ পারস্পরিক।

মিনকভ্‌স্কি 1908 খৃষ্টাব্দে যখন প্রথম তাঁর চতুর্মাত্রিক জগতের কথা প্রকাশ করেন তখন আইনষ্টাইন তাঁর অবদানের গুরুত্ব পুরোপুরি বুঝতে পারেন নি। তিনি একবার বলেছিলেন, "যখন থেকে গণিতজ্ঞরা আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আক্রমণ করেছে, তখন থেকে আমি নিজেই আর বুঝতে পারি না।" কিন্তু কয়েক বছর পরেই যখন তিনি সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের কথা চিন্তা করতে শুরু করেন, তখন মিনকভ্‌স্কির চতুর্মাত্রিক জগতের অপরিহার্যতা স্বীকার করেন।

মিনকভ্‌স্কির জ্যামিতিক প্রতিরূপ ছাড়াও আরও কয়েকজন বিকল্প জ্যামিতিক প্রতিরূপ দিয়েছিলেন। তার মধ্যে ল্যোডেল ( Loedel ), ব্রেহ্‌মে ( Brehme )[1] এবং অমরের ( Amar )[2] জ্যামিতিক প্রতিরূপ উল্লেখযোগ্য। কিন্তু সেগুলি বিজ্ঞানীদের দৃষ্টি বিশেষ আকর্ষণ করে নি।

---

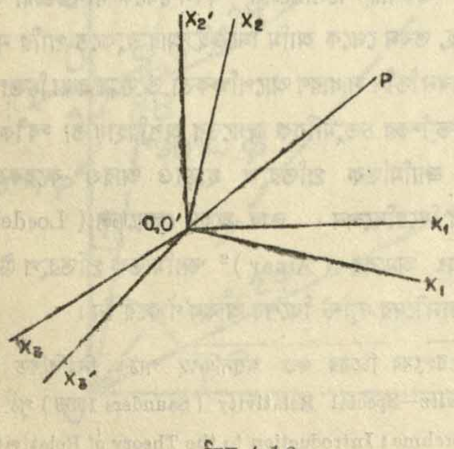
1. ল্যোডেল এবং ব্রেহ্‌মের চিত্রের জন্য অনুসন্ধিৎসু পাঠক নিম্নলিখিত বইগুলি দেখতে পারেন: A Shadowitz—Special Relativity (Saunders 1968) পৃষ্ঠা 18-24 এবং F. Sears and R. W. Brehme: Introduction to the Theory of Relativity (Addison-Wesley 1968) পৃষ্ঠা 13 ও তার পরে।

2. অমরের চিত্রের জন্য অনুসন্ধিৎসু পাঠক নিম্নলিখিত বই দেখতে পারেন: H. Arzelies —Relativistic Kinematics (Pergamon 1966) পৃষ্ঠা 274-5.

4-5. **চতুর্মাত্রিক ভেক্টর ও টেন্সর ঃ** আমরা পদার্থবিদ্যার সূত্রগুলিকে ত্রিমাত্রিক ভেক্টর ও টেন্সরের সাহায্যে প্রকাশ করি কারণ ভেক্টর ও টেন্সর জ্যামিতিক রাশি বা কাঠামো নিরপেক্ষ। অতএব কাঠামো নিরপেক্ষভাবে পদার্থবিদ্যার সূত্রগুলিকে ভেক্টর ও টেন্সরের সাহায্যে লেখা যায়।

প্রাচীন বলবিদ্যার একটি ভেক্টরকে তীরযুক্ত সরলরেখাদ্বারা সূচিত করা হয়। সেই সমস্ত রাশিকে স্কেলার বলা হয় যারা কাঠামো নিরপেক্ষ, অর্থাৎ কাঠামো পরিবর্তন করলেও তাদের মানের কোন পরিবর্তন হয় না। কোন বস্তুর তাপমাত্রা বা ভর স্কেলার রাশির উদাহরণ। অন্যদিকে ত্রিমাত্রিক জগতে একটি ভেক্টরের তিনটি উপাংশ আছে যাদের মান কাঠামোর উপর নির্ভর করে। এক কার্টিজীয় কাঠামো থেকে অন্য একটি কার্টিজীয় কাঠামোয় যেতে হলে সাধারণতঃ দু'ধরণের গতির প্রয়োজন হয় ঃ

(1) মূলবিন্দুর স্থানান্তরণ, যেখানে অক্ষগুলি অপরিবর্তিত থাকে এবং (2) মূলবিন্দুকে স্থির রেখে অক্ষগুলির আবর্তন। এ ছাড়া অবশ্য অক্ষের প্রতিফলনও হতে পারে, যেমন $x \to -x$, অথবা $y \to -y$ অথবা $z \to -z$। তা হলে একটি দক্ষিণাবর্ত কাঠামো বামাবর্ত কাঠামোয় রূপান্তরিত হয়।




চিত্র 4-16

কোন একটি বিন্দু P র অবস্থান S কাঠামোর মূলবিন্দু O থেকে P পর্যন্ত আঁকা একটি ভেক্টর দ্বারা সূচিত করা হয় (চিত্র 4-16)। এর নাম দেওয়া হোক

r। অন্য একটি কাঠামো S′ দেখান হয়েছে যার মূল বিন্দু O′ এবং O সমস্থানিক কিন্তু অক্ষগুলি S কাঠামোর অক্ষগুলির সমান্তরাল নয়। এ ক্ষেত্রে উভয় কাঠামোর P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর অভিন্ন কিন্তু স্থানাঙ্ক $x, y, z$ এবং $x', y', z'$ ভিন্ন হবে। এখন যদি S কাঠামোর অক্ষগুলির সঙ্গে S′ কাঠামোর অক্ষগুলির কোণের কোসাইন তালিকা 4-1 অনুযায়ী হয় তা হলে:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ x_2' &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\ x' &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}58)$$

তালিকা 4-1

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1'$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $x_2'$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
| $x_3'$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ |

এখন প্রতীক চিহ্নগুলি পরিবর্তন

করা যাক:

$\alpha_1 \to c_{11}$, $\alpha_2 \to c_{12}$, $\alpha_3 \to c_{13}$, $\beta_1 \to c_{21}$, ইত্যাদি তা হলে

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}59)$$

এই সমীকরণগুলিকে সংক্ষেপে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায়:

$$x_i' = c_{ik} x_k \qquad (4\text{-}59')$$

এখানে আইনষ্টাইনের রীতি (পৃষ্ঠা ১৯৩) অনুযায়ী কোন অন্তাক্ষর দুবার থাকলে তার সকল মানের জন্য সমষ্টি নেওয়া হয়েছে অর্থাৎ $k$ র 1, 2, 3 মানের জন্য সমষ্টি নেওয়া হয়েছে। আমরা জানি যে, ত্রিকোণমিতি থেকে।

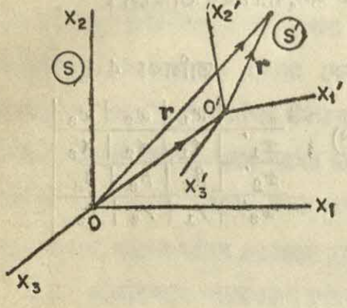
$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$, ইত্যাদি।

তাছাড়া $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0$ ইত্যাদি। আমাদের নূতন প্রতীক অনুযায়ী লেখা যায়।

$$\left.\begin{aligned} c_{ik}\, c_{il} &= \delta_{kl} \\ c_{ki}\, c_{li} &= \delta_{kl} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}60)$$

উপরের সমীকরণে $i$ এর 1, 2 ও 3 মানের জন্য সমষ্টি নেওয়া হয়েছে। ডানদিকের $\delta_{kl}$ কে ক্রনেকার (Kronecker) ডেল্টা (delta) বলা হয়। অন্ত্যাক্ষর দুটির মান অভিন্ন হলে এর মান 1 হয় নতুবা শূন্য হয়. অর্থাৎ

$\delta_{kl}=1$, যখন $k=l$, $\delta_{kl}=0$ যখন $k\neq l$




চিত্র 4-17

যেহেতু উপরোক্ত রূপান্তরে কার্টিজীয় কাঠামোর অক্ষগুলির অন্তর্গত কোণ সমকোণ। সেইজন্য এই রূপান্তরকে সমকোণীয় রূপান্তর বলা হয়।

উপরের রূপান্তরে শুধু অক্ষের আবর্তন নেওয়া হয়েছে কিন্তু মূল বিন্দুকে স্থির ধরা হয়েছে। মূল বিন্দুর স্থানান্তরণ হলে ( চিত্র 4-17 ) S′ কাঠামোর P বিন্দুর 'অবস্থান' ভেক্টর $\overline{O'P}=\mathbf{r}'$ হবে এখন

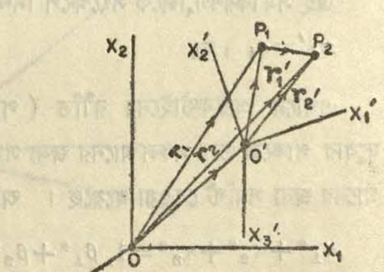
$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\overline{OO'},$$

যেখানে $\overline{OO'}$ O′ বিন্দুর S কাঠামোর অবস্থান ভেক্টর। এর উপাংশগুলিকে যদি $\overset{\circ}{x}_i{}'$ বলা হয় তা হলে ( 3-59′ ) এর পরিবর্তে পাওয়া যাবে।

$$x'_i=c_{ik}x_k+\overset{\circ}{x}_i{}' \quad (4\text{-}61)$$

এখন স্থানাঙ্কের অন্তরের রূপান্তর হবে

$$\Delta x_i{}'=c_{ik}\,\Delta x \quad (4\text{-}62)$$




চিত্র 4-18

ত্রিমাত্রিক ভেক্টর তিনটি রাশির ( অর্থাৎ ভেক্টরের তিনটি উপাংশ ) সমন্বয় যারা কাঠামো পরিবর্তনের সময় স্থানাঙ্কের অন্তরের মত রূপান্তরিত হয়। প্রকৃত পক্ষে স্থানাঙ্কের অন্তরগুলিও দুটি বিন্দু $P_1$ ও $P_2$র মধ্যস্থিত ভেক্টর $\overline{P_1P_2}$ ( চিত্র 4-18 ) এবং

$$\overline{P_1P_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2{}'-\mathbf{r}_1{}' \quad (4\text{-}63)$$

অতএব অন্য ভেক্টরের উপাংশগুলিও স্থানাঙ্কের রূপান্তরের মত রূপান্তরিত হবে। কাজেই একটি ভেক্টর A র উপাংশগুলি নিম্নলিখিতরূপে রূপান্তরিত হবে।

$$A'_i = c_{ik} A_k \tag{4—64}$$

দ্বিতীয় শ্রেণীর টেন্সর $T_{ik}$ $(3)^2=9$টি রাশির সমন্বয় যাদের রূপান্তর নিম্নলিখিতরূপে হবে

$$T_{ik}' = c_{im}\, c_{kn}\, T_{mn} \tag{4—65}$$

এক্ষেত্রে $\Delta x_i'\ \Delta x_i' = \Delta x_k\ \Delta x_k$ কাঠামো নিরপেক্ষ এবং এটি $\overline{P_1P_2}$ ভেক্টরের মানের বর্গ। অনুরূপে

$$A_i'\ A_i' = A_k\ A_k \tag{4—66}$$

কে বলা হয় $A_i$ ভেক্টরের মানের বর্গ এবং অপর একটি স্কেলার রাশি। তা ছাড়া দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল নেওয়া যায় :

$$A_i'B_i' = A_kB_k \tag{4—67}$$

মিনকভ্স্কির চতুর্মাত্রিক জগতে $\Delta x_\alpha$ কে একটি জাগতিক ভেক্টর বা চার-ভেক্টর বলা হয় যার উপাংশগুলি চারটি বাস্তব রাশি :

$$\Delta x_1 = \Delta x, \quad \Delta x_2 = \Delta y, \quad \Delta x_3 = \Delta z \quad \Delta x_4 = c\Delta t.$$

কিন্তু ইউক্লিডীয় জ্যামিতির মত এক্ষেত্রে $\Delta x_i^2\ \Delta x_i$ স্কেলার বা কাঠামো নিরপেক্ষ নয়। এক্ষেত্রে স্কেলার হবে নিম্নলিখিত রাশি ( পৃষ্ঠা ১৪৫ )

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta x_4^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

ভেক্টরের ক্ষেত্রে তার মানের বর্গ নিম্নলিখিত রূপে লেখা হয় এবং এটিও একটি স্কেলার :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_4^2 \tag{4—68}$$

অনুরূপে দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের মান হবে

$$A.B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 - A_4B_4 \tag{4—69}$$

যেহেতু স্থানাঙ্কের অন্তরগুলির রূপান্তর লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর অতএব ভেক্টরের উপাংশগুলিও লোরেণ্ট্স্ সমীকরণ অনুযায়ী রূপান্তরিত হবে, এক্ষেত্রে রূপান্তরের সহগগুলির সংখ্যা হবে 9 এর পরিবর্তে 16 এবং তাদের $c_{\alpha\beta}$ দ্বারা সূচিত করা হবে :

$$A_\alpha' = c_{\alpha\beta}\ A_\beta \tag{4—70}$$

এখানে $\beta$ র 1, 2, 3, 4 মানের জন্য সমষ্টি নেওয়া হয়েছে। বিশেষ লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তর নেওয়া হলে

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1' &= \gamma(\Delta x_1 - \beta\Delta x_4)\\ \Delta x_2' &= \Delta x_2,\ \Delta x_3' = \Delta x_3\\ \Delta x_4' &= \gamma(\Delta x_4 - \beta\Delta x_1)\end{aligned}\right\} \qquad (4-71)$$

এখানে

$$c_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \qquad (4-72)$$

উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে, মিনকভ্‌স্কির জাগতিক ভেক্টরের গুণাগুণ কার্টিজীয় ভেক্টরের মত নয় (তু. সমীকরণ 4-68)। আমরা 4-1 বিভাগে দেখেছি যে চতুর্থ স্থানাঙ্ককে কাল্পনিক ধরলে ভেক্টরগুলির গুণ বাহ্যতঃ কার্টিজীয় ভেক্টরের মত হয়।

সেক্ষেত্রে

$$x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z,\ x_4 \equiv ict$$

এবং রূপান্তরের সহগগুলি হবে [ সমীকরণ (4-7) থেকে ( 4—10 )]

$$c_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \qquad (4-73)$$

এক্ষেত্রে কালাঙ্কের মত ভেক্টরের চতুর্থ উপাংশও কল্পিত সংখ্যা হবে।

সমীকরণ (4-60) এর মত এক্ষেত্রেও

$$\left.\begin{aligned} c_{\alpha\beta}\ c_{\alpha\gamma} &= \delta_{\beta\gamma} \\ c_{\beta\alpha}\ c_{\gamma\alpha} &= \delta_{\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (4-74)$$

একটি চার-টেন্সর ( দ্বিতীয় শ্রেণীর ) একটি 16 উপাংশ যুক্ত রাশি যার রূপান্তর সূত্র হবে ( তু. সমীকরণ 4-65 ) :

$$T_{\alpha\beta} = c_{\alpha\mu}\ c_{\beta\nu}\ T_{\mu\nu} \qquad (4-75)$$

টেন্সরের দু'টি অন্তাক্ষরকে বিপরীত ক্রমে লিখলে যদি তার মান অপরিবর্তিত থাকে তা হলে তাকে প্রতিসম টেন্সর বলা হয়। এক্ষেত্রে

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$$

যদি বিপরীত ক্রমে লিখলে মান ঋণাত্মক হয় তা হলে তাকে অপ্রতিসম টেন্সর বলা হয়, সে ক্ষেত্রে

$$T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$$

লক্ষণীয় যে, অপ্রতিসম টেন্সরের কর্ণস্থ উপাংশগুলি শূন্য হবে। কাজেই অপ্রতিসম টেন্সরের অনধীন উপাংশের সংখ্যা 6টি। প্রতিসম টেন্সরের ক্ষেত্রে অনধীন উপাংশের সংখ্যা 10 টি (পৃষ্ঠা ১৯৫)।

ভেক্টরের রূপান্তর হবে

$$A_\alpha' = c_{\alpha\beta} A_\beta \tag{4—76}$$

অর্থাৎ
$$\left.\begin{aligned} A_1' &= \gamma(A_1 + i\beta A_4) \\ A_2' &= A_2 \\ A_3' &= A_3 \\ A_4' &= \gamma(-i\beta A_1 + A_4) \end{aligned}\right\} \tag{4—76a}$$

এখন আমরা কার্টিজীয় ভেক্টরের মতই ভেক্টবের মানের বর্গ হিসাবে লিখতে পারি

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 \tag{4—77}$$

তা ছাড়া দুই ভেক্টরের স্কেলার গুণফল হবে

$$A.\,B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 \tag{4—78}$$

চতুর্থ উপাংশকে বাস্তব সংখ্যা নিলে সমীকরণগুলি (4—68) ও (4—69) এর রূপ নেবে। আমরা 4-2 বিভাগে আলোচনা করেছি যে, মিনকভ্‌স্কির বাস্তব জগতে অইউক্লিডীয় জ্যামিতি ব্যবহার করতে হয়। কিন্তু পোয়াঁকারের মত: কল্পিত স্থানাঙ্ক ব্যবহার করলে আমরা ইউক্লিডীয় জ্যামিতির নিয়ম অনুযায়ী গণনা করতে পারি।

ইউক্লিডীয় জ্যামিতির মতই A ও B ভেক্টরকে সমকোণীয় বলা হবে যখন

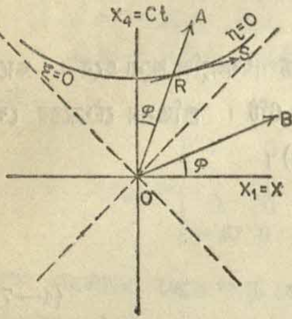
$$A.\,B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 = 0 \tag{4—79}$$

পূর্বের মত দ্বিতীয় ও তৃতীয় উপাংশ বাদ দিলে সমকোণীয় ভেক্টরের ক্ষেত্রে পাব

$$A_1B_1 + A_4B_4 = 0 \tag{4—79a}$$

ভেক্টরের বর্গ ( সমীকরণ 4—77 ) ঋণাত্মক হলে তাকে কালতুল্য ভেক্টর

বলা হয়, ধনাত্মক হলে দেশতুল্য ভেক্টর এবং শূন্য হলে শূন্য ভেক্টর বলা হয়। দ্বিতীয় ও তৃতীয় উপাংশ বাদ দিলে




চিত্র 4—19

$$A_1^2+A_4^2=0$$

অর্থাৎ $A_1=\pm iA_4$ (4—80)

উপরের সংজ্ঞা অনুযায়ী শূন্য ভেক্টর নিজের সঙ্গেই সমকোণীয়। চিত্র 4—19 এ OC এবং OC' শূন্য ভেক্টর এবং তারা যথাক্রমে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি মানে

$$\eta=x-ct=0$$

এবং $\xi=x+ct=0$

অতএব $C_1=x,\ C_4=ict=+ix$

$$C_1'=x,\ C_4'=ict=-ix$$

অতএব $C_1^2+C_4^2=C_1'^2+C_4'^2=0$

কাজেই OC এবং OC' নিজের সঙ্গে সমকোণীয়। কিন্তু তাদের স্কেলার গুণফল হবে

$$C_1C_1'+C_4C_4'=x^2+x^2=2x^2.$$

অতএব C ও C' সমকোণীয় ভেক্টর নয় কিন্তু মিনকভ্স্কি চিত্রে এদের অন্তর্গত কোণ সমকোণ। তার কারণ এই যে, আমাদের চিত্র ইউক্লিডীয় এবং ইউক্লিডীয় ও মিনকভ্স্কি জ্যামিতিতে সমকোণীয় ভেক্টরের শর্ত এক নয়। অনুরূপে আমরা দেখেছি যে, মিনকভ্স্কি জ্যামিতি অনুযায়ী $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ ভেক্টর সমকোণীয় কিন্তু আমাদের ইউক্লিডীয় চিত্রে তাদের মধ্যে কোণ সূক্ষ্মকোণ।

আমরা দেখেছি যে একটি কালতুল্য এবং একটি দেশতুল্য ভেক্টর সমকোণীয় হতে পারে (চিত্র 4—19)। কিন্তু দুটি কালতুল্য ভেক্টর সমকোণীয় হতে পারে না। মনে করা যাক যে, A এবং A' দুটি কালতুল্য ভেক্টর। তা হলে এমন কাঠামো নেওয়া যায় যেখানে A কালাক্ষের সমান্তরাল তা হলে সেই কাঠামোয়

$A_1 = 0$, $A_4 \neq 0$ কিন্তু $A_1' \neq 0$, $A_4' \neq 0$ যদি ভেক্টরগুলি সমান্তরাল না হয়। অতএব

$$AA' = A_1A_1' + A_4A_4' = A_4A_4' \neq 0$$

কিন্তু দুটি দেশতুল্য ভেক্টর সমকোণীয় হতে পারে। এটি দেখতে হলে দেশের অন্ততঃ দুটি মাত্রা নিতে হবে। যদি দুটি দেশতুল্য ভেক্টর **B** ও **B'** নেওয়া হয় তা হলে আমরা এমন কাঠামো নিতে পারি যেখানে $x_1$ অক্ষ B ভেক্টরের সমান্তরাল তা হলে

$$B_4 = 0, \quad B_2 = B_3 = 0, \quad B_1 \neq 0, B_4' = 0$$

অতএব $\mathbf{BB'} = B_4B_4' + B_iB_i' = B_1B_1'$

এখানে $i$ এর মান 1-3. কাজেই **B** ও $B'$ সমকোণীয় হবে যদি $B_1 = 0$ হয় অর্থাৎ $B'$ $x_2x_3$ তলে অবস্থিত হয় এবং $x_1$ অক্ষের সঙ্গে লম্ব হয়।

চিত্র 4—19 থেকে স্পষ্ট যে, **A** ও **B** ভেক্টরের লব্ধি একটি শূন্য ভেক্টর। দুটি দেশতুল্য সমকোণীয় ভেক্টর **B** ও **B'** এর লব্ধি অন্য একটি দেশতুল্য ভেক্টর।

চিত্র 4—19 এ R OA ভেক্টরের সঙ্গে একক পরাবৃত্তের ছেদ বিন্দু। এখন RS R বিন্দুতে একক পরাবৃত্তের স্পর্শক। R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x', y', z', ct'$ হলে RS এর সমীকরণ হবে

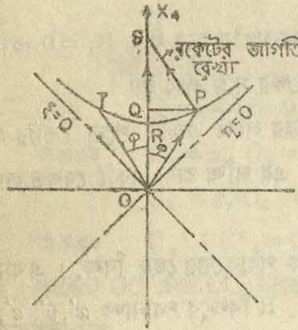
$$xx' + yy' + zz' - c^2tt' = 0$$

অতএব OR এবং RS ভেক্টর দুটি সমকোণীয় এবং চিত্র 4—19 এ RS OB র সমান্তরাল।

* 4-6. **ঘড়ি সম্বন্ধীয় আত্মবিরোধী সত্য :** আমরা ইতিপূর্বেই এই আত্মবিরোধী সত্য সম্বন্ধে আলোচনা করেছি (পৃষ্ঠা ১৪৮ ও পরে)। তবে মিনকভস্কির জ্যামিতিক প্রতিরূপ ব্যবহার করলে কতকগুলি বিষয় আরও সহজ বলে মনে হয়, সেজন্য এই প্রসঙ্গের পুনরাবৃত্তি করছি।

মনে করা যাক যে, চিত্র 4-20 এ $Ox_4$ এবং $Ox_1$ এই দুটি সমকোণীয় সরলরেখা পৃথিবীর উপর স্থির কাঠামো সূচিত করে। পৃথিবী থেকে বাহিরে যাবার সময় রকেট A অবিচল $v$ বেগে যায় কাজেই তার জাগতিক রেখা OP $x_4$ অক্ষের সঙ্গে $\phi = \tan^{-1}\frac{v}{c}$ কোণ উৎপন্ন করে। জাগতিক বিন্দু P-এ রকেট

O ঘড়ির সঙ্গে সমস্থানিক হয়। ঘড়ি B পৃথিবীর উপর স্থির ছিল, কাজেই তার জাগতিক রেখা $x_4$ অক্ষের সমান্তরাল হবে এবং এক্ষেত্রে তার সঙ্গে সমাপতিত হবে। P বিন্দুতে রকেট দিক পরিবর্তন করে এবং S কাঠামোর P বিন্দুর সঙ্গে সমকালীন জাগতিক বিন্দু নির্ণয় করতে হলে $x_1$ অক্ষের সমান্তরাল PQ রেখা টানতে হবে। P এবং Q সমকালীন ঘটনা এবং পরীক্ষাগারের কাঠামোর Q এর কালাংক $\frac{t_1}{2}$ যেখানে $t_1$ মোট যাত্রার সময়। QP দূরত্বের মান $\frac{vt_1}{2}$ এবং এটি দিক পরিবর্তনের সময় পৃথিবী থেকে রকেটের দূরত্ব সূচিত করে। P বিন্দুর মধ্য দিয়ে একক পরাবৃত্তের সমান্তরাল একটি পরাবৃত্ত আঁকা হয়েছে। S' কাঠামো অর্থাৎ রকেটের বাহিরে যাবার সময়ের যথার্থ কাঠামোয় সময়ের একক OP র দৈর্ঘ্যের সঙ্গে অনুপাতী কিন্তু পৃথিবীর যথার্থ কাঠামোয় ঐ এককের মান OR এর দৈর্ঘ্যের সঙ্গে অনুপাতী। যদি OP-র

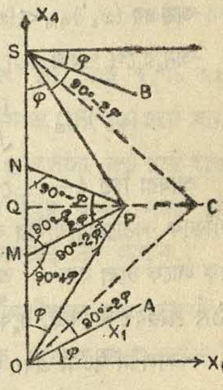



চিত্র 4-20

দৈর্ঘ্য রকেটের যথার্থ কাঠামোয় $k$ এককের সমান হয় তা হলে পৃথিবীর যথার্থ কাঠামোয় OR-এর দৈর্ঘ্য $k$ এককের সমান হবে। যেহেতু $OQ > OR$, কাজেই S' কাঠামোয় রকেটের ঘড়ি অনুযায়ী OP যে সময় সূচিত করে, পৃথিবীর S কাঠামোর ঘড়িতে OQ তার চেয়ে বেশী সময় সূচিত করে। কাজেই C ঘড়িতে রকেটের ঘড়ির চেয়ে বেশী সময় নির্দেশ করবে। আমরা পূর্বের মত মনে করব যে, রকেটের দিক পরিবর্তন করতে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সময় লাগে। রকেটটি এবার পৃথিবীতে ফিরে আসতে থাকে $v$ বেগে, কাজেই এখন রকেটটি $x$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকে যাবে। পৃথিবীতে ফেরার সময়ও রকেটের বেগ $v$ কাজেই তার জাগতিক রেখা OT-র সমান্তরাল হবে, যেখানে OT $x_4$ অক্ষের সঙ্গে বাঁ দিকে অর্থাৎ $x$ অক্ষের, ঋণাত্মক দিকে $\phi = \tan^{-1}\frac{v}{c}$ কোণ উৎপন্ন করে। রকেটের ফেরার সময়

জাগতিক রেখা হবে PS ∥ OT. পরীক্ষাগারের কাঠামোয় সময়ের একক এখনও OR এর সঙ্গে অনুপাতী, এবং রকেটের ফেরার সময় তার S″ কাঠামোর সময়ের একক OTর সঙ্গে অনুপাতী, অর্থাৎ PS-এর সঙ্গে অনুপাতী, যেহেতু PS = OT. যেহেতু SQ = OQ > OR, কাজেই ফেরার সময় রকেটের ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময় পরীক্ষাগারের ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময়ের চেয়ে কম হবে। কাজেই রকেটে স্থির ঘড়ি OP দ্বারা সূচিত সময় নির্দেশ করবে ( S′ কাঠামোর ) এবং তার পর PS দ্বারা সূচিত সময় নির্দেশ করবে ( S″ কাঠামোর )। অতএব মোট সময় S কাঠামোর ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময় OS এর চেয়ে কম হবে।

এখন প্রশ্ন হচ্ছে যে, S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে S কাঠামোর ঘড়ি মন্থর হারে চলছে বলে মনে হবে, আবার S″ কাঠামোর কাছেও S কাঠামোর ঘড়ি মন্থর হারে চলছে বলে মনে হবে। এখন রকেটটি প্রথমে S′ কাঠামোয় এবং পরে S″ কাঠামোয় স্থির থাকে এবং এই কাঠামো পরিবর্তনের সময় ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র কিন্তু তা সত্ত্বেও রকেটের ঘড়িদ্বারা নিদিষ্ট মোট সময় কেন S কাঠামোর ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময়ের চেয়ে কম হয়? এই প্রশ্নের উত্তর পেতে হলে আমাদের চিত্র ৪-21 দেখতে হবে।



চিত্র 4-21

চিত্রে $OX_1$ এবং $OX_4$ S কাঠামোর অক্ষরেখা। মনে করা যাক যে, OC এবং CS আলোর জাগতিক রেখা। OA এবং OP যথাক্রমে S′ কাঠামোর $x_1$ এবং $x_4$ অক্ষ অনুরূপে SB এবং SP যথাক্রমে S″ কাঠামোর $x_1$ ও $x_4$ অক্ষের সমান্তরাল। PM ∥ OA এবং PN ∥ SB। অতএব S′ কাঠামোয় P ও M সমকালীন। আমরা পূর্বের মত ( পৃষ্ঠা ৮৩ ) প্রমাণ করতে পারি যে, S′ কাঠামোর ঘড়িদ্বারা নির্দিষ্ট সময় OM এর চেয়ে কম কারণ S′ কাঠামোয় S কাঠামোর ঘড়ি মন্থর হারে চলছে বলে মনে হবে।

ত্রিভুজ OPM-এ

$$\frac{OP}{OM}=\frac{\sin(90°+\phi)}{\sin(90°-2\phi)}=\frac{\cos\phi}{\cos 2\phi} \qquad (4-80)$$

O থেকে P পর্যন্ত যেতে S′ কাঠামোর ঘড়ি অনুযায়ী সময় হবে

$$(x_4')_{OP}=\frac{OP}{g'},\ (x_4)_{OM}=OM \qquad (4-81)$$

সমীকরণ (4—80) ও (4—81) থেকে পাওয়া যায়

$$(x_4')_{OP}=\frac{(x_4)_{OM}}{g'}\frac{\cos\phi}{\cos 2\phi}=(x_4)_{OM}\frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} \qquad (4-82)$$

সমীকরণ (4—51) থেকে পাই

$$(x_4')_{OP}=\frac{(x_4)_{OM}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (4-83)$$

অতএব $(x_4')_{OM}<(x_4')_{OP}$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

$$(x_4')_{PS}=\frac{(x_4)_{NS}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (4-84)$$

আমরা চিত্র 4—21 থেকে দেখতে পাই যে, P বিন্দুতে রকেট S′ থেকে S″ জাড্যিক কাঠামোয় যাবার কালাংকের সঙ্গে সমকালীন বিন্দু M থেকে N-এ যেন এক লাফে চলে যায়। আসলে অবশ্য S কাঠামোর নিরীক্ষক সময়ের এরকম হঠাৎ পরিবর্তন কিছু বুঝতে পারবে না। S কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে P ও Q সমকালীন ঘটনা এবং এ ধরণের সমকালীন বিন্দুর অসন্তিত থাকে না। NS এবং OM অংশ যথাক্রমে PS এবং OP-র চেয়ে কম সময় সূচিত করে। এখন MN এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যাক।

△OMP-এ

$$\frac{PM}{OM}=\frac{\sin\phi}{\sin(90^\circ-2\phi)}=\frac{\sin\phi}{\cos 2\phi} \qquad (4-85)$$

△ PMN-এ

$$\frac{NM}{PM}=\frac{\sin 2\phi}{\sin(90^\circ-\phi)}=\frac{\sin 2\phi}{\cos\phi} \qquad (4-86)$$

সমীকরণ (4—85) ও (4—86) থেকে পাই

$$(x_4)_{NM}=NM=PM=\frac{\sin 2\phi}{\cos\phi}=OM\tan\phi\ \tan 2\phi=(x_4)_{OM}\frac{2\beta^2}{1-\beta^2} \qquad (4-87)$$

অতএব সমীকরণ (4–83), (4–84) ও (4–87) থেকে পাই

$$(xy)_{OS}=(x_4)_{OM}+(x_4)_{NS}+(x_4)_{NM}$$

$$=(x_4')_{OP}\sqrt{1-\beta^2}+(x_4')_{PS}\sqrt{1-\beta^2}+(x_4')_{OP}\frac{2\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

যেহেতু $(x'_4)_{OP}=(x_4')_{PS}$

$$\therefore\ (x_4)_{OS}=(x_4')_{OPS}\left[\sqrt{1-\beta^2}+\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]=\frac{(x_4')_{OPS}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(4–88)

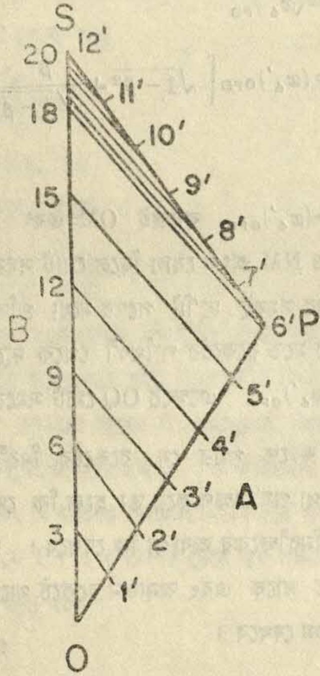
কাজেই $(x_4)_{OS}>(x_4')_{OPS}$. কাজেই OM এবং NS এই দু'টি অংশ স্বতন্ত্রভাবে ছোট হলেও NM অংশ যোগ দিলে মোট সময় OS বড় হয়ে যায়। কাজেই দিক পরিবর্তনের সময়ই দু'টি পথের মধ্যে প্রতিসাম্য নষ্ট হয়ে যায়। S কাঠামোর নিরীক্ষকের মতে রকেটের পৃথিবী থেকে দূরে যাবার সময় হবে OQ এবং $(x_4)_{OQ}>(x_4')_{OP}$. এক্ষেত্রে OQ মোট সময়ের ঠিক অর্ধেক।

এখন আমরা প্রশ্ন করতে পারি যে, রকেটের নিরীক্ষক যদি দূরবীনের সাহায্যে পৃথিবীর অবস্থা পর্যবেক্ষণ করে তা হলে কি দেখবে অথবা পৃথিবীর নিরীক্ষকই বা রকেটের নিরীক্ষকের অবস্থা কি দেখবে। দু'জন যমজের মধ্যে একজন যদি পৃথিবীতে থাকে এবং অন্যজন রকেটে থাকে তা হলে দু'জনের বয়সের পরিবর্তন কি রকম দেখবে।

এখন আমরা আলোচনার সুবিধার জন্য কয়েকটি সংখ্যা ধরে নেব। মনে করা যাক যে S ও S' এবং S ও S" কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ 0·8c, তা হলে $\gamma=\frac{5}{3}$.। এখন যদি ধরা হয় যে, $(x_4)_{OS}=20$ বছর তা হলে $(x_4')_{OPS}=$ 12 বছর। কাজেই রকেটের যমজের বয়স যখন 12 বছর বাড়বে, পৃথিবীর যমজের বয়স তখন 20 বছর বাড়বে। এখন $(x_4)_{OM}=6\times\frac{3}{5}=3\frac{3}{5}$ বছর, $(x_4)_{NS}=3\frac{3}{5}$ বছর, $(x_4)_{MN}=12\frac{4}{5}$ বছর

মনে করা যাক যে, A তার প্রতি জন্মদিনে একটি করে আলোক সংকেত

B-এর কাছে পাঠায়। কিন্তু যেহেতু B, A-র কাছ থেকে দূরে সরে যাচ্ছে, অতএব ডপলার অপসরণের ফলে এই সংকেতগুলির কম্পাঙ্ক হবে $\sqrt{\frac{1-0.8}{1+0.8}} = \frac{1}{3}$। কাজেই B 3 বছর অন্তর সংকেত পাবে (চিত্র 4—22)। যতক্ষণ A পৃথিবী থেকে বাহিরের দিকে যাবে ততক্ষণ এইভাবে চলবে। কিন্তু দিক

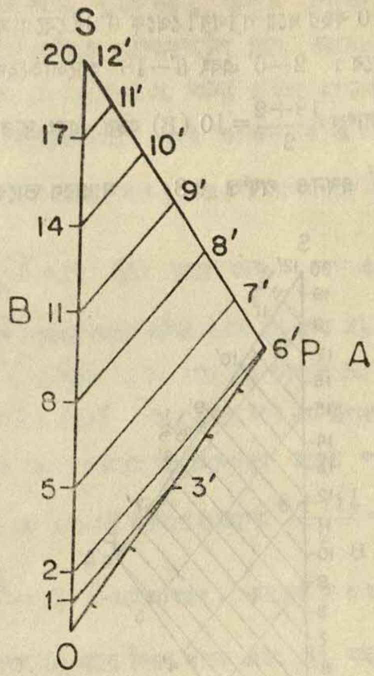



চিত্র 4-22

পরিবর্তনের পর কম্পাঙ্ক 3 হয়ে যাবে, অর্থাৎ বছরে 3টি করে সংকেত পাবে। প্রথম 18 বছর ধরে B, A-র ছয় বছর বয়সের সংকেত পাবে এবং শেষ দু'বছরে বাকী ছয় বছরের সংকেত পাবে।

এবার দেখা যাক B প্রতি জন্মদিনে সংকেত পাঠালে A সেগুলি কখন পাবে (চিত্র 4—23)। প্রথম দিকে যখন A দূরে সরে যাচ্ছিল তখন ডপলার প্রক্রিয়ার ফলে কম্পাঙ্ক হবে $\frac{1}{3}$। কাজেই প্রথম বছরের সংকেত তৃতীয় বছরে

এবং দ্বিতীয় বছরের সংকেত ষষ্ঠ বছরে পাবে। তার পর A B-এর দিকে

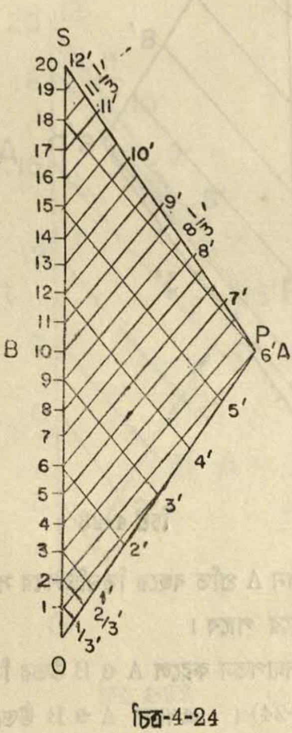



চিত্র 4-23

এগিয়ে আসে কাজেই এখন A প্রতি বছরে তিনটি করে সংকেত পাবে এবং বাকী 18 বছরের সংকেত 6 বছরে পাবে।

এবার দু'টি চিত্রের সমাপতন করলে A ও B উভয় নিরীক্ষকের মত একসঙ্গে পাওয়া যাবে (চিত্র 4—24)। এখানে A ও B উভয়েই কয়েকটি আলোক সংকেত পাঠিয়ে আবার প্রতিফলিত সংকেত গ্রহণ করছে। কাজেই উভয়েই অপর নিরীক্ষকের বেগ এবং দূরত্ব নির্ণয় করতে পারে। B একটি 1 থেকে 3′ এ পাঠিয়ে প্রতিফলিত সংকেত 3′9 পথে ফিরে পায়। B মনে করবে যে ঘটনা 3′ ঘটনা 1 ও 9 এর মাঝামাঝি অর্থাৎ 5 (B) বছরে ঘটেছে। তা ছাড়া B-র মতে 3′ ঘটনার সময় A-র দূরত্ব হবে $\frac{9-1}{2}=4$ (B) আলোবছর। দূরত্ব নির্ধারণের এই প্রক্রিয়াকে রাডার প্রক্রিয়া বলা হয়। কাজেই B-র মতে A বাহিরে

যাবার সময় 5 বছরে 4 আলোবছর দূরত্ব অতিক্রম করে কাজেই তার বেগ হবে 0.8$c$। B-র মতে A 10 বছর ধরে পৃথিবী থেকে 0.8$c$ বেগে সরে যায়, তারপর সে দিক পরিবর্তন করবে। 2—6′ এবং 6′—18 আলোকরেখা দুটি থেকে পাই যে 6′ ঘটনার কালাংক $\frac{18+2}{2}=10$ (B) বছর এবং দূরত্ব $\frac{18-2}{2}=8$ (B) বছর কাজেই বেগ এখনও পর্যন্ত 0.8$c$। সাধারণ ভাবে $t_1$ কালাংকে




চিত্র-4-24

আলোক সংকেত পাঠিয়ে $t_2$ কালাংকে প্রতিফলিত সংকেত গ্রহণ করলে প্রতিফলকের দূরত্ব হবে $\frac{t_2-t_1}{2}$ এবং প্রতিফলনের কালাংক হবে $\frac{t_1+t_2}{2}$। দিক পরিবর্তনের পর 11 – 9′ এবং 9′—19 রেখা দুটি নিলে 9′ ঘটনার কালাংক হবে $\frac{11+19}{2}=15$ (B) বছর এবং দূরত্ব $\frac{19-11}{2}=4$ (B) আলো বছর। কাজেই 10 (B) বছরে গতি পরিবর্তনের পর 5 বছরে 4 আলো বছর দূরত্ব অতিক্রম করেছে, কাজেই ফেরার বেগ ও 0.8$c$।

এবার A র মতামত নিয়ে আলোচনা করা যাক। সে দেখবে যে, B র গতির তিনটি অংশ আছে, দু'টি নয়। এখন A B নিরীক্ষকের দিকে আলোক সংকেত পাঠিয়ে প্রতিফলিত সংকেতগুলি গ্রহণ করবে। যতক্ষণ সে OP র উপর আছে ততক্ষণ সে মাত্র 0 এবং ঘটনা 2 এর মধ্যবর্তী সব ঘটনা সম্বন্ধে সংবাদ পাবে। উদাহরণস্বরূপ A র কালাঙ্ক $\frac{1}{3}'$ এ সংকেত পাঠিয়ে সে 3′ সময়ে গ্রহণ করবে। কাজেই ঘটনা 1 এর কালাঙ্ক হবে $\frac{\frac{1}{3}+3}{2}=1\frac{2}{3}$ (A) বছর এবং দূরত্ব $\frac{3-\frac{1}{3}}{2}=1\frac{1}{3}$ (A) আলোবছর। বেগ এক্ষেত্রেও হবে 0·8 c। $\frac{2}{3}'-2-6'$ থেকে পাওয়া যাবে ঘটনা 2 এর কালাঙ্ক $3\frac{1}{3}$ (A) এবং দূরত্ব $2\frac{2}{3}$ (A) আলো বছর। কাজেই A $3\frac{1}{3}$ বছর ধরে দেখবে যে, B তার কাছ থেকে 0·8 c বেগে দূরে সরে যাচ্ছে। অনুরূপে PS এর উপর থাকার সময় A B র কালাঙ্ক 18 থেকে 20 র ঘটনাগুলি বিশ্লেষণ করতে পারে। $6'-18-11\frac{1}{3}'$ থেকে পাওয়া যায় যে B র 18 ঘটনার কালাঙ্ক $\frac{6+11\frac{1}{3}}{2}=8\frac{2}{3}$ A-বছর এবং দূরত্ব $\frac{11\frac{1}{3}-6}{2}=2\frac{2}{3}$ A-আলোবছর। কাজেই A র মতে B $3\frac{1}{3}$ বছর 0·8 c বেগে দূরে সরে যায়, $5\frac{1}{3}$ বছর স্থির থাকে এবং $3\frac{1}{3}$ বছর A র দিকে 0·8 c বেগে ফিরে আসে। কিন্তু B র ঘড়িতে এই কালাঙ্কগুলি যথাক্রমে 2, 16 এবং 2 বছর। প্রথম ও শেষ অংশে B র ঘড়ি মন্থর হারে চলছে বলে মনে হবে কিন্তু মধ্যভাগে B র ঘড়ি দ্রুতহারে চলতে থাকে যদিও সে সময় B র A থেকে দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকে।

## আরও পড়ার জন্য সুপারিশ


1. W. G. V. Rosser—An Itrnoduction to the Theory of Relativity ( Butterworths 1964 )
2. R. B. Lindsay and H. Margenau—Foundations of Physics ( Dover 1957 )

3. J. Aharoni—The Special Theory of Relativity ( Oxford Clarendon Press 1965 )

4. J. G. Taylor—Special Relativity (Oxford University Press 1975 )

5. H. Arzelies—Relativistic Kinematics ( Pergamon 1966 )

6. E. F. Taylor and J. A. Wheeler—Spacetime Physics ( Freeman 1966 )

7. C. Kacser—Introduction to the Special Theory of Relativity ( Prentice—Hall 1967 )

---

# পঞ্চম পরিচ্ছেদ

# আপেক্ষিকতা-তাত্ত্বিক বলবিদ্যা

"স্থূল বস্তু এবং আলো, এরা কি একটি থেকে অন্যটিতে রূপান্তরিত হয় না, এবং বস্তুগুলি কি তাদের সক্রিয়তার অনেকখানি স্বীয় উপাদান আলোক কণিকা থেকে পেতে পারে না ?"

—নিউটন

5-1. **নিউটনীয় বলবিদ্যার ত্রুটি :** আপেক্ষিকতা তত্ত্বের প্রথম স্বীকার্য (পৃষ্ঠা ৮৫) অনুযায়ী নিউটনের গতিসূত্রগুলি সকল জাড্যিক (বা গালিলীয়) কাঠামোয় অভিন্ন হবে। নিউটনীয় বলবিদ্যা অনুযায়ী দু'টি জাড্যিক কাঠামোর দেশ কালাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক গালিলীয় রূপান্তর সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়। কিন্তু আমরা দেখেছি যে, আপেক্ষিকতা তত্ত্বে গালিলীয় রূপান্তর সমীকরণের স্থানে লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ ব্যবহার করতে হবে। নিউটনীয় বলবিদ্যার সূত্রগুলি গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় ছিল কিন্তু এখন সেগুলিকে লোরেণ্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় হতে হবে। আইনষ্টাইন লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ আবিষ্কার করার পর পরীক্ষা করে দেখলেন পদার্থবিদ্যার সূত্রগুলি সকল জাড্যিক কাঠামোয় অভিন্ন কি না। আমরা প্রথমে বলবিদ্যা এবং পরে তড়িৎ গতিবিদ্যার সূত্রগুলি নিয়ে আলোচনা করব।

নিউটনের প্রথম গতিসূত্র নেওয়া যাক। এই সূত্র অনুযায়ী একটি জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে কোন বস্তুকণা যদি সমবেগে সরলরেখায় চলে তা হলে সকল জাড্যিক কাঠামোয় সে সমবেগে সরলরেখায় চলবে। আমরা তৃতীয় পরিচ্ছেদের প্রথমে লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর নির্ণয় করবার সময় নিউটনের প্রথম গতিসূত্রকে শর্ত হিসাবে ধরে নিয়েছিলাম। কাজেই এই সূত্রটি লোরেণ্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়। লোরেণ্ট্স্ রূপান্তরের রৈখিক প্রকৃতি থেকে এটা সহজেই প্রমাণ করা যায়। ব্যবকলন দ্বারা রৈখিক রূপান্তর সমীকরণ থেকে পাই

$$\left.\begin{aligned} dx' &= a_{11}dx + a_{12}dy + a_{13}dz + a_{14}dt \\ dt' &= a_{41}dx + a_{42}dy + a_{43}dz + a_{44}dt \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{—}1)$$

এবং $dy'$ ও $dz'$ সম্পর্কিত অন্য দুটি সমীকরণ। এখানে $a_{11}$, $a_{12}$ ইত্যাদি সহগগুলি ধ্রুবক। উপরের সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$u_x'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{a_{11}dx+a_{12}dy+a_{13}dz+a_{14}dt}{a_{41}dx+a_{42}dy+a_{43}dz+a_{44}dt}$$

$$=\frac{a_{11}u_x+a_{12}u_y+a_{13}u_z+a_{14}}{a_{41}u_x+a_{42}u_y+a_{43}u_z+a_{44}} \qquad (5-2)$$

বেগের অন্য দুটি উপাংশ $u_y'$ এবং $u_z'$ এর জন্যও অনুরূপ সমীকরণ পাওয়া যাবে। সমীকরণ (5—2) থেকে স্পষ্ট যে, $u_x$, $u_y$, $u_z$ ধ্রুবক হলে $u_x'$ ধ্রুবক এবং অন্য দুটি সমীকরণ থেকে দেখা যাবে যে $u_y'$ এবং $u_z'$ ও ধ্রুবক। অতএব নিউটনের প্রথম গতিসূত্র লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়।

এবার নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র নেওয়া যাক। আমরা প্রথম পরিচ্ছেদে (পৃষ্ঠা ৩-৪) দেখেছি যে, দ্বিতীয় গতিসূত্র গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়। নিউটনের দ্বিতীয় ও তৃতীয় গতিসূত্র থেকে আমরা ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র প্রমাণ করতে পারি। দুটি বস্তুর ক্ষেত্রে আমরা পরিশিষ্টে (পৃ-2) প্রমাণ করেছি যে, ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র গালিলীয় রূপান্তর সূত্রের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়। এখন দেখা যাক, এটি লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় কিনা।

যদি S কাঠামোয় ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র সত্য হয়, তা হলে

$$\Sigma mu_x=c_1,\quad \Sigma mu_y=c_2,\quad \Sigma mu_z=c_3 \qquad (5-3)$$

এখানে $\Sigma$ সকল বস্তুকণার সমষ্টি সূচিত করে এবং $c_1$, $c_2$ ও $c_3$ ধ্রুবক। যদি প্রত্যেকটি বস্তুকণার ক্ষেত্রে ভরকে অপরিবর্তনীয় মনে করা হয় তা হলে S′ কাঠামোয় মোট ভরবেগের উপাংশগুলি হবে

$\Sigma m\,(u_x'+v)$, $\Sigma m\, u_y'$, এবং $\Sigma mu_z'$

গালিলীয় রূপান্তর সমীকরণ (সমীকরণ 1-2) অনুযায়ী (5-3) থেকে পাই

$\Sigma m\;(u_x'+v)=c_1$ অর্থাৎ $\Sigma mu_x'=c_1-\Sigma mv=$ ধ্রুবক যেহেতু $v$ এবং $m$ ধ্রুবক।

$\Sigma mu_y'=c_2,\quad \Sigma mu_z'=c_3$

কাজেই ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়।

এখন লোরেন্ট্‌স্‌ রূপান্তর সূত্র (3-60) এবং (5-3) এর প্রথম সমীকরণ থেকে পাই

$$\Sigma m u_x = \Sigma m \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} = c_1 \tag{5-4}$$

উপরের সমীকরণ থেকে প্রমাণ করা যায় না যে $\Sigma m u_x'$ ধ্রুবক কারণ হরের মান সাধারণতঃ ধ্রুবক নয়। আমরা এবার প্রমাণ করব যে, $m$ কে ধ্রুব সংখ্যা ধরলে দুটি কাঠামোতে ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র কখনও সত্য হবে না এবং এই সংরক্ষণ সূত্রকে যদি সব জাড্যিক কাঠামোয় বলবৎ রাখতে হয় তা হলে ধরে নেওয়া দরকার যে ভরের মান কাঠামো নিরপেক্ষ নয়।

**5-2. গতিশীল বস্তুকণার ভর ঃ** আমরা স্বীকার্য হিসাবে ধরে নেব যে, আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক বলবিদ্যার রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বলবৎ থাকে। এখানে আমরা ধরে নেব যে, বস্তুর বিলয় বা ক্ষয় হয় না তা হলে মোট ভর সংরক্ষিত হবে। লুইস্‌ (Lewis) ও টলম্যান (Tolman) দুটি স্থিতিস্থাপক বলের কাল্পনিক সংঘর্ষ দুটি কাঠামো থেকে বিশ্লেষণ করে ভর ও বেগের সম্পর্ক নির্ণয় করেন। এখানে আমরা এই স্বীকার্য থেকে কিন্তু একটু অন্য পদ্ধতিতে ভর ও বেগের সম্পর্ক নির্ণয় করব।

মনে করা যাক যে, S কাঠামোয় $n$ সংখ্যক বস্তুকণা আছে। আমরা যদি $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ এবং $x_4 \equiv t$ লিখি তা' হলে

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_{i\alpha}}{dt} = \text{ধ্রুবক} \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4 \tag{5-5}$$

$\alpha = 1, 2, 3$ হলে যে তিনটি সমীকরণ পাই তা ভরবেগের সংরক্ষণ সূচিত করে কিন্তু $\alpha = 4$ হলে সমীকরণটি মোট ভরের সংরক্ষণ সূচিত করে।

সমীকরণ (5-5) থেকে লেখা যায়

$$\sum_i m_i \frac{dx_{i\alpha}}{d\tau} \sqrt{1 - u_i^2/c^2} = \text{ধ্রুবক}$$ যেখানে $\tau$ যথার্থকাল এবং

$$u_i^2 = \left(\frac{dx_{i1}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_{i2}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_{i3}}{dt}\right)^2$$

অর্থাৎ S' কাঠামোয়

$$\sum_{i,\beta} m_i\, c'_{\alpha\beta}\, \frac{dx'_{i\beta}}{d\tau} \sqrt{1-u_i^2/c^2} = \text{ধ্রুবক } \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$$

এখানে $c'_{\alpha\beta}$ S থেকে S' কাঠামোর রূপান্তরের সহগ।

অথবা $$\sum_\beta c'_{\alpha\beta} \sum_i m_i \frac{dx'_{i\beta}}{d\tau} \sqrt{1-u_i^2/c^2} = \text{ধ্রুবক}$$

যেহেতু $c'_{\alpha\beta}$ ছক $\neq 0$, অতএব

$$\sum_i m_i \frac{dx'_{i\beta}}{d\tau} \sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}} = \text{ধ্রুবক} \qquad (5—7)$$

S' কাঠামোতেও যদি ভরবেগ সংরক্ষিত হয় তা হলে

$$\sum_i m_i' \frac{dx'_{i\beta}}{d\tau} \sqrt{1-\frac{u_i'^2}{c^2}} = \text{ধ্রুবক} \qquad (5—8)$$

এখানে আমরা ধরে নিয়েছি যে ভর বেগের উপর নির্ভর করে, অতএব সাধারণ ভাবে $m_i \neq m_i'$। সমীকরণ (5-7) ও (5-8) এর ডানদিকের ধ্রুবসংখ্যা-গুলিকে অভিন্ন করার জন্য মনে করা যাক যে (5·8) কে $\lambda$ দ্বারা গুণ করতে হয়, তা হলে :

$$\sum_i \left\{ m_i \sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}} - \lambda m_i' \sqrt{1-\frac{u_i'^2}{c^2}} \right\} \frac{dx'_{i\beta}}{d\tau} = 0 \qquad (5—9)$$

যেহেতু এই সমীকরণটি $\frac{dx'_{i\beta}}{d\tau}$ এর যে কোন মানের জন্য সত্য, অতএব

$$m_i \sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}} = \lambda m_i' \sqrt{1-\frac{u_i'^2}{c^2}} = m_{0i} \text{ (ধরা যাক)}$$

অতএব $i$ তম বস্তুকণার স্থিতিশীল অবস্থার ভর S কাঠামোয় হবে $m_{0i}$ এবং S' কাঠামোয় $\frac{m_{0i}}{\lambda}$। দুটি কাঠামোয় ভরের একক সমান হলে $\lambda = 1$ হবে।

অতএব S এবং S' দুই কাঠামোতেই গতিশীল বস্তুকণার ভরবেগ সংরক্ষিত হয় যদি গতিশীল বস্তুকণার ভর হয়

$$m = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (5—10)$$

যেখানে $u$ পরিমাপ কাঠামোর সাপেক্ষে বস্তুকণার বেগ এবং $m_0$ তার স্থিতি-ভর অথবা যথার্থ ভর। $m$ কে আপেক্ষিক ভর বলা হয়। এখানে উল্লেখ-যোগ্য যে, আইনস্টাইনের পূর্বেই লোরেন্টস্ তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রে আহিত বস্তুকণার গতি পর্যালোচনা করে বিভিন্ন কাঠামোয় ভরের বেগের উপর নির্ভরশীলতা নির্ণয় করেছিলেন।

5-3. **বস্তুকণার জাগতিক রেখা ঃ** প্রাচীন বলবিদ্যায় বস্তুকণার গতি প্রকাশ করার জন্য তিনটি দেশাঙ্ককে সময়ের অপেক্ষক হিসাবে লেখা হয় ঃ

$$x_i = f_i\ (t) \qquad (5\text{—}11)$$

কিন্তু আমরা জানি যে, আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী $t$ কাঠামো নিরপেক্ষ নয় এবং দেশাঙ্কগুলির মতই কাঠামোর উপর নির্ভর করে। কাজেই দেশ ও কালাঙ্ক পৃথক করে কালাঙ্ককে স্থিতিমাপ হিসাবে ব্যবহার করার কোন সঙ্গত কারণ নেই। অপরিবর্তনীয় কোন রাশিকে স্থিতিমাপ হিসাবে ব্যবহার করাই সুবিধা। মিনকভ্স্কির চতুর্মাত্রিক জগতে যথার্থ কাল এইরকম একটি রাশি (পৃষ্ঠা ১৪৫)।

ত্রিমাত্রিক জগতে বস্তুকণার পথের দৈর্ঘ্যকে অনেক সময় স্থিতিমাপ হিসাবে ব্যবহার করা হয় এবং এটি নিম্নলিখিত সমাকলন হিসাবে প্রকাশ করা যায় :

$$l = \int_{p1}^{p_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

মিনকভ্স্কি জগতে জাগতিক রেখার দৈর্ঘ্য $ds$ সমীকরণ (4-3) থেকে পাওয়া যায়। আমরা $ds$ কে স্থিতিমাপ হিসাবে ব্যবহার না করে তার সঙ্গে অনুপাতী যথার্থ কালের অন্তর $d\tau$ কে স্থিতিমাপ হিসাবে ব্যবহার করব। এক্ষেত্রে

$$\int d\tau = \int \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}\ (dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \int \frac{ds}{ic} \qquad (5\text{—}12)$$

এখন আমরা বস্তুকণার 4টি দেশ-কালাঙ্ককে যথার্থ কাল $\tau$ এর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করতে পারি

$$x_\mu = F_\mu\ (\tau) \qquad (5\text{—}13)$$

এক্ষেত্রে কোন জাগতিক বিন্দুর অবস্থানকে একটি চতুর্মাত্রিক ভেক্টর দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায় যার উপাংশগুলি $x_\mu$ ঃ

$$x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z,\ x_4 \equiv ict$$

এক্ষেত্রে চতুর্মাত্রিক জগতে কোন বস্তুকণার জাগতিক রেখার স্পর্শক চার ভেক্টরকে বেগ ভেক্টর হিসাবেব্যবহার করা যায়। যখনএকটি বস্তুকণা স্থির থাকে তখন তার জাগতিক রেখা $x_4$ অক্ষের সমান্তরাল হয় অর্থাৎ শূন্য কোণ উৎপন্ন করে। অন্য ক্ষেত্রে জাগতিক রেখা $x_4$ অক্ষের সঙ্গে একটি কোণ উৎপন্ন করে। এই স্পর্শক চার-ভেক্টরটিকে আমরা নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করতে পারি

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \tag{5—14}$$

এখানে $d\tau$ একটি স্কেলার এবং $dx_\mu$ একটি চার-ভেক্টর কাজেই ভাগফলও একটি চার-ভেক্টর।

$$\left.\begin{aligned} \text{এখানে}\quad U_i &= \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (5\text{—}14a) \\ U_4 &= \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{icdt}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (5\text{—}14b) \end{aligned}\right\}$$

এখানে $i$ এর মান 1, 2, 3 এবং $u_i$ ত্রিমাত্রিক বেগ ভেক্টর

আমরা এখানে কালাঙ্ককে কল্পিত সংখ্যা ধরেছি কাজেই সব ভেক্টরের চতুর্থ উপাংশ কল্পিত সংখ্যা। আমরা অবশ্য মিনকভ্স্কির নিয়মানুযায়ী সব ক'টি স্থানাঙ্ককে বাস্তব সংখ্যা ধরেও সব সিদ্ধান্তই প্রমাণ করতে পারি কিন্তু সে ক্ষেত্রে জটিল রীমাণীয় জ্যামিতির প্রয়োজন। কিন্তু কল্পিত চতুর্থ উপাংশ নিলে ইউক্লিডীয় জ্যামিতির নিয়মগুলি ব্যবহার করা যায়। অনুসন্ধিৎসু পাঠক বাস্তব ভেক্টরের ব্যবহারের জন্য নিম্নলিখিত বই পড়তে পারেন: P. G. Bergmann—Introduction to the Theory of Relativity (Asia Publishing House 1962)।

কোন বস্তুকণার যখন ত্বরণ থাকে না তখন মিনকভ্স্কি জগতে তার জাগতিক রেখা সরলরেখা। জাগতিক রেখায় বক্রতা থাকার অর্থ হচ্ছে যে তার ত্বরণ আছে। কাজেই চতুর্মাত্রিক জগতে জাড্যিক সূত্রের (নিউটনের প্রথম গতিসূত্র) গাণিতিক প্রতিরূপ অত্যন্ত সহজ

$$U_\mu = \text{ধ্রুবক} \tag{5—15}$$

সমীকরণ (4-76$a$) থেকে আমরা চার-ভেক্টরের S থেকে S′ কাঠামোয় রূপান্তর পাই। S′ কাঠামোয় চার-বেগের উপাংশগুলি হবে

$$U'_i = \frac{u_i'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\ , \qquad U_4' = \frac{ic}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \qquad (5—16)$$

কাজেই S′ কাঠামোয় চার-বেগের উপাংশগুলি পেলে ত্রিমাত্রিক বেগের S′ কাঠামোর উপাংশগুলি পাওয়া যায়। আমরা ইতিপূর্বেই ত্রিমাত্রিক বেগের রূপান্তর সমীকরণ নির্ণয় করেছি (3-57)। দেখা যাক, আমরা সেই সমীকরণই ফিরে পাই কি না।

সমীকরণ (4-76*a*) থেকে

$$U'_4 = \gamma\left[U_4 - i\frac{v}{c}U_1\right] = \gamma\left[\frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - i\frac{v}{c}\frac{u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right]$$

সমীকরণ (5-31) থেকে পাই

$$U'_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$$

অতএব

$$\frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{1-\frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}} \qquad (5—17)$$

এটি সমীকরণ (3-58) থেকে সহজে প্রমাণ করা যায়।

এবার **U** এর প্রথম উপাংশের রূপান্তর লিখব :

$$U_1' = \gamma\left[U_1 + i\frac{v}{c}U_4\right] = \gamma\left[\frac{u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + i\frac{v}{c}\frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right]$$

$$= \frac{\gamma(u_x - v)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

সমীকরণ (5-16) থেকে পাই

$$U_1' = \frac{u_x'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$$

অতএব সমীকরণ (5-17) ব্যবহার করলে পাই

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}$$

এটি সমীকরণ (3·57$a$) থেকে অভিন্ন। অনুরূপে আমরা দেখাতে পারি যে, অন্য দু'টি উপাংশের রূপান্তর থেকে সমীকরণ (3-57$b$, $c$) পাওয়া যায়।

আমরা বলেছি যে, চার-ভেক্টরের মানের বর্গ $U^2$ কাঠামো নিরপেক্ষ :

$$U_\mu \; U_\mu = U_1{}^2 + U_2{}^2 + U_3{}^2 + U_4{}^2$$

$$= \frac{u^2}{1-u^2/c^2} - \frac{c^2}{1-u^2/c^2} = \frac{-c^2(1-u^2/c^2)}{1-u^2/c^2} = -c^2 \qquad (5\text{—}18)$$

যেহেতু মানের বর্গ ঋণাত্মক, অতএব চার-ভেক্টরটি কালতুল্য। তা ছাড়া $c$ কাঠামো নিরপেক্ষ- এটি আপেক্ষিকতা তত্ত্বের দ্বিতীয় স্বীকার্য।

5-4. **নিউটনের গতিসূত্রের সমপরিবর্তনশীল রূপ :** পদার্থশাস্ত্রের সূত্রগুলি সাধারণতঃ গাণিতিক সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আপেক্ষিকতা তত্ত্বের প্রথম স্বীকার্য অনুযায়ী সকল জাড্যিক কাঠামোয় ভৌত সূত্রগুলি অভিন্ন হবে। কাজেই সমীকরণগুলি এমনভাবে লিখতে হবে যে সেটির রূপ সব কাঠামোতে এক রকম হবে। A = B যদি একটি কাঠামোর সমীকরণ হয়, তা হলে মনে করা যাক যে, অন্য একটি কাঠামোয় A র মান 2A, সে ক্ষেত্রে ঐ নূতন কাঠামোতে সমীকরণটিকে সত্য হতে হলে Bকেও নূতন কাঠামোয় 2B হতে হবে। অতএব আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী এইরূপ সমীকরণের দু'দিকের রাশিগুলির এক কাঠামো থেকে অন্য কাঠামোয় রূপান্তর একই নিয়ম মেনে চলবে। এইরূপ সমীকরণকে সমপরিবর্তনশীল বলা হয়। আমরা 4-5 বিভাগে দু'টি জ্যামিতিক রাশি : ভেক্টর ও টেন্সর সম্বন্ধে আলোচনা করেছি, যার রূপান্তর সূত্র জানা আছে। কাজেই প্রাচীন বলবিদ্যার সমীকরণগুলিকে ভেক্টর ও টেন্সরদ্বারা প্রকাশ করা হয়, যার ফলে কোন বিশেষ কাঠামো বেছে না নিয়ে সূত্রগুলিকে কাঠামো নিরপেক্ষভাবে প্রকাশ করা যায়। আপেক্ষিকতা তত্ত্বে এক কাঠামো থেকে অন্যটিতে যাবার রূপান্তর সূত্র গালিলীয় সমীকরণ নয়, লোরেন্ট্স্ সমীকরণ। কাজেই এখন সূত্রগুলিকে চতুর্মাত্রিক ভেক্টর ও টেন্সর-দ্বারা প্রকাশ করা উচিত। সমীকরণের দু'দিক একই ধরণের ভেক্টর বা টেন্সর হবে এবং এই ধরণের সমীকরণকে সমপরিবর্তনশীল সমীকরণ বলা হয়। বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বে আমরা একটি জাড্যিক কাঠামো থেকে অন্য জাড্যিক কাঠামোয় রূপান্তর নিয়ে আলোচনা করি, কিন্তু সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বে অজাড্যিক কাঠামোও নেওয়া হয় এবং সাধারণ রূপান্তর নিয়ে আলোচনা করা

হয়। এই নীতিকে সমপরিবর্তনশীলতার নীতি বলা হয়। আইনষ্টাইন লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ আবিষ্কার করার পর পরীক্ষা করে দেখেন, পদার্থ-বিদ্যার দু'টি গুরুত্বপূর্ণ সূত্র নিউটন এবং ম্যাক্সওয়েলের সূত্রকে সমপরিবর্তন-শীল রূপ দেওয়া যায় কিনা। এই দুই সূত্রের উপর ভিত্তি করে যথাক্রমে বলবিদ্যা এবং তড়িৎ গতিবিদ্যা গড়ে উঠেছে। কাজেই এই দুই সূত্রকে সমপরিবর্তনশীল রূপ দিলে সমগ্র বলবিদ্যা এবং তড়িৎ গতিবিদ্যার আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সামান্যীকরণ করা হবে। এইরূপ সমপরিবর্তনশীল রূপ দিতে গিয়ে আইনষ্টাইন দেখলেন যে, নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রকে কিছুটা পরিবর্তন করতে হয় কিন্তু ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ পরিবর্তন করতে হয় না। অর্থাৎ নিউটনের গতিসূত্র আপেক্ষিকতা তত্ত্বের নির্ণায়ক (সমপরিবর্তনশীলতার নীতি) মানে না, কিন্তু ম্যাক্সওয়েলের সূত্র মানে। এটা সহজেই বোঝা যায় কারণ আইনষ্টাইন এবং লোরেণ্ট্স্ দুজনেই ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ থেকে রূপান্তর সূত্র আবিষ্কার করেন, তাঁরা এমন রূপান্তর সমীকরণ নির্ণয় করেছিলেন যাতে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলির বাহ্য রূপ সকল কাঠামোয় সমান থাকে।

আমরা চার-বেগ ভেক্টরের সংজ্ঞা দিয়েছি। এখন চার-ভরবেগ ভেক্টর নির্ণয় করতে হলে চার-বেগ ভেক্টরকে বস্তুকণার স্থিতিভর দিয়ে গুণ করব ঃ

$$p_\rho = m_o U_\rho = m_o \frac{dx_\rho}{d\tau} \qquad (5\text{—}19)$$

এখন ভরবেগ চার-ভেক্টরের দৈশিক উপাংশগুলি হবে (সমীকরণ 5-29$(a)$)

$$p_i = m_o U_i = \frac{m_o u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (5\text{—}19a)$$

কালিক উপাংশ হবে

$$p_4 = m_o U_4 = \frac{m_o ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (5\text{—}19b)$$

আমরা প্রাচীন বলবিদ্যায় রৈখিক ভরবেগের সংজ্ঞা দিই ঃ—ভর × রৈখিক বেগ

অর্থাৎ $p_i = mu_i$ (5—19$c$)

এই সংজ্ঞা এখনও বজায় রাখতে হলে পাই

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, ভরের বেগের সঙ্গে উপরোক্ত সম্পর্ক ধরে নিলে সহজে ভরবেগ চার-ভেক্টরের সংজ্ঞা দেওয়া যায় এবং তার দৈশিক উপাংশগুলি ত্রিমাত্রিক ভরবেগ ভেক্টর দেয়।

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী

$$F=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\,(m\boldsymbol{u}) \tag{5—20}$$

এখানে F ও $\boldsymbol{p}$ ত্রিমাত্রিক ভেক্টর। আমাদের এই সমীকরণের এমন চতুর্মাত্রিক প্রতিরূপ নির্ণয় করতে হবে, যে যখন $u \ll c$ তখন সমীকরণটি (5·20) এ পরিণত হবে। মিনকভ্স্কি জগতে আমরা $t$ এর স্থানে $\tau$ কে স্থিতিমাপ হিসাবে ব্যবহার করি। যেহেতু সমীকরণ (3-168) অনুযায়ী

$$\frac{d\tau}{dt}=\sqrt{1-u^2/c^2}$$

অতএব $u \ll c$ হলে $d\tau \to dt$. কাজেই আমরা যদি $t$ কে $\tau$ দ্বারা এবং ত্রিমাত্রিক ভরবেগ ভেক্টর $\boldsymbol{p}$ কে চার-ভরবেগ ভেক্টর $p_\rho$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করি তা হলে মিনকভ্স্কি চার-বল ভেক্টর $f_\rho$ পাই:

$$f_\rho=\frac{dp_\rho}{d\tau}=m_0\frac{dU_\rho}{d\tau} \tag{5—21}$$

এই সমীকরণকে নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রের সমপরিবর্তনশীল রূপ বলা হয়। এই সমীকরণের দৈশিক উপাংশগুলি হবে

$$f_i=\frac{dp_i}{d\tau}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,\mathring{x}_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,\mathring{x}_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

যেখানে $\mathring{x}_i\,\mathring{x}_i=u^2$ (5—22)

যেহেতু প্রাচীন বলবিদ্যার ত্রিমাত্রিক বল ভরবেগের পরিবর্তনের হারের উপর নির্ভর করে, অতএব ত্রিমাত্রিক বল ভেক্টর $F_i$ এর সঙ্গে মিনকভ্স্কি বলের দৈশিক উপাংশের সঙ্গে সম্পর্ক হবে

$$F_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,\mathring{x}_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \tag{5—23}$$

$$\text{এবং } f_i = \frac{F_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{5—24}$$

সমীকরণ (5-38) এর ডানদিকের ব্যবকলন করলে পাই

$$F_i = (1-u^2/c^2)^{-\frac{3}{2}} m_0 \left[\delta_{ik}(1-u^2/c^2) + \frac{\dot{x}_i \dot{x}_k}{c^2}\right] \ddot{x}_i \tag{5—25}$$

উপরের সমীকরণ থেকে স্পষ্ট যে, বল $F_i$ সব সময় ত্বরণের সমান্তরাল নয়, অর্থাৎ নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র সত্য নয়। শুধু দুটি ক্ষেত্রে তারা সমান্তরাল, যখন ত্বরণ বেগের সমান্তরাল অথবা অভিলম্ব দিকে।

যখন বেগ ও ত্বরণ সমান্তরাল তখন $\ddot{x}_k = a\dot{x}_k$, যখন $a$ একটি ধ্রুবসংখ্যা।

অতএব $\dot{x}_i \dot{x}_k \ddot{x}_k = a \dot{x}_i \dot{x}_k \dot{x}_k = \ddot{x}_i u^2$

$$\text{অতএব } F_i = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} m_0 \ddot{x}_i \tag{5—26}$$

যখন ত্বরণ বেগের সঙ্গে লম্ব, তখন $\dot{x}_k \ddot{x}_k = 0$

$$\text{অতএব } F_i = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} m_0 \ddot{x}_i \tag{5—27}$$

বলের কাজ করার হার হবে

$$\mathbf{F.u} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right).\mathbf{u} = \frac{m_0 \mathbf{u.\dot{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{m_0 u^3 \dot{u}/c^2}{(1-u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

এখন $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2$

$$\text{অতএব } u_x \frac{du_x}{dt} + u_y \frac{du_y}{dt} + u_z \frac{du_z}{dt} = u \frac{du}{dt}$$

$$\text{অর্থাৎ } \mathbf{u}. \frac{d\mathbf{u}}{dt} = u \frac{du}{dt}$$

অতএব

$$\mathbf{F.u} = \frac{m_0 u \dot{u}}{(1-u^2/c^2)}\left\{1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2}\right\} = \frac{m_0 u \dot{u}}{(1-u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \tag{5—28}$$

সংরক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে কাজ করার হার গতীয় শক্তির বৃদ্ধির হার।

অতএব

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \qquad (5-29)$$

সমাকলনের ফলে পাই

$$T=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}+A \qquad (5-30)$$

যেখানে A সমাকলনের ধ্রুবক। গতীয় শক্তির সংজ্ঞা অনুসারে যখন $u=0$, $T=0$, অতএব $A=-m_0 c^2$, অতএব

$$T=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-m_0 c^2$$

$$=(m-m_0) c^2 \qquad (5-31)$$

অতএব গতীয় শক্তি গতিজনিত ভরের বৃদ্ধি গুণিত $c^2$, কাজেই ভরের বৃদ্ধিকে শক্তির উৎস বলে মনে করা যায়। এখন বস্তুকণার বেগ শূন্য হলেও বস্তুর উপাদান অণু ও পরমাণুগুলির গতি আছে কাজেই স্থির বস্তুরও আভ্যন্তরীণ শক্তি আছে। এই আভ্যন্তরীণ শক্তির পরিমাণ $m_0 c^2$ বলে মনে করা যায়। কাজেই বস্তুকণার মোট শক্তির পরিমাণ হবে

$$E=T+m_0 c^2=mc^2 \qquad (5-32)$$

আইনষ্টাইন এর পর আরও সিদ্ধান্ত করেন যে, যেহেতু ভরকে শক্তির উৎস বলে মনে করা যায়, অতএব ভরকে শক্তিতে এবং শক্তিকে ভরে রূপান্তরিত করা যায়। সে যুগে এটি ছিল একটি অত্যন্ত সাহসী পদক্ষেপ। এখন নিউক্লীয় পদার্থবিদ্যায় এই ভরও শক্তির তুল্যতার প্রচুর উদাহরণ পাওয়া যায়। অনেকের মতে এই ভর-শক্তি তুল্যতার সমীকরণ আইনষ্টাইনের সর্বশ্রেষ্ঠ আবিষ্কার। এই সমীকরণ আবিষ্কৃত না হলে আধুনিক পদার্থ বিজ্ঞানের অগ্রগতি রুদ্ধ হয়ে যেত।

সমীকরণ (5-32) থেকে এটা স্পষ্ট যে দুটি $m_1$ এবং $m_2$ ভরযুক্ত বস্তুকণার যদি সংঘর্ষ হয় এবং সংঘর্ষের পর তাদের ভর হয়ে যায় $m_3$ এবং $m_4$ তা হলে ভরও শক্তি সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী

$$(m_1+m_2)c^2=(m_3+m_4)c^2$$

$$\text{অর্থাৎ } m_1+m_2=m_3+m_4$$

এখানে আমরা ধরে নিয়েছি যে সংঘর্ষের ফলে বস্তু কণাগুলির বিলয় বা ক্ষয় হয় না। অতএব ভর সংরক্ষণ সূত্র সত্য।

সমীকরণ (5-48) কে দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে সম্প্রসারণ করলে পাওয়া যায়

$$T = m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} \right\} - m_0 c^2$$

$$= \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^4} + \ldots\ldots$$

যদি $u \ll c$ হয় তা হলে

$$T \simeq \tfrac{1}{2} m_0 u^2$$

এটি নিউটনীয় বলবিদ্যার গতীয় শক্তির মান। সমীকরণ (5-31) থেকে দেখা যায় যে, যখন $u$ $c$ এর দিকে অগ্রসর হয় তখন গতীয় শক্তি T অসীমের দিকে অগ্রসর হয়। অতএব সমীকরণ (5-31) অনুযায়ী একটি বস্তুকণাকে ত্বরান্বিত ক'রে আলোর বেগে নিয়ে যেতে হলে অসীম পরিমাণ কাজ করতে হয়। সেইজন্যই বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বে আলোর শূন্য স্থানের বেগ সর্বোচ্চ বেগের ভূমিকায় আসে। এখানে বলা দরকার যে, বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব একথা বলে না যে, কোন বস্তুর বেগ শূন্যে আলোর বেগের বেশী হবে না, শুধু বলে যে, শক্তি ও ভরবেগের পক্ষে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে আলোর শূন্যের বেগের চেয়ে বেশী বেগে যাওয়া সম্ভব নয়। আমরা পৃষ্ঠা ১০২-৩ এ দেখেছি যে, কোন কোন ক্ষেত্রে $c$ এর বেশী বেগ থাকা সম্ভব কিন্তু সেই বেগ সংবাদ বা সঙ্কেত প্রেরণের জন্য কাজে লাগান সম্ভব নয়। যে সমস্ত মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক $n > 1$, সেখানে আলোর বেগ $\frac{c}{n} < c$, এই ধরণের মাধ্যমে বস্তুকণিকার বেগ ঐ মাধ্যমে আলোর বেগের চেয়ে বেশী হওয়া সম্ভব এবং পরীক্ষা দ্বারা এ ধরণের ঘটনা দেখাও গেছে। শূন্যস্থানে আলোর বেগই ভরবেগ ও শক্তি প্রেরণের সর্বোচ্চ বেগ।

এখন আমরা ভরবেগ চার-ভেক্টরকে শক্তি-ভরবেগ ভেক্টর বলতে পারি কারণ তার তিনটি দৈশিক উপাংশ ভরবেগের সমান এবং চতুর্থ উপাংশ (সমীকরণ (5-19$b$) এবং (5-32)

$$p_4 = \frac{iE}{c} \qquad (5\text{—}19d)$$

শক্তির সঙ্গে অনুপাতী।

অনুরূপে বল চার-ভেক্টরের চতুর্থ উপাংশ

$$f_4 = \frac{dp_4}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0\, ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{i}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)$$

(সমীকরণ 5-28 থেকে) $= \frac{i}{c} \frac{\mathbf{F.u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{i}{c} f_k\, u_k = \frac{i}{c}\, \mathbf{f.u}$ (5—24a)

অর্থাৎ বল চার-ভেক্টরের চতুর্থ উপাংশ ক্ষমতার সঙ্গে অনুপাতী।

সমীকরণ (5-32) এর বর্গ নিলে পাই

$$E^2 = m^2c^4 = \frac{m_0{}^2c^4}{1-u^2/c^2}$$

অতএব $E^2 - E^2 \frac{u^2}{c^2} = m_0{}^2c^4$

অর্থাৎ $E^2 = E^2 \frac{u^2}{c^2} + m_0{}^2c^4 = m^2u^2c^2 + m_0{}^2c^4$ (5—33)

সমীকরণ (5—19c) থেকে পাই

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m_0\, \mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

অতএব সমীকরণ (5-33) থেকে পাওয়া যায়

$$E^2 = p^2c^2 + m_0{}^2c^4 \quad (p^2 = p_i p_i) \qquad (5—34)$$

অর্থাৎ $E = c\sqrt{p^2 + mo^2c^2}$ (5—34a)

শক্তি-ভরবেগ ভেক্টরের মানের বর্গ হবে (সমীকরণ 5-19a, b ও d)

$$p_m\, p_m = p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2 + p_4{}^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0{}^2c^2 \quad (5—35)$$

$m_0{}^2$ ধনাত্মক হলে শক্তি-ভরবেগ ভেক্টর কালতুল্য হবে, $m_0{}^2$ শূন্য হলে ভেক্টরটি আলোকতুল্য হবে এবং $m_0{}^2$ ঋণাত্মক হলে এটি দেশতুল্য হবে : প্রথম শ্রেণীতে পড়ে অধিকাংশ বস্তুকণা (অর্থাৎ ব্র্যাডিয়ন), দ্বিতীয় শ্রেণীতে পড়ে নিউট্রিনো এবং ফোটন (অর্থাৎ লাক্সন) এবং তৃতীয় শ্রেণীতে পড়ে ট্যাকিয়ন যার কথা আমরা ইতিপূর্বেই আলোচনা করেছি (পৃষ্ঠা ১-৯ ও ২০৬)

শক্তি-ভরবেগ ভেক্টরের উপাংশগুলির রূপান্তর সমীকরণ (4-76) এর মত।

অতএব

$$p_1' = \gamma(p_1 + i\beta p_4) = \gamma\left(p_1 - \frac{vE}{c^2}\right) \qquad (5-36)$$

$$p_2' = p_2,\ p_3' = p_3,\ \frac{iE'}{c} = \gamma\left\{i\frac{E}{c} - i\beta p_1\right\}$$

অর্থাৎ $E' = \gamma(E - vp_1)$

আমরা দেখেছি যে, গতীয়শক্তির সঙ্গে ভরের সম্পর্ক আছে। এখন আমরা দেখাব যে, অন্য যে কোন ধরণের শক্তির ক্ষেত্রেও একটি সমতুল্য ভর আছে। এ থেকে সিদ্ধান্ত করা যায় যে, কোন বস্তুকে গরম করলেও তার ভর বৃদ্ধি পায়। যদি একটি বস্তু থেকে বিকিরণ নিক্ষিপ্ত হয়ে অন্য একটি বস্তু দ্বারা শোষিত হয় তা হলেও আমরা বলতে পারি যে, তাদের মধ্যে ভরের আদানপ্রদান হবে।

শেষোক্ত ক্ষেত্রে মনে করা যাক যে একটি বস্তু S' কাঠামোয় স্থির এবং সে $E_r'$ পরিমাণ শক্তি এমনভাবে নিক্ষেপ করে যাতে তার ভরবেগের পরিবর্তন হয় না, অর্থাৎ স্থির থাকে। ধরা যাক, এবার S' কাঠামোর সাপেক্ষে S কাঠামোর বেগ $-\mathbf{v}$। তা হলে এই S কাঠামোর সাপেক্ষে ভরবেগ হবে (সমীকরণ 5—36)

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{E_r'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad E_r = \frac{E_r'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (5-37)$$

$$\text{অতএব}\quad \mathbf{p} = \frac{E_r\mathbf{v}}{c^2} \qquad (5-37a)$$

যেহেতু বস্তুটির বেগ $\mathbf{v}$ অপরিবর্তনীয় থাকে অতএব এটা সম্ভব যদি তার স্থিতিভর $m_0$ নিম্নলিখিত পরিমাণ হ্রাস পায়ঃ

$$\Delta m_0 = \frac{E'_r}{c^2} \qquad (5-38)$$

লোরেন্ট্স্ একটি আরও সাধারণ ক্ষেত্র আলোচনা করেছিলেন। যে কোন একটি যৌগিক বস্তু নেওয়া যাক যা অনেকগুলি ভর, প্রসারিত স্প্রিং, আলোক রশ্মি ইত্যাদি নিয়ে গঠিত। ধরা যাক যে, এই যৌগিক বস্তু $S_0$ কাঠামোয় স্থির অর্থাৎ তার ভরবেগ শূন্য। তা হলে অন্য একটি কাঠামো S এর সাপেক্ষে তার বেগ হবে $\mathbf{u}$ ($S_0$ ও S কাঠামোর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ)। এখন ধরা যাক যে, ঐ যৌগিক বস্তুর ভরবেগ একটি বস্তুকণার মতই S কাঠামোর সাপেক্ষে

$$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{u} = \frac{m_0}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}\,\mathbf{u} \qquad (5-39)$$

তা হলে রূপান্তর সমীকরণ অনুযায়ী S′ কাঠামোয়

$$p_1{}'_x = \frac{p_{1x} - mv}{\surd(1 - v^2/c^2)}, \; p'_{1y} = p_{1y} \;\; p'_{1z} = p_{1z} \qquad (5\text{—}40)$$

এবার ধরা যাক যে যৌগিক বস্তু 1 এর সঙ্গে যৌগিক বস্তু 2 এর মিথষ্ক্রিয়া ঘটে যার মধ্যে শুধুই বিকিরণ বর্তমান। মনে করা যাক যে, এই মিথষ্ক্রিয়ার ফলে $\Delta p_1$ এবং $\Delta p_2$ যথাক্রমে ঐ দুই বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তন, $\Delta E_1$, $\Delta E_2$ শক্তির পরিবর্তন। তা হলে

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = 0, \; \Delta p_1{}' + \Delta p_2{}' = 0, \; \Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$$

অতএব সমীকরণ (5-36) অনুযায়ী

$$\Delta p'_{2x} = \frac{\Delta p_{2x} - \frac{v}{c^2}\Delta E_2}{\surd(1 - v^2/c^2)} \qquad (5\text{—}41)$$

আমরা সমীকরণ (5-40) ও (5-41) থেকে পাই:

$$0 = \Delta p_1{}'_x + \Delta p_2{}'_x = \frac{(\Delta p_{1x} + \Delta p_{2x}) - v\left(\Delta mv + \frac{\Delta E_2}{c^2}\right)}{\surd(1 - v^2/c^2)}$$

যেহেতু $\Delta E_2 = -\Delta E_1$ এবং $\Delta p_{1x} + \Delta p_{2x} = 0$

আমরা পাই $\Delta m = \dfrac{\Delta E_1}{c^2}$

কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, তুল্যতা সূত্রের ব্যাপারে শক্তি কি রূপের সেটা অপ্রাসঙ্গিক।

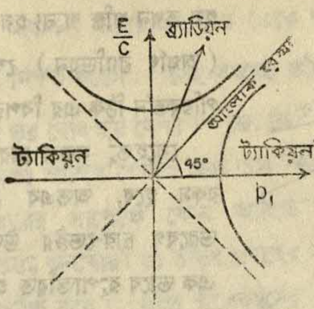
***5-5. ট্যাকিয়নের অস্তিত্ব কি পদার্থশাস্ত্রের মূল সূত্রগুলির পরিপন্থী?**

আমরা দেখেছি যে, ট্যাকিয়নের শক্তি-ভরবেগ ভেক্টর দেশতুল্য: $p_1$ এবং $E/c$ যেহেতু শক্তি-ভরবেগ ভেক্টরের $x_1$ এবং $x_4$ উপাংশ, অতএব $p_1$ এবং $\frac{E}{c}$ কে $x_1$ ও $x_4$ এর পরিবর্তে মিনকভ্স্কি চিত্রে আঁকা যায় (তু 8. চিত্র 4-8)। এখানে আমরা ধরে নেব যে, $p_2 = p_3 = 0$। চিত্র 5-2 এ আমরা

$$p_1{}^2 - \frac{E^2}{c^2} = \pm 1 \qquad (5\text{—}42)$$

এই পরাবৃত্তগুলিকে আমাদের একক পরাবৃত্ত হিসাবে নিতে পারি। এই চিত্রের পাশের দুটি শঙ্কুর মধ্যস্থ সংযুক্ত অঞ্চলের রেখাগুলি ট্যাকিয়নের জাগতিক

রেখা নির্দেশ করে। আমরা দেখেছি যে, এই দেশতুল্য অঞ্চলের বিন্দুগুলির কালিক উপাংশ কোন কোন কাঠামোয় ধনাত্মক এবং কোন কোনটিতে ঋণাত্মক।




চিত্র 5-1

কাজেই এখানে শক্তিও কোন কোন কাঠামোয় ধনাত্মক এবং কোন কোনটিতে ঋণাত্মক হবে। এক্ষেত্রে $p_2 = p_3 = 0$ কাজেই বস্তু কণিকার বেগ

$$u = \frac{c^2 p_1}{E} \tag{5—43}$$

অতএব সমীকরণ (5-36) থেকে পাই

$$p_1' = \frac{p_1\left(1-\frac{v}{u}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad E' = \frac{E\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{5—44}$$

এই সমীকরণগুলি থেকে স্পষ্ট যে, যখন $u > c$ এবং $v < c$ তখন ভরবেগ কখনও ঋণাত্মক হয় না কিন্তু যখন $v \geqslant \frac{c^2}{u}$ তখন শক্তি ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হয়ে যায়। এই ধরণের কাঠামো S'এ ত্রিমাত্রিক বেগ কিন্তু ঋণাত্মক হয়ে যায়:

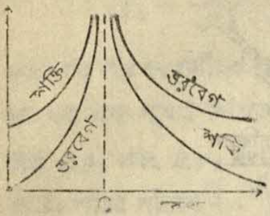
$$u' = \frac{u-v}{1-uv/c^2}$$

কাজেই ট্যাকিয়নের ক্ষেত্রে ত্রিমাত্রিক বেগ এবং ত্রিমাত্রিক ভরবেগ সব কাঠামোয় এক দিকে থাকে না।

আমরা বলেছি যে, ট্যাকিয়নের স্থিতিভর কল্পিত সংখ্যা $m_0 = i\mu_0$, যেখানে $\mu_0$ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। এখন শক্তি ও ভরবেগকে $\mu_0$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়

$$E = \mu_0 c^2 \left(\frac{u^2}{c^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{p} = \mu_0 \mathbf{u}\left(\frac{u^2}{c^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5—45}$$

কাজেই বেগ $u$ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে E এবং | p | উভয়ের মান হ্রাস পায়। দেখা যাচ্ছে যে, শক্তি যত কমে ট্যাকিয়নের বেগ তত বাড়ে, শেষে যখন বেগ অসীম হয় তখন শক্তি শূন্য হয়। সাধারণ বস্তুকণার (অর্থাৎ ব্র্যাডিয়ন) ক্ষেত্রে E এবং p এর পরিবর্তন ঠিক এর বিপরীত। (চিত্র 5-2)।




চিত্র 5-2

যেহেতু সকল চার-ভেক্টরের প্রকৃতি একরকম হবে, অতএব ভ্রংশ চার-ভেক্টর এবং ভরবেগ চার-ভেক্টর উভয়ের কালিক উপাংশ এক ভাবে রূপান্তরিত হবে। যে সব কাঠামোয় কালের মান ঋণাত্মক হয় সেখানে শক্তিও ঋণাত্মক হবে। এটা সহজেই প্রমাণ করা যায় কারণ

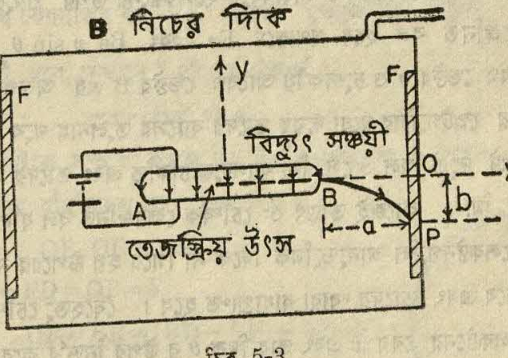
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \gamma\,\Delta t\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \qquad (5-46)$$

অতএব $\Delta t' < o$ যখন $v > \frac{c^2}{u}$

আমরা ইতিপূর্বেই বলেছি যে, পুনর্ব্যাখ্যার নীতি অবলম্বন করলে কার্যকারণ সূত্রকে আপাত দৃষ্টিতে বাঁচান যায়। কিন্তু আমরা দেখিয়েছি যে, একটু জটিল উদাহরণে কার্যকারণ সূত্র বলবৎ থাকে না।

তা সত্ত্বেও ট্যাকিয়ন আবিষ্কার করার অনেক চেষ্টা হয়েছে। আহিত ট্যাকিয়নের সবচেয়ে সহজ ভাবে সাধারণ বস্তুর সঙ্গে মিথষ্ক্রিয়া হবে। যথেষ্ট উচ্চ তীব্রতার আলোক ব্যবহার করলে বিপরীত আধানযুক্ত যুগ্ম ট্যাকিয়ন কণিকার সৃষ্টি হতে পারে। সিজিয়াম 104 এর ক্ষয়ের ফলে সৃষ্ট 700 কি. ই. ভো. শক্তি সম্পন্ন ফোটন ব্যবহার করে ট্যাকিয়ন সৃষ্টির চেষ্টা করেছিলেন প্রিন্সটন বিশ্ববিদ্যালয়ের আলভেগার (Alvager) এবং ক্রিসলার (Kriesler)। তাঁরা আশা করেছিলেন যে ক্ষীয়মান পরমাণুর চার দিকের সীসার আবরণে ট্যাকিয়নের সৃষ্টি হবে এবং শেরেনকভ (Cerenkov) বিকিরণের সৃষ্টি করবে। বস্তু-মাধ্যমের মধ্যে আলোর বেগের চেয়ে বেশী বেগে কোন বস্তুকণিকা গতিশীল হলে এই ধরণের বিকিরণ নির্গত হয় যেমন শব্দের চেয়ে দ্রুততর বিমান শব্দের অভিঘাত তরঙ্গের সৃষ্টি করে।

**5-6. বেগের উপর ইলেকট্রনের ভরের নির্ভরশীলতার পরীক্ষামূলক সত্যাখ্যান :** স্যার জে. জে. টমসন 1897 খ্রীষ্টাব্দে প্রথম ক্যাথোড রশ্মি ব্যবহার করে ইলেকট্রনের তড়িৎ আধান ও ভরের অনুপাত (একে অনেক সময় আপেক্ষিক আধানও বলা হয়) $\frac{e}{m}$ নির্ণয় করেন। সেই সময়েই তাঁর সন্দেহ হয় যে অধিক বেগ সম্পন্ন ইলেকট্রনের ভর বোধ হয় বেশী। জে. জে. টমসনের ধারণা ছিল যে, ইলেকট্রন একটি সমসত্ব আহিত গোলক এবং তার ভরের সম্পূর্ণটাই তড়িৎ শক্তিদ্বারা সৃষ্ট। ইথারের সাপেক্ষে কোন আহিত কণা গতিশীল হলে লোরেণ্ট্স্ ইলেকট্রন তত্ত্ব অনুযায়ী তা তড়িৎ প্রবাহের সৃষ্টি করে। তড়িৎ প্রবাহ চৌম্বক ক্ষেত্রের সৃষ্টি করে। ফলে ইলেকট্রনের তড়িৎ চুম্বকীয় শক্তি বৃদ্ধি পায় এবং তার ফলে ভরও বৃদ্ধি পায়। তখনকার যুগের এই ধারণা থেকে আব্রাহাম (Abraham) ইলেকট্রনের ভরের বেগের সঙ্গে পরিবর্তনের সূত্র নির্ণয় করেন। এটি একটি জটিল গাণিতিক সম্পর্ক। 1901 খ্রীষ্টাব্দে প্রথম কাউফমান (Kaufmann) টমসনের ধনাত্মক রশ্মি বিশ্লেষণের অধিবৃত্ত প্রক্রিয়া ব্যবহার করে দেখান যে, আব্রাহামের গাণিতিক সূত্র সত্য। পরে দেখা যায় যে, তিনি পরীক্ষার ভ্রমসীমা কম মনে করেছিলেন এবং প্রকৃতপক্ষে এই




চিত্র 5-3

পরীক্ষা আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সূত্র এবং আব্রাহামের সূত্রের মধ্যে কোন্‌টি সত্য, তা নিরূপণ করার পক্ষে যথেষ্ট যথার্থ নয়। 1908 খ্রীষ্টাব্দে বুখারার (Bucherer) যথার্থতর পরীক্ষার সাহায্যে প্রমাণ করেন যে, 'আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সম্পর্ক অনুযায়ী ইলেকট্রনের ভরের পরিবর্তন হয়, আব্রাহামের সূত্র অনুযায়ী নয়।

এই পরীক্ষার মূল নীতি চিত্র 5-3 এ দেখান হয়েছে। আমরা জানি যে, তেজস্ক্রিয় পদার্থ থেকে যে বিটা কণিকাগুলি নির্গত হয় তাদের সব রকমের বেগ থাকে। কাজেই প্রথমে এই কণিকাগুলিকে তাদের বেগ অনুযায়ী বাছাই করে নেওয়া হয়। বিটা রশ্মির উৎস রেডিয়াম ফ্লুয়োরাইডের একটি কণিকা একটি বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীর সমান্তরাল প্লেটের মাঝে রাখা হয়েছিল। এই প্লেট দুটির মধ্যে উচ্চ বিভববৈষম্যের সৃষ্টি করা হয়েছিল। তা ছাড়া বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীটি একটি বায়ুশূন্য প্রকোষ্ঠের মধ্যে স্থাপন করা হয়েছিল এবং এই প্রকোষ্ঠটিকে একটি শক্তিশালী তড়িৎ চুম্বকের মেরুর মধ্যস্থানে বসান হয়েছিল। ফলে বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীর প্লেটদ্বয়ের মধ্যস্থিত কণিকাগুলির উপর একসঙ্গে তড়িৎ ও চুম্বক ক্ষেত্র প্রযুক্ত হয়েছিল। চুম্বক ক্ষেত্রের বলরেখাগুলি কাগজের তলের সঙ্গে লম্বভাবে পাঠকের বিপরীত মুখে যায়। তড়িৎ ক্ষেত্রের বলরেখাগুলি চিত্র 5-3 এর $y$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকে যায়। কাজেই ঋণাত্মক আধানযুক্ত ইলেকট্রনের উপর তড়িৎক্ষেত্রজনিত বল $y$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে প্রযুক্ত হবে। অনুরূপে $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে ধাবমান ইলেকট্রনের উপর চৌম্বক ক্ষেত্রজনিত বল $y$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকে প্রযুক্ত হবে। E এবং B যথাক্রমে তড়িৎ ক্ষেত্র এবং চুম্বকীয় আবেশের তীব্রতা সূচিত করলে $e$ আধানযুক্ত ইলেকট্রনের উপর প্রযুক্ত তড়িৎ ও চুম্বকীয় ক্ষেত্রজনিত বল হবে যথাক্রমে $Ee$ এবং $Be\, v \sin\theta$ যেখানে $\theta$ ইলেকট্রনের বেগ ভেক্টর $v$ ও চুম্বকীয় আবেশ ভেক্টর B এর অন্তর্গত কোণ। বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীর প্লেটগুলির মধ্যে দূরত্ব তাদের ব্যাসের তুলনায় খুব কম নেওয়া হয়েছিল। প্লেট দুটি ছিল 8 সে. মি. ব্যাসযুক্ত চাকতি এবং তাদের মধ্যে দূরত্ব ছিল 0·25 মি. মি.। কাজেই তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্রজনিত বল যদি সমান না হয় তা হলে ইলেকট্রনগুলি আনুভূমিক দিকে না গিয়ে হয় উপরের নয় নিচের প্লেটের দিকে যাবে এবং তাদের দ্বারা বাধাপ্রাপ্ত হবে। যেহেতু চৌম্বক ক্ষেত্রজনিত বল ইলেকট্রনের বেগ $v$ এবং তার দিক $\theta$ র উপর নির্ভর করে, অতএব একটি বিশেষ দিকে শুধু সমবেগসম্পন্ন ইলেকট্রনগুলিই নির্গত হবে। কাজেই এই প্রক্রিয়া দ্বারা সমবেগসম্পন্ন ইলেকট্রনগুলিকে বেছে নেওয়া হয় যাদের জন্য

$$Ee = Bev \sin\theta \qquad (5-47)$$

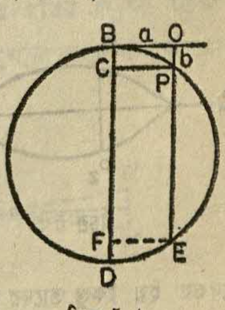
বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীর চারদিকে বায়ুশূন্য প্রকোষ্ঠের দেওয়ালে $y$ অক্ষবিশিষ্ট বেলনাকারে মোড়া ফোটোর কাগজ বসান ছিল। FF ফোটোর কাগজের উল্লম্ব

তলের উপর ছেদ। বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীর প্লেটদ্বয়ের মধ্যে তড়িৎক্ষেত্র বর্তমান কাজেই তার বাহিরে ইলেকট্রনগুলির উপর শুধু চৌম্বক ক্ষেত্রজনিত বল প্রযুক্ত হয়। ফলে এখন ইলেকট্রনগুলি সোজা পথ থেকে বেঁকে গিয়ে ফোটোর কাগজের P বিন্দুতে গিয়ে পড়ে। বিভিন্ন দিকে নির্গত বিটা কণিকা চৌম্বক ক্ষেত্রের সঙ্গে বিভিন্ন কোণ $\theta$ উৎপন্ন করে কাজেই বিভিন্ন দিকে বিভিন্ন বেগ সম্পন্ন বিটা কণিকা নির্গত হয়। তারা চৌম্বক ক্ষেত্রে বিভিন্ন দিকে বিভিন্ন পরিমাণে সরে যাবে।

পরীক্ষায় প্রথমে তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র কোনটাই প্রয়োগ করা হয় না, ফলে বিটা কণিকাগুলি সোজাপথে গিয়ে ফোটোর কাগজের উপর একটি মোটা বৃত্তাকার রেখার সৃষ্টি করে। উল্লম্ব তলের উপর এই রেখার ছেদ বিন্দু O। তারপর তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র প্রয়োগ করার পর বিটা কণিকাগুলি বিদ্যুৎ-সঞ্চয়ী থেকে বেরিয়ে বৃত্তাকার পথে বেঁকে ফোটোর কাগজের সঙ্গে P বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রথমে বিটা কণিকাগুলির বেগের $y$ অক্ষের দিকের উপাংশ শূন্য ছিল। $y$ অক্ষের সমান্তরাল চৌম্বক ক্ষেত্রজনিত বল $Bev\sin\theta$। ইলেকট্রন একটি বৃত্তাকার পথে চলবে যার BO একটি স্পর্শক (চিত্র 5-4)। এই বৃত্তকার পথে কেন্দ্রাতিগ বল $\frac{mv^2}{\rho}$ চৌম্বক ক্ষেত্রজনিত বলের সমান এবং বিপরীতমুখী হবে, যেখানে $\rho$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$$\therefore \quad mv = Be\rho\sin\theta \qquad (5\text{—}48)$$

BP বৃত্তটিকে সম্পূর্ণ করলে চিত্র 5-4 থেকে দেখা (যেহেতু BO স্পর্শক এবং PE জ্যার বর্ধিতাংশ তাকে ছেদ করে)



চিত্র 5-4

$$OP, OE = BO^2$$

এখানে $BC = FD = OP = b$

অতএব $OE = BF = (BD - DF) = 2\rho - b$

অতএব $b(2\rho - b) = a^2$

$$\text{অর্থাৎ} \quad \rho = \frac{a^2 + b^2}{2b} \qquad (5\text{—}49)$$

সমীকরণ (5-48) ও (5-49) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{a^2 + b^2}{2b} = \frac{mv}{Be\sin\theta} \qquad (5\text{—}50)$$

সমীকরণ (5-47) থেকে পাই

$$v=\frac{E}{B\sin\theta} \qquad (5—51)$$

সমীকরণ (5-50) এ (5-51) থেকে $v$ এর মান প্রতিস্থাপিত করলে পাওয়া যায়

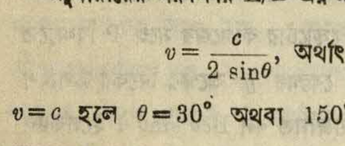
$$\frac{e}{m}=\frac{2b}{a^2+b^2}\,\frac{E}{B^2\sin^2\theta} \qquad (5—52)$$

এইভাবে ইলেকট্রন বেগের বিভিন্ন মান (5-51) এর জন্য $\frac{e}{m}$ এর বিভিন্ন মান পাওয়া যায়। যদি দৈর্ঘ্যের পরিমাপ মিটারে, E এর পরিমাপ ভোল্ট/মিটারে এবং B এর পরিমাপ ওয়েবার/(মিটার)$^2$ এ করা হয় তা হলে $\frac{e}{m}$ এর মান পাওয়া যাবে কুলম্ব/কিলোগ্রামে।

বুখারারের পরীক্ষায় E/B এর মান নেওয়া হয়েছিল $c/2$ অতএব

$$v=\frac{c}{2\sin\theta},\ \text{অর্থাৎ}\ \frac{v}{c}=\frac{1}{2\sin\theta} \qquad (5—53)$$

$v=c$ হলে $\theta=30^\circ$ অথবা $150^\circ$। যেহেতু ইলেকট্রনের বেগ সব সময় আলোর শূন্যের বেগ $c$ এর চেয়ে কম হবে অতএব $\theta$ $30^\circ$ ও $150^\circ$ এর মধ্যে থাকবে। এক্ষেত্রে P বিন্দুর অপসরণ OP শূন্য হবে। O বিন্দু থেকে অপসরণের মান সবচেয়ে বড় হবে $\theta=\frac{\pi}{2}$ মানের জন্য, অর্থাৎ $v=c/2$। বেগের অন্যান্য মানের জন্য অপসরণের মান এই দুই এর মাঝামাঝি হবে। কাজেই বেলনাকারে মোড়া ফোটোর কাগজটিকে খুলে ছড়িয়ে দিলে শূন্য অপসরণ রেখাটি সরলরেখা বলে মনে হবে এবং অন্যান্য বিন্দুগুলি $OP_2O$ বক্ররেখার উপর থাকবে। OO রেখাটি খুব মোটা হবে কাজেই OP র মান সঠিকভাবে নির্ণয় করা যাবে না। সেজন্য এবার তড়িৎ ও চুম্বকীয় ক্ষেত্রগুলির দিক উল্টে দেওয়া হয় কিন্তু তাদের তীব্রতার মানের কোন পরিবর্তন করা হয় না। ফলে ইলেকট্রনগুলি এখন O বিন্দুর বিপরীত দিকে সমদূরত্বে গিয়ে পড়ে। এখন চিত্র 5-5 এর বক্ররেখাটিও ফোটোর কাগজে সৃষ্ট হয়। যে কোন একটি দিকের



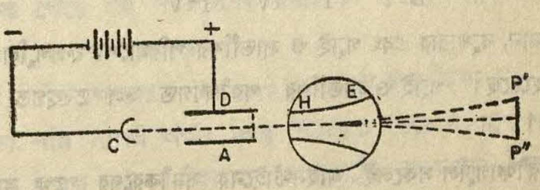
চিত্র 5·5

অপসরণ ($b$) $P_1P_2$ এর অর্ধেক হবে। এক্ষেত্রে শূন্য অপসরণ রেখাটির কোন প্রয়োজন নেই। বুখারার এইভাবে বিভিন্ন দিকে বিভিন্ন বেগের ইলেক্ট্রনের আপেক্ষিক আধান $\frac{e}{m}$—নির্ণয় করেন। এবার তা থেকে $\frac{e}{m_0}$ এর মান নির্ণয় করেন আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সমীকরণ অনুযায়ী। তালিকা 5 – 1-এ বুখারারের পরীক্ষার কয়েকটি ফল নমুনা হিসাবে দেওয়া হল। পরীক্ষার ভ্রমসীমার মধ্যে $\frac{e}{m_0}$ এর মান অবিচল থাকে। এর পর এ ধরণের আরও অনেক পরীক্ষা থেকে অনুরূপ ফল পাওয়া গেছে। তার মধ্যে 1915 খ্রীষ্টাব্দে অনুষ্ঠিত গ্যুই ও লাভাঁশির পরীক্ষা উল্লেখযোগ্য।

তালিকা 5 – 1. বুখারারের পরীক্ষার ফল

| $v/c$ | $e/m = \frac{e\sqrt{1-v^2/c^2}}{m_0}$ | $e/m_0$ |
|---|---|---|
| 0·3173 | $1·661 \times 10^{11}$ কু./কি.গ্রা. | $1·752 \times 10^{11}$ কু./কি.গ্রা. |
| 0·3787 | 1·630 | 1·761 |
| 0·4281 | 1·590 | 1·760 |
| 0·5154 | 1·511 | 1·763 |
| 0·6870 | 1·283 | 1·767 |

বুখারারের পরীক্ষায় বিদ্যুৎসঞ্চয়ীর প্রান্তদেশে তড়িৎক্ষেত্রের বলরেখাগুলি কিছুটা বক্র, ফলে সেখানে তড়িৎক্ষেত্র স্থাননিরপেক্ষ নয়। তা ছাড়া সঞ্চয়ী থেকে বেরোবার পরও কিছুটা বিক্ষিপ্ত তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র থাকে। এই ধরণের ভ্রম সংশোধন করার জন্য গ্যুই (Guy) এবং লাভাঁশি (Lavanchy) ধীর বেগসম্পন্ন ইলেক্ট্রনের সঙ্গে দ্রুত বেপসম্পন্ন ইলেক্ট্রনের গতির তুলনা করেন। চিত্র 5-7 এ যন্ত্রবিন্যাস দেখান হয়েছে। একটি বায়ুশূন্য নলের মধ্যে ক্যাথোড




চিত্র 5-6

ও এনোড মিলিতভাবে ইলেক্ট্রনগুলিকে ত্বরিত করে। ক্যাথোড ও এনোডের মধ্যে কয়েক হাজার ভোল্ট বিভবান্তর সৃষ্টি করা হয়। এনোডের মধ্যে একটি

ছিদ্র দিয়ে সরু রশ্মিগুচ্ছ নির্গত হয় এবং তারপর একটি ফোটোর কাগজ P-র উপর আপতিত হয়। ইলেক্ট্রনগুলিকে প্রথমে তড়িৎ ও পরে চৌম্বক ক্ষেত্রের মধ্য দিয়ে পাঠান হয়। প্রথমে ধীর বেগসম্পন্ন ইলেক্ট্রন P′ বিন্দুতে পৌঁছায়। এরপর চৌম্বক ক্ষেত্রের দিক পাল্টে দিলে সেগুলি P″ বিন্দুতে পৌঁছায়। এর পর উচ্চ বেগসম্পন্ন ইলেক্ট্রনগালিকে একই পথে চালিত করা হয়। যদি ধীর বেগ $v$ সম্পন্ন ইলেক্ট্রনের ক্ষেত্রে তড়িৎ বিভবান্তর V এবং তড়িৎ চুম্বকে I তড়িৎপ্রবাহ ব্যবহার করা হয় এবং উচ্চবেগ সম্পন্ন ইলেক্ট্রনের ক্ষেত্রে যথাক্রমে V′ ও I′ বিভবান্তর ও তড়িৎপ্রবাহ ব্যবহৃত হয় তা হলে সমীকরণ (5-47) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{v'}{v}=\frac{E'/B'}{E/B}=\frac{V'/I'}{V/I}=\frac{IV'}{I'V} \qquad (5-54)$$

চৌম্বক ক্ষেত্রে ইলেক্ট্রনগুলি যদি $r$ ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তাকার পথে চলে তা হলে

$$\frac{mv^2}{r}=Bev \qquad (5-55)$$

অর্থাৎ $$mv=B\,e\,r \qquad (5-56)$$

অনুরূপে $$m'v'=B'\,e\,r \qquad (5-57)$$

সমীকরণ (5—56) ও (5—57) থেকে পাই

$$\frac{m'v'}{mv}=\frac{B'}{B} \qquad (5-58)$$

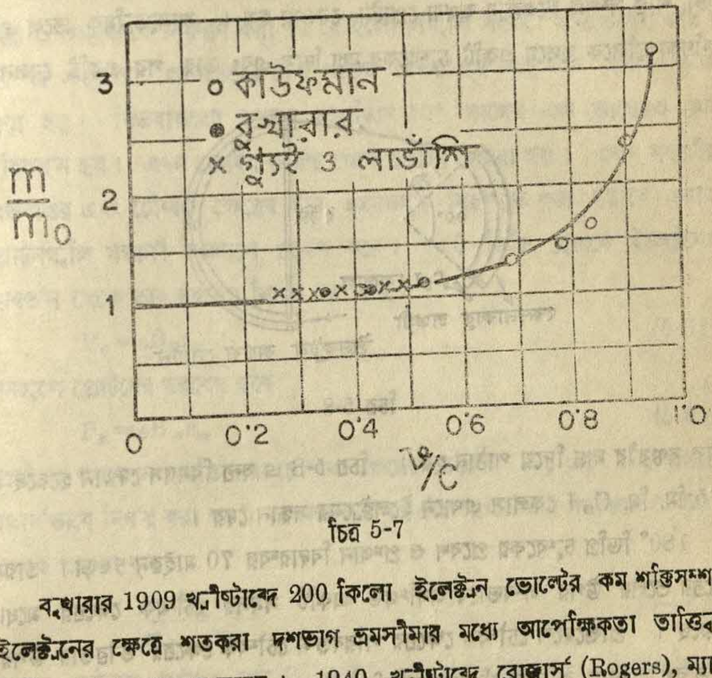
অতএব সমীকরণ (5—58) ও (5—54) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{m'}{m}=\frac{B'}{B}\frac{v}{v'}=\frac{I'}{I}\cdot\frac{I'V}{IV'}=\frac{I'^2V}{I^2V'} \qquad (5-59)$$

কাউফমান, বুখারার এবং গুাই ও লাভাঁশির পরিমাপের ফলগুলি চিত্র (5-7) এ দেখান হয়েছে। গুাই ও লাভাঁশির পরীক্ষাগত ফল তত্ত্বগত লেখচিত্রের উপর পড়ে।

এই পরীক্ষাগুলি সকলেই আইনষ্টাইনের সমীকরণের পক্ষে রায় দিয়েছে এবং আব্রাহামের সমীকরণ পরিত্যক্ত হয়েছে। এখানে উল্লেখ করতে পারা যায় যে এখনও পর্যন্ত ইলেক্ট্রন ছাড়া অন্য কোন কণিকার বেগের সঙ্গে ভরের পরিবর্তন নির্ণয় করা সম্ভব হয় নি কারণ তাদের ক্ষেত্রে আণুপাতিক পরিবর্তন

অত্যন্ত কম। এখন উচ্চশক্তি সম্পন্ন বস্তুকণিকা নিয়ে যে সব পরীক্ষা করা হয় তার সম্বন্ধেতেই আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সমীকরণ ব্যবহার ক'রে তাদের গতিপথ নির্ণয় করা হয় এবং সেগুলি সব ক্ষেত্রেই সঠিক ফল দিতে দেখা গেছে।



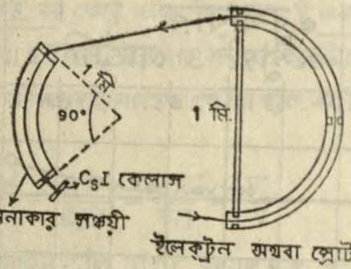

চিত্র 5-7

বুখারার 1909 খ্রীষ্টাব্দে 200 কিলো ইলেক্ট্রন ভোল্টের কম শক্তিসম্পন্ন ইলেক্ট্রনের ক্ষেত্রে শতকরা দশভাগ ভ্রমসীমার মধ্যে আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সমীকরনের সত্যাখ্যান করেন। 1940 খ্রীষ্টাব্দে রোজার্স (Rogers), ম্যাক রেনল্ড্স্ (Mac Reynolds) এবং রোজার্স জুনিয়র (Rogers Junior) প্রায় 0.8c পর্যন্ত বেগসম্পন্ন অর্থাৎ 300 কিলো ইলেক্ট্রন ভোল্ট পর্যন্ত শক্তিসম্পন্ন ইলেকক্ট্রনের ক্ষেত্রে এই সমীকরণের সত্যাখ্যান করেন। তাঁদের পরীক্ষার ভ্রমসীমা ছিল শতকরা 1 ভাগ।

1963 খ্রীষ্টাব্দে মেয়ার (Meyer) এবং তাঁর সহকর্মীরা 2·6 থেকে 3·1 মি. ই. ভো. শক্তি সম্পন্ন অর্থাৎ স্থির শক্তির 5 থেকে 6 গুণ শক্তি সম্পন্ন ইলেকক্ট্রনের ক্ষেত্রে এই সমীকরণের সোজাসুজি সত্যাখ্যান করেন। এই পরীক্ষায় বিক্ষিপ্ত তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র এবং বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীর প্রান্তদেশের তড়িৎ ক্ষেত্রের বিচ্যুতি জনিত ভ্রম সংশোধন করার জন্য প্রোটনের সঙ্গে তুলনামূলক পরিমাপ করা হয়। প্রোটনের ভর ইলেক্ট্রনে চেয়ে অনেক বেশী কাজেই সমশক্তি

সম্পন্ন প্রোটনের বেগ আলোর বেগের চেয়ে অনেক কম। গ্যুই ও লাভাঁশির পরীক্ষায় এই তুলনা করা হয়েছিল ধীর গতিসম্পন্ন ইলেক্ট্রনের সঙ্গে।

পছন্দমত ভ্যান ডি গ্রাফ (Van de Graff) বেগবর্ধক যন্ত্র থেকে 5·5 মি. ই. ভো. শক্তি সম্পন্ন ইলেক্ট্রন অথবা প্রোটন নেওয়া হয়। আনুভূমিক তলে এই কণিকাগুলিকে প্রথমে একটি চুম্বকের মধ্য দিয়ে এবং তার পর একটি বেলনা-




চিত্র 5-8

কার সঞ্চয়ীর মধ্য দিয়ে পাঠান হয়। চিত্র 5-8 এ যন্ত্র বিন্যাস দেখান হয়েছে। 0·5 মি. মি. $C_s$ I কেলাস এখানে ইলেক্ট্রনের সন্ধান দেয়।

180° ডিগ্রি চুম্বকের প্রবেশ ও প্রস্থান বিদারন্বয় 70 মাইক্রন চওড়া। তারা চিত্রের তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত একটি সমসত্ব চৌম্বক ক্ষেত্রের মধ্যে রয়েছে। প্রান্তদেশে চৌম্বক ক্ষেত্রের পরিবর্তন চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতার উপর নির্ভরশীল এবং কণিকা রশ্মিতে অতিরিক্ত আবর্তনের সৃষ্টি করে যার ফলে মোট আবর্তনের পরিমাণ 210 ডিগ্রি। চৌম্বকক্ষেত্রের সমসত্ব অংশে আহিত কণাগুলির গতিপথ 1 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্ত এবং তিনটি বিদারন্বারা এর সীমা নির্দিষ্ট হয়।

এর পর কণিকাগুলি একটি বেলনাকার সঞ্চয়ীর মধ্য দিয়ে যায় যদি তাদের উপর তড়িৎ ক্ষেত্রজনিত বল কেন্দ্রাতিগ বলের সমান এবং বিপরীতমুখী হয়। অর্থাৎ

$$eE = \frac{P^2}{mr_e} \qquad (5\text{-}60)$$

যেখানে E তড়িৎক্ষেত্রের তীব্রতা, $m$ ভর, $e$ আধান এবং $r_e$ তড়িৎ ক্ষেত্রে গতিপথের ব্যাসার্ধ সূচিত করে। সঞ্চয়ীর সামনে ও পিছনে অবস্থিত বিদারগুলি

তড়িৎক্ষেত্রের বিকৃতির সৃষ্টি করে যার পরিমাপ করা দুঃসাধ্য। সেজন্য এখানে প্রোটনের পরিমাপের সঙ্গে তুলনা করা হয়।

প্রথমে উচ্চশক্তি ইলেক্ট্রন নেওয়া হয় এবং চৌম্বক ক্ষেত্র $B_e$ এবং তড়িৎ ক্ষেত্র E এমনভাবে নিয়ন্ত্রণ করা হয় যে ইলেক্ট্রনগুলি সন্ধানী যন্ত্রে প্রবেশ করে। এর পর সঞ্চয়ীর বিভবান্তরের দিক পাল্টে দেওয়া হয় কিন্তু মান অপরিবর্তিত রাখা হয়। বিভবান্তরের মানের সারাদিনে $10^4$ ভাগের এক ভাগেরও কম পরিবর্তন হয়। এখন বেগবর্ধক যন্ত্র থেকে প্রোটন নেওয়া হয়। এখন সঞ্চয়ীর বিভবান্তর এবং চৌম্বক ক্ষেত্রের মান এমনভাবে নিয়ন্ত্রিত করা হয় যে এবার প্রোটনগুলি সন্ধানী কেলাসে প্রবেশ করে। 180 ডিগ্রি চুম্বকে ইলেক্টনের আবর্তন থেকে তার ভরবেগ নির্ণয় করা যায়ঃ

$$P_e = eB_p r_m \tag{5-61}$$

অনুরূপে প্রোটনের ভরবেগ হবে

$$P_p = eB_p r_m \tag{5-62}$$

প্রোটনের অনুরণন পদ্ধতিদ্বারা চৌম্বক ক্ষেত্রের তীব্রতা $B_e$ এবং $B_p$ অত্যন্ত যথার্থভাবে নির্ণয় করা হয়। বেলনাকার সঞ্চয়ীর পথের জন্য সমীকরণ (5-60) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{P_e^2}{m_e} = \frac{P_p^2}{m_p} \tag{5—63}$$

অতএব চৌম্বক ক্ষেত্রের মান $B_e$ ও $B_p$ এবং প্রোটনের ভর $m_p$ জানা থাকলে ইলেক্টনের ভর নির্ণয় করা যায়ঃ

$$m_e = \left(\frac{B_p}{B_p}\right)^2 m_p \tag{5-64}$$

অতএব ইলেক্ট্রনের শক্তির প্রত্যেক মানের উপযুক্ত প্রোটনের শক্তির একটি মান আছে যে জন্য প্রোটন ও ইলেক্ট্রন উভয়েই 180 ডিগ্রি চুম্বকের এবং তড়িৎ সঞ্চয়ীর অবিচল চৌম্বক ও তড়িৎ ক্ষেত্রের মধ্য দিয়ে একই পথে যায়। উদাহরণ স্বরূপ 3 মি. ই. ভো (M$ev$) ইলেক্ট্রনের উপযুক্ত প্রোটন শক্তি 1·7 মি. ই. ভো (M$ev$) (মি. ই. ভো শক্তির একক এবং $1{\cdot}6 \times 10^{-6}$ আর্গের সমান) উপরোক্ত শক্তির ইলেক্ট্রনের বেগ আলোর বেগের সঙ্গে তুলনীয় কিন্তু প্রোটনের ক্ষেত্রে আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সংশোধন উপেক্ষণীয়। পরীক্ষায় 2·67, 2·81 এবং

3·13 মি. ই. ভো. শক্তিযুক্ত ইলেক্ট্রন পর পর নেওয়া হয়েছিল এবং ইলেক্ট্রনের ভরের পরীক্ষালব্ধ মান $m_e$ র সঙ্গে লোরেণ্ট্‌স্‌ প্রদত্ত রাশি $m_0 \sqrt{1+\left(\frac{P_e}{m c}\right)^2}$ এর তুলনা করা হয়েছিল। পরীক্ষার ফলের ভ্রমসীমা ছিল মাত্র 0·05% এবং এই পরীক্ষাও আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক সূত্রের পক্ষে রায় দেয়।

**5-7. ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্রের পরীক্ষামূলক সত্যাখ্যান :** ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্রের প্রথম মাত্রিক পরীক্ষামূলক প্রমাণ যাঁরা দেন তাঁদের মধ্যে ছিলেন কক্রফ্‌ট (Cockroft) এবং ওয়াল্‌টন (Walton)। তাঁরা 1932 খৃষ্টাব্দে প্রথম কৃত্রিম পরমাণু বিভাজন ঘটান লিথিয়াম নিউক্লিয়সগুলিকে 0·1 থেকে 0·7 মি. ই. ভো. শক্তিসম্পন্ন প্রোটন কণিকা দ্বারা আঘাত ক'রে। এই নিউক্লীয় প্রক্রিয়ার মেঘ প্রকোষ্ঠ ফোটো তোলা হয় এবং তা থেকে বোঝা যায় যে, নিউক্লীয় সংযোজনের ফলে দু'টি এল্‌ফা কণিকার সৃষ্টি হয় এবং তারা বিপরীত দিকে সমবেগে ধাবিত হয়। এই প্রক্রিয়াকে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4 + Q \qquad (5\text{-}65)$$

যেখানে Q অতিরিক্ত শক্তি, যা কণিকাগুলির গতীয় শক্তিরূপে প্রকাশ পায়। এই নিউক্লীয় প্রক্রিয়ার বিভিন্ন উপাদানের ভর পারমাণবিক ভরের এককে নিচে দেওয়া হল (অক্সিজেন পরমাণুর ভর এখানে 16 ধরা হয়েছে)

$$m({}_3Li^7) = 7{\cdot}01822 \text{ এ. এম. ইউ. } (a.\ m.\ u.)$$
$$m({}_1H^1) = 1{\cdot}00812 \text{ এ. এম. ইউ. } (a.\ m.\ u.)$$
$$m({}_2He^4) = 4{\cdot}00390 \text{ এ. এম. ইউ. } (a.\ m.\ u.)$$

এই নিউক্লীয় প্রক্রিয়ার ফলে $(7{\cdot}01822 + 1{\cdot}00812) - 2 \times 4{\cdot}00390$ $= 8{\cdot}02634 - 8{\cdot}00780 = 0{\cdot}01854$ এ. এম. ইউ. পরিমাণ ভর নষ্ট হয় অর্থাৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এক এ. এম. ইউ. 931 মি. ই. ভো. পরিমাণ শক্তি দেয়। কাজেই এই প্রক্রিয়ায় $0{\cdot}01854 \times 931 = 17{\cdot}26$ মি.ই.ভো. $= 27{\cdot}6 \times 10^{-6}$ আর্গ পরিমাণ শক্তি উৎপন্ন হবে। এই শক্তি দু'টি এল্‌ফা কণিকার গতীয় শক্তি হিসাবে প্রকাশ পায়। কক্রফ্‌ট এবং ওয়ালটনের পরীক্ষায় এলফা কণিকাগুলির বায়ুতে পাল্লা 8 সে. মি.। অতএব তাদের প্রত্যেকের শক্তি 8·63 মি. ই. ভো.। কাজেই সমীকরণ (5-65) এর ডানদিকের মোট গতীয় শক্তি 2 × 8·63 মি. ই. ভো.। এর থেকে প্রোটন কণিকার গতীয় শক্তি ( 0·25 মি. ই. ভো. ) বিয়োগ

করলে পাওয়া যায় 17·01 মি. ই. ভো. $= 27{\cdot}2 \times 10^{-6}$ আর্গ। কাজেই গণনালব্ধ ফলের সঙ্গে পরীক্ষালব্ধ ফলের মিল ভ্রমসীমার মধ্যে দেখা যায়। এ ছাড়া এখন অসংখ্য নিউক্লীয় প্রক্রিয়ায় আইনষ্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতা প্রমাণিত হয়েছে। আমরা এ সম্বন্ধে নিচে আরও আলোচনা করব।

**5-8. আধুনিক পদার্থ বিজ্ঞানে আপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক বলবিদ্যার প্রয়োগ ঃ** অন্য যে সমস্ত নিউক্লীয় প্রক্রিয়ার শক্তি ও ভরের তুলতা সূত্রের সত্যাখ্যান করা হয়েছে, উদাহরণ স্বরূপ তাদের একটি ছোট তালিকা নিচে দেওয়া হল ঃ

**তালিকা 5-2**

| প্রক্রিয়া | $\Delta m$(এ. এম. ইউ.) | $Q = \Delta E$ মি. ই. ভো পরীক্ষালব্ধ | গণনালব্ধ |
|---|---|---|---|
| ${}_9F^{19} + {}_1H^1 \rightarrow {}_8O^{16} + {}_2He^4$ | 0·00876 | 8·15 | 8·16 |
| ${}_3Li^6 + {}_1H^2 \rightarrow 2\,{}_2He^4$ | 0·02381 | 22·20 | 22·17 |
| ${}_5B^{10} + {}_1H^2 \rightarrow {}_6C^{11} + {}_0n^1$ | 0·00685 | 6·38 | 6·38 |
| ${}_6C^{12} + {}_1H^2 \rightarrow {}_6C^{13} + {}_1H^1$ | 0·00297 | 2·71 | 2·76 |
| ${}_7N^{14} + 2He^4 \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1$ | −0·00124 | −1·16 | —1·15 |

আমরা দেখেছি যে, ভর বিলয়ের ফলে প্রচণ্ড পরিমাণ শক্তির সৃষ্টি হয়। উদাহরণ স্বরূপ 1 গ্রাম ভরের বিলয়ের ফলে $9 \times 10^{20}$ আর্গ শক্তির সৃষ্টি হয়, মোটামুটিভাবে হিরোশিমায় পারমাণবিক বোমা (20 কিলোটন) বিস্ফোরণের ফলে যে শক্তি উৎপন্ন হয়েছিল তার সমান। এই শক্তির অতি অল্প অংশ অণুগুলিকে গতীয় শক্তি দেয় যার ফলে তাপের সৃষ্টি হয় এবং একটি অংশ অণু ও পরমাণুগুলির পারস্পরিক আসঞ্জক শক্তি সৃষ্টি করে যা অনেক সময় রাসায়নিক বিস্ফোরণে প্রকাশ পায় অন্য একটি অংশ উত্তেজিত পরমাণুতে বর্তমান থাকে এবং বিকিরণ হিসাবে নির্গত হয়; অনেক বেশী অংশ থাকে নিউক্লীয় বন্ধন শক্তি হিসাবে এবং তারও কখনও কখনও বহিঃপ্রকাশ ঘটে যেমন পারমাণবিক বোমা বিস্ফোরণে। কিন্তু শক্তির সবচেয়ে বেশী অংশ (প্রায় শতকরা ৭৭ ভাগ) বর্তমান থাকে মৌল কণিকাগুলির ভর হিসাবে এবং তার আর কোন ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব নয়। কিন্তু উপযুক্ত অবস্থায় তাও শক্তিতে রূপান্তরিত হয়

যখন বস্তু এবং প্রতিবস্তু পরস্পর পরস্পরের বিলোপ সাধন করে। অতএব সাধারণভাবে স্থিতিভর সংরক্ষিত হয় না।

বহুদিন পর্যন্ত জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা বুঝতে পারতেন না তারাগুলির শক্তির উৎস কোথায়, কি ভাবে সূর্য 100 কোটি বছরের উপর তাপ ও আলো বিকিরণ করে চলেছে। এখন জানা গেছে যে, উপরোক্ত ধরণের তাপদায়ক নিউক্লীয় প্রক্রিয়াই প্রধানতঃ এই শক্তির উৎস। মহাশূন্যে গ্যাস ঘনীভূত হয়ে যখন তারার সৃষ্টি হয় তখন তাপ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়। কেন্দ্রের তাপমাত্রা যখন 2 কোটি ডিগ্রিতে পৌঁছায় তখন পরমাণুগুলি প্রচণ্ড বেগে ছোটাছুটি করে ফলে তাদের প্রচণ্ড বেগ দুটি সমান আধানের বস্তুকণিকার মধ্যে কুলম্বীয় বিকর্ষণকে অতিক্রম করতে সহায়তা করে। প্রথমে দুটি প্রোটন মিলিত হয়ে ডয়টেরনের সৃষ্টি করে :

$$_1H^1 + {}_1H^1 \rightarrow {}_1D^2 + e^+ \qquad (5\text{-}66)$$

তারপর নিম্নলিখিত প্রক্রিয়াগুলির ফলে শেষে হিলিয়াম পরমাণুর সৃষ্টি হয় :

$$_1D^2 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^3 \qquad (5\text{-}67)$$

$$_2He^3 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + e^+ \qquad (5\text{-}68)$$

যে প্রক্রিয়ার ফলে দুটি হালকা পরমাণু মিলিত হয়ে একটি ভারী পরমাণুর সৃষ্টি করে তাকে বলা হয় সংযোজন প্রক্রিয়া। এখানে চারটি হাইড্রোজেন পরমাণুর সংযোজনের ফলে হিলিয়াম পরমাণুর সৃষ্টি হয়। হাইড্রোজেন বোমাতেও অনুরূপ প্রক্রিয়া ঘটান হয়। আমরা উদাহরণ হিসাবে প্রোটন ও ডয়টেরণের মিথষ্ক্রিয়া নিয়ে আলোচনা করব :

প্রোটনের ভর $= 1{\cdot}6724 \times 10^{-22}$ গ্রাম

ডয়টেরনের ভর $= 3{\cdot}3432 \times 10^{-22}$ গ্রাম

মোট $p + D$ $= 5{\cdot}0156 \times 10^{-22}$ গ্রাম

$_2He$ নিউক্লিয়সের ভর $= 5{\cdot}0058 \times 10^{-22}$ গ্রাম

অতিরিক্ত ভর $= 9{\cdot}8 \times 10^{-25}$ গ্রাম

এই শক্তি নিয়ে একটি ফোটন (গ্যামারশ্মি) নির্গত হয় যা সমীকরণ (5-67) এ দেখান হয় নি। সেই ফোটনের শক্তি

$$E = mc^2 = 9{\cdot}8 \times 10^{-25} \times 9{\cdot}0 \times 10^{20} = 8{\cdot}8 \times 10^{-4} \text{ আর্গ}$$

$$= 5{\cdot}5 \text{ মি. ই. ভো.}$$

এই প্রক্রিয়া পরীক্ষাগারে সংঘটিত করা হয়েছে এবং আশানুরূপ শক্তি সম্পন্ন গ্যামারশ্মি দেখা গেছে। সূর্যের অভ্যন্তরে এই ধরণের তাপ-নিউক্লীয় প্রক্রিয়া ঘটে এবং গ্যামারশ্মিগুলি সূর্যের উপরিভাগে পেঁছিবার পূর্বেই সম্পূর্ণভাবে শোষিত হয় এবং 1 ই. ভো. ক্রমের শক্তি সম্পন্ন ফোটন নির্গত হয়—অবলোহিত, দৃশ্যমান এবং অতিবেগুণী এই নিয়ে সূর্যরশ্মির বর্ণালীর সৃষ্টি।

সূর্য থেকে সেকেন্ডে যে পরিমাণ শক্তি নির্গত হয় তাকে ভরে রূপান্তরিত করলে দাঁড়ায় সেকেন্ডে $4{\cdot}5\times10^{6}$ টন। কাজেই সূর্যের ভর প্রতি সেকেন্ডে এই পরিমাণ কমছে। এই মান অত্যন্ত বেশী মনে হলেও বছরে সূর্যের ভরের মাত্র $10^{13}$ ভাগের এক ভাগ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কাজেই 100 কোটি বছর কিরণ দিলেও সূর্যের ভর কমবে মাত্র 10 হাজার ভাগের এক ভাগ।

আইনস্টাইনের সূত্র অনুযায়ী একটি গতিশীল গল্ফ্ বলের ভর স্থিতিশীল বলের ভরের চেয়ে বেশী, একটি জ্বলন্ত ইলেক্ট্রিক বাল্বের উত্তপ্ত ফিলামেন্টের ভর ঠাণ্ডা অবস্থার চেয়ে বেশী। এ ছাড়া ঘড়ির স্প্রিং গোটান অবস্থায় থাকলে তাতে স্থিতিস্থাপক শক্তি সঞ্চিত থাকে, কাজেই তার ভর খোলা অবস্থার চেয়ে বেশী। অনুরূপে একটি আহিত বিদ্যুৎ সঞ্চয়ীর ভর অনাহিত সঞ্চয়ীর ভরের চেয়ে বেশী হবে।

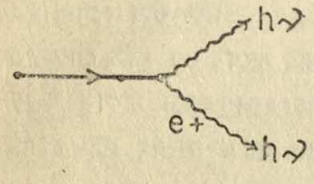
এই ভাবে দেখতে গেলে বিকিরণের ভর এবং বেগ দুইই আছে, কাজেই তার ভরবেগও আছে। আমরা তাপের গতিবিদ্যা থেকে জানি যে, একটি গ্যাসপূর্ণ পাত্রের দেওয়ালে সংঘর্ষের ফলে অণুগুলির ভরবেগের পরিবর্তন হয় বলে দেওয়ালের উপরে চাপের সৃষ্টি হয়। কাজেই বিকিরণও চাপ সৃষ্টি করে যাকে বলা হয় 'বিকিরণ চাপ'। এই কারণেই ধূমকেতুর পুচ্ছগুলিকে সূর্যের দিক থেকে দূরে সরে যেতে দেখা যায়।

নিউটনীয় বলবিদ্যায় ভরবেগ সংরক্ষণ এবং শক্তিসংরক্ষণ সূত্র দু'টি স্বতন্ত্র এবং অনধীন। কিন্তু আপেক্ষিকতা তত্ত্বে শক্তিভরবেগ ভেক্টরটি চার মাত্রার এবং এই ভেক্টরটি সংরক্ষিত হয়। কাজেই এই দু'টি সূত্র মিলিত হয়ে একটি সূত্র দেয়।

আমরা পূর্বেই বলেছি যে বস্তু ও প্রতিবস্তুর সংঘর্ষের ফলে দুটি গ্যামারশ্মির ফোটন নির্গত হয়:

$$e_{+}+e_{-}=2h\nu \qquad (5\text{-}69)$$

এই দু'টি ফোটনেরই শক্তি একটি ইলেক্ট্রন বা পজিট্রনের ভরশক্তির সমান অর্থাৎ $m_0c^2 = 0.511$ মি. ই. ভো., এটির পরীক্ষামূলক সত্যাখ্যান করা হয়েছে। কাজেই এখানে মোট শক্তি সংরক্ষিত হয়। আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুযায়ী ফোটনেরও ভরবেগ আছে এবং তার মান $\frac{h\nu}{c}$। চিত্র 5-9 থেকে স্পষ্ট যে, ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র সত্য হতে হলে দু'টি ফোটনের প্রয়োজন, একটি ফোটন থাকা সম্ভব নয়। এই জন্যই এই প্রক্রিয়ায় দু'টি ফোটনের সৃষ্টি হয়।



চিত্র 5 9

বস্তুকে যেমন শক্তিতে রূপান্তরিত করা যায় তেমন শক্তিকেও বস্তুতে রূপান্তরিত করা যায়। অর্থাৎ একটি গ্যামারশ্মির ফোটন লুপ্ত হয়ে সৃষ্টি করে ইলেক্ট্রন ও পজিট্রন যাকে যুগ্মসৃষ্টি বলা হয়। সহজেই প্রমাণ করা যায় যে একটি ফোটন একা একটি যুগ্মসৃষ্টি করলে যুগপৎ ভরবেগ ও শক্তি সংরক্ষিত হতে পারে না। সেজন্য অন্য বস্তু অর্থাৎ নিউক্লিয়সের প্রয়োজন, প্রতিক্ষিপ্ত হয়ে ভরবেগ সংরক্ষণ করার জন্য। সেজন্য এই যুগ্ম সৃষ্টি সবসময় নিউক্লিয়সের সান্নিধ্যে ঘটে। তা ছাড়া এক্ষেত্রে $h\nu \geqslant 2m_0c^2$ অর্থাৎ ফোটনের শক্তি অন্ততঃ $2 \times 0.511 = 1.022$ মি. ই. ভো. হতে হবে। এই ন্যূনতম কম্পাঙ্ককে 'প্রারম্ভ কম্পাঙ্ক' বলা হয়। এই কম্পাঙ্কের অস্তিত্বের পরীক্ষামূলক প্রমাণ পাওয়া গেছে।

অন্য ধরণের সংঘর্ষ বা ক্ষেপণ, ক্ষয়, বিলয় এবং যুগ্ম সৃষ্টির ক্ষেত্রেও এই দুই সংরক্ষণ সূত্র বলবৎ থাকে। সংঘর্ষের ফলে যদি কণিকাগুলির প্রকৃতি অপরিবর্তিত থাকে তা হলে তাকে স্থিতিস্থাপক বিক্ষেপণ বলা হয় যেমন রাদারফোর্ডের বিক্ষেপণ পরীক্ষা যেখানে এলফা কণিকাগুলিকে নিউক্লিয়াসের দিকে নিক্ষেপ করা হয় এবং তারা নিউক্লিয়াসের ধনাত্মক আধানের বিকর্ষণের ফলে বিক্ষিপ্ত হয়। অন্যদিকে যদি সংঘর্ষের পর কণিকাগুলির প্রকৃতি পরিবর্তিত হয় তা হলে তাকে অস্থিতিস্থাপক বিক্ষেপণ বলা হয়। উদাহরণ ঃ

$$\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + k^+ \qquad (5\text{-}70)$$

স্থিতিস্থাপক বিক্ষেপণের একটি গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ হল মুক্ত ইলেক্ট্রনের সঙ্গে ফোটনের সংঘর্ষ। ইলেক্ট্রনটি প্রথমে স্থির থাকলে ফোটনের সঙ্গে

সংঘর্ষের ফলে সেটি গতিশীল হয়। ফলে সে ফোটনের কিছুটা শক্তি গ্রহণ করে এবং ফোটনের শক্তি অর্থাৎ কম্পাঙ্ক হ্রাস পায়। একে কম্পটন প্রক্রিয়া (Compton effect) বা বিক্ষেপণ (Scattering) বলা হয়। ভরবেগ ও শক্তি সংরক্ষণ সূত্র ব্যবহার করে দেখান যায় যে, সংঘর্ষের ফলে ফোটনের দিক পরিবর্তনের পরিমাণের উপর তার কম্পাঙ্কের পরিবর্তন নির্ভর করে। এই সম্পর্কের পরীক্ষামূলক সত্যাখ্যান করা হয়েছে।

শুধু বিক্ষেপণ প্রক্রিয়ারই নয়, বিকিরণশীল সংক্রমণের ক্ষেত্রেও ফোটনের কম্পাঙ্ক হ্রাস পায়। একটি পরমাণু যখন উত্তেজিত অবস্থা থেকে সর্বনিম্ন অবস্থায় সংক্রমিত হয় তখন অতিরিক্ত শক্তি ফোটন আকারে নির্গত হয়। ভরবেগ সংরক্ষণ করার জন্য ফোটন নিক্ষেপের পর পরমাণুটিও প্রতিক্ষিপ্ত হয় এবং এই প্রতিক্ষেপ জনিত গতীয় শক্তি ফোটনের শক্তি থেকে গ্রহণ করে। 3-10 বিভাগে ইতিপূর্বেই এ সম্বন্ধে আমরা আলোচনা করেছি। অনুরূপে একটি পরমানু যখন একটি ফোটন শোষণ করে উত্তেজিত অবস্থায় সংক্রমিত হয় তখনও প্রতিক্ষেপ হয় এবং ফোটনের শক্তির কিছু অংশ এই গতীয় শক্তি সরবরাহ করার জন্য ব্যয়িত হয়।

আমরা পূর্বেই দেখেছি যে, চারটি হাইড্রোজেন পরমাণুর সংযোজনের ফলে যখন হিলিয়াম পরমাণুর সৃষ্টি হয় তখন হিলিয়াম পরমাণুর ভর উপাদানগুলির সম্মিলিত ভরের চেয়ে কম হয়, এই পার্থক্যকে ভরাভাব (Mass defect) বা বন্ধনাংশ (Packing fraction) বলা হয়। যদি $n$ সংখ্যক উপাদান যোগ করে একটি M ভর সম্পন্ন নিউক্লিয়াসের সৃষ্টি হয় তা হলে ভরাভাব $\Delta M$ হবে :

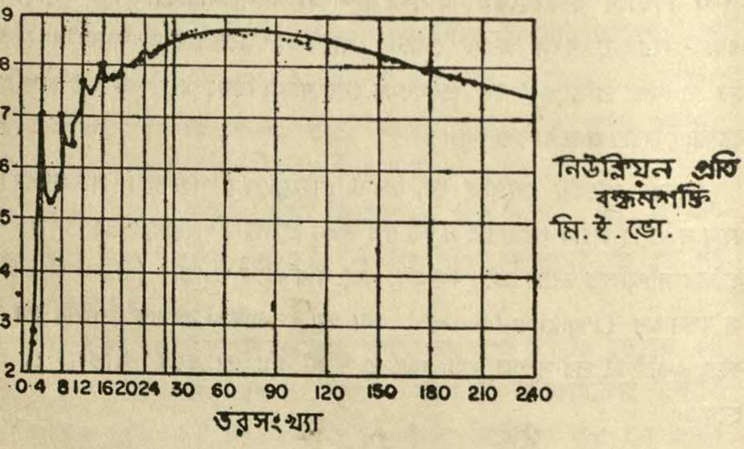
$$\Delta M = \sum_{i=1}^{n} M_i - M$$

যেখানে $M_i$ $i$ নং উপাদানের ভর। পক্ষান্তরিত করলে পাওয়া যায়

$$M + \Delta M = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

অতএব নিউক্লিয়াসটিকে উপাদানগুলিতে বিভক্ত করতে হলে $\Delta M$ ভর অর্থাৎ $\Delta Mc^2$ শক্তি যোগাতে হবে। এই ভরাভাব বা বন্ধনাংশ নিউক্লিয়াসের উপাদান-

গুলিকে বেঁধে রাখার শক্তি হিসাবে ব্যবহৃত হয়। অতএব $\Delta Mc^2 = \Delta E$ কে বন্ধনশক্তি বলা হয়। যদি $\Delta M$ ঋণাত্মক হত তা হলে নিউক্লিয়াসটি আপনা থেকেই খণ্ড খণ্ড হয়ে যেত। অতএব সুস্থিত নিউক্লিয়াস মাত্রেরই ভরাভাব ধণাত্মক। হিলিয়াম পরমাণুর উদাহরণ নেওয়া যাক। হিলিয়াম নিউক্লিয়াসের ভর 4·0028 এ এম.ইউ.। কিন্তু মুক্তাবস্থায় দু'টিপ্রোটন ও দু'টি নিউট্রনের ভর যোগ করলে দাঁড়ায় 4·0331 এ. এমু. ইউ.। অতএব ভরাভাব হল 0·0303 এ.এম.ইউ অর্থাৎ বন্ধনশক্তি $4\cdot5 \times 10^{-5}$ আর্গ বা 28 মি. ই. ভো.। অতএব প্রতি নিউক্লিয়নের বন্ধন শক্তি $\frac{28}{4} = 7$ মি. ই. ভো.। উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে, যে পরমাণুর নিউক্লিয়ন প্রতি বন্ধনশক্তি যত বেশী হবে সে পরমাণু তত সুস্থিত হবে। প্রোটন ও নিউট্রন উভয়কেই নিউক্লিয়ন বলা হয়। চিত্র 5-10এ পারমাণবিক ভর বা ভরসংখ্যার সাপেক্ষে নিউক্লিয়ন-প্রতি বন্ধন




চিত্র 5·10

শক্তির লেখ আঁকা হয়েছে। হালকা নিউক্লিয়াসের ক্ষেত্রে নিউক্লিয়ন-প্রতি বন্ধন শক্তি পারমাণবিক ভরের সঙ্গে সঙ্গে বাড়ে কাজেই দু'টি হালকা নিউক্লিয়াস সংযুক্ত হয়ে বড় নিউক্লিয়াস সৃষ্টি করলে (সংযোজন) শক্তি নির্গত হয়। আবার পরমাণু ভর যখন 100 এর কাছাকাছি পরমাণুগুলির বন্ধনশক্তি সবচেয়ে বেশী, তার চেয়ে ভারী পরমাণুগুলির ক্ষেত্রে ক্রমশঃ বন্ধনশক্তি কমে যায়। অতএব এক্ষেত্রে যদি একটি ভারী নিউক্লিয়াসকে 100 র কাছাকাছি ভরবিশিষ্ট

দু'টি খণ্ডে বিভক্ত করা হয় ( বিভাজন প্রক্রিয়া ) তা হলেও শক্তি নির্গত হয়। উদাহরণ স্বরূপ ইউরেনিয়ামের 235 ভর সংখ্যা বিশিষ্ট আইসোটোপকে (isotope) স্বল্পশক্তি সম্পন্ন নিউট্রনদ্বারা আঘাত করলে নিম্নলিখিত বিভাজন ঘটে :

$$_{92}U^{235} + {_0}n^1 \rightarrow {_{54}}Xe^{140} + {_{38}}Sr^{94} + 2{_0}n^1 + \gamma + 200 \text{ মি. ই. ভো.}$$

এক্ষেত্রে প্রচণ্ড শক্তি নির্গত হয় এবং একাধিক নিউট্রন অন্য ইউরেনিয়াম নিউক্লিয়াসকে আঘাত করে এবং এই প্রক্রিয়ায় নিউট্রনের সংখ্যা উত্তরোত্তর বৃদ্ধি পায়। পারমাণবিক বোমায় এই পরমাণু বিভাজন পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। যদি এই নিউট্রনের সংখ্যা বা ইউরেনিয়ামের পরিমাণ নিয়ন্ত্রিত করা হয় তা হলে এই শক্তি অনেক শান্তিপূর্ণ কাজে ব্যবহৃত হতে পারে। যে উত্তাপ উৎপন্ন হয় তা দ্বারা জলীয়বাষ্প তৈরী ক'রে টারবাইন ঘুরিয়ে বিদ্যুৎ শক্তি উৎপন্ন করা যায়। কাজেই আইনষ্টাইনের ভর ও শক্তির তুল্যতা সমীকরণের মধ্যেই নিহিত আছে একদিকে যেমন পৃথিবী ধ্বংসের মন্ত্র তেমনই আছে অন্যদিকে মানব কল্যাণের বীজমন্ত্র। এই আবিষ্কারকে কিভাবে প্রয়োগ করা হবে তার উপর নির্ভর করছে পৃথিবীর ভবিষ্যৎ। অনেকের মতে এটাই আইন্টাইনের সর্বশ্রেষ্ঠ আবিষ্কার।

## আরও পড়ার জন্য সুপারিশ


1. W. G. V. Rosser : An Introduction to the Theory of Relativity (Butterworths 1964)
2. S. N. Gupta : Theory of Relativity (Meenakshi Prakashan, Meerut, Delhi)
3. R. D. Sard : Relativistic Mechanics—Special Relativity and Classical Particle Dynamics, (Benjamin 1970)
4. H. M. Schwartz : Introduction to Special Relativity (McGraw Hill 1968)

# ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

## আপেক্ষিকতাত্ত্বিক তড়িৎ গতিবিদ্যা

"চৌম্বক ক্ষেত্রে গতিশীল বস্তুর উপর প্রযুক্ত তড়িচ্চালক বল তড়িৎ ক্ষেত্র ছাড়া আর কিছু নয়—এই বিশ্বাসই আমাকে মোটামুটি সোজাসুজি বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের পথে নিয়ে আসে।" —আলবার্ট আইনষ্টাইন।

**6-1. লোরেন্টস্ রূপান্তরের সাপেক্ষে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণের অপরিবর্তনশীলতা :**

আমরা দেখেছি যে, ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় নয়। অন্যদিকে নিউটনের সমীকরণগুলি গালিলীয় রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় (পৃষ্ঠা ৩) কিন্তু লোরেন্টস্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় নয় (পৃষ্ঠা ২৩০)। আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বের প্রথম স্বীকার্য অনুযায়ী পদার্থ বিদ্যার সকল সূত্রই প্রত্যেক জাড্যিক কাঠামোয় অভিন্ন থাকবে। আইনষ্টাইন তাঁর দুই স্বীকার্য থেকে প্রমাণ করেন যে, দু'টি জাড্যিক কাঠামোর দেশকালাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক লোরেন্টস্ রূপান্তর সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়। কাজেই নিউটনের গতিসূত্রগুলি আইনষ্টাইনের প্রথম স্বীকার্যের পরিপন্থী। আমরা দেখেছি যে, সেজন্য নিউটনীয় বলবিদ্যার পরিবর্তন করা প্রয়োজন ছিল। এখন তড়িৎ গতিবিদ্যার মূলসূত্র হল ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ। আইনষ্টাইন দেখালেন যে, এই সমীকরণগুলি লোরেন্টস্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় কাজেই এগুলি আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বের প্রথম স্বীকার্যের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ। কাজেই নিউটনের গতিসূত্রের মত এগুলির পরিবর্তন করার প্রয়োজন হয় না।

ম্যাক্সওয়েলের সম্বন্ধে আইনষ্টাইনের শ্রদ্ধা অপরিসীম ছিল। আজীবন তিনি এই মত পোষণ করতেন যে পদার্থ বিদ্যায় ম্যাক্সওয়েলের অবদান তাঁর অবদানের চেয়ে বেশী গুরুত্বপূর্ণ।

S জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে শূন্যস্থানে এবং স্থির বস্তুমাধ্যমে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি লেখা যায় :

$$\text{Curl } E+\frac{\partial B}{\partial t}=0 \qquad (6\text{—}1a)$$

$$\text{Curl } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \qquad (6\text{—}1b)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \qquad (6\text{—}1c)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \qquad (6\text{—}1d)$$

এই সমীকরণগুলি S কাঠামোর যে কোন স্থান—কালাঙ্ক $x, y, z, t$ এ সত্য। এই সমীকরণগুলি লোরেন্টস্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনশীল হলে S কাঠামোর সাপেক্ষে $x$ অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবিচল $v$ বেগে গতিশীল অপর জাড্যিক কাঠামো S′ এর সাপেক্ষে সমীকরণগুলির রূপ হবে

$$\left.\begin{aligned} &\text{Curl}' \ \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = 0 && (a) \\ &\text{Curl}' \ \mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} = \mathbf{j}' && (b) \\ &\text{div}' \ \mathbf{D}' = \rho' && (c) \\ &\text{div}' \ \mathbf{B}' = 0 && (d) \end{aligned}\right\} (6\text{—}2)$$

এই সমীকরণগুলি S′ কাঠামোর যে কোন স্থান—কালাঙ্ক $x', y', z'$ ও $t'$ এ সত্য।

সমীকরণ 6-1 $(a)$ ও $(d)$ কে উপাংশে ভেঙ্গে লিখলে দাঁড়ায়

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial t} = 0 && (a) \\ &\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}_y}{\partial t} = 0 && (b) \\ &\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial t} = 0 && (c) \\ &\frac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial z} = 0 && (d) \end{aligned}\right\} (6\text{—}3)$$

লোরেন্টস্ রূপান্তর সমীকরণগুলি হল :

$$\left.\begin{aligned} &x' = \gamma(x - vt) && (a) \\ &y' = y && (b) \\ &z' = z && (c) \\ &t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) && (d) \end{aligned}\right\} (6\text{—}4)$$

যেখানে $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$

আংশিক ব্যবকলন সংকারকগুলির নূতন কাঠামোয় রূপান্তরের সূত্র হবে ( তু. সমীকরণ 1—39) :

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}=\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right) \qquad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'} \quad (b) \qquad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'} \quad (c) \qquad (6-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}=\lambda\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right) \qquad (d)$$

এখন সমীকরণ (6—3$b$) থেকে পাওয়া যাবে

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\left(\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}\right)+\gamma\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'}-v\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right)=0$$

অর্থাৎ $$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}\gamma(E_z+vB_y)+\frac{\partial}{\partial t'}\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right) \qquad (6-6)$$

যদি ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলিকে লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় হতে হয় তা হলে সমীকরণ (6—6) সমীকরণ (6—1$a$) এর $y$ উপাংশের সঙ্গে অভিন্ন হবে :

$$\frac{\partial E_x'}{\partial z'}-\frac{\partial E_z'}{\partial x'}+\frac{\partial B_y'}{\partial t'}=0 \qquad (6-7)$$

সমীকরণ (6-6) ও (6-7) কে তুলনা করলে পাওয়া যায়

$$E_x'=E_x \qquad (6-8)$$

$$E_z'=\gamma(E_z+vB_y) \qquad (6-9)$$

$$B_y'=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right). \qquad (6-10)$$

অনুরূপে সমীকরণ (6-3$c$) এর S′ কাঠামোর রূপ হবে

$$\frac{\partial}{\partial x'}\gamma(E_y-vB_z)-\frac{\partial E_x}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial t'}\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right)$$

এটি যদি নিম্নলিখিত সমীকরণের সঙ্গে অভিন্ন হয় :

$$\frac{\partial E_y'}{\partial x'}-\frac{\partial E_x'}{\partial y'}+\frac{\partial B_z'}{\partial t'}=0$$

তা হলে

$$E_y'=\gamma(E_y-vB_z) \qquad (6-11)$$

$$F_x'=E_x$$

$$B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c_2}E_y\right) \quad (6-12)$$

এখন শুধু $B_x$ এর রূপান্তর সূত্র অজানা আছে। এটি নির্ণয় করার জন্য আমাদের সমীকরণ 6-3 ($a$) এবং ($d$) ব্যবহার করতে হবে। সমীকরণ (6—3$d$) এর S' কাঠামোর রূপ হবে

$$\gamma\left(\frac{\partial B'_x}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \quad (6-13)$$

সমীকরণ (6-10) এবং (6-12) এর বিপরীত সূত্রগুলি পাওয়া যাবে $v$ কে $-v$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করলে :

$$B_y = \gamma\left(B_y' - \frac{v}{c^2}E_z'\right)$$

$$\text{এবং } B_z = \gamma\left(B_z' + \frac{v}{c^2}E_y'\right)$$

এগুলি (6-13) এ প্রতিস্থাপিত করলে পাওয়া যায় :

$$\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_y' - \frac{v}{c^2}E'_z\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_z' + \frac{v}{c^2}E_y'\right) = 0$$

রাশিগুলিকে সাজিয়ে নিয়ে এবং $\gamma$ দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায় :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) \quad (6-14)$$

অনুরূপে সমীকরণ (6-3$a$) এর S' কাঠামোর রূপ হবে

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E}{\partial z'} + \gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} - v\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right) = 0$$

সমীকরণ (6-9) ও (6-11) এর বিপরীত সূত্র থেকে উপরিলিখিত সমীকরণে $E_y$ ও $E_z$ এর মান প্রতিস্থাপিত করলে পাওয়া যায়

$$\gamma\left(\frac{\partial E_z'}{\partial y'} - v\frac{\partial B'_y}{\partial y'}\right) - \gamma\left(\frac{\partial E_y'}{\partial z'} + v\frac{\partial B_z'}{\partial z'}\right) + \gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} - v\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right) = 0$$

$\gamma$ দিয়ে ভাগ করে এবং রাশিগুলিকে সাজিয়ে নিলে দাঁড়ায়

$$-v\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'}\right) + \frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_z'}{\partial y'} + \frac{\partial B_r'}{\partial z'} = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial E_s'}{\partial E} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) \quad (6-15)$$

সমীকরণ (6-14) ও (6-15) কে তুলনা করলে দেখা যায় যে $v=c$ না হলে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সত্য হবে :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\frac{\partial B_y'}{\partial y'}+\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=0 \qquad (6-16)$$

এবং $$\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}=0 \qquad (6-17)$$

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি S′ কাঠামোয় অপরিবর্তিত হলে সমীকরণ 6-3 (*a*) ও (*d*) এর অনুরূপ নিম্নলিখিত সমীকরণ দু'টি সত্য হবে

$$\frac{\partial B_x'}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=0 \qquad (6-18)$$

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}+\frac{\partial B_x'}{\partial t'}=0 \qquad (6-19)$$

শেষের দু'টি সমীকরণ (6-18) ও (6-19) যথাক্রমে সমীকরণ (6 16) ও (6-17) এর সঙ্গে অভিন্ন হবে যদি

$$B_x'=B_x \qquad (6-20)$$

রূপান্তর সূত্রগুলিকে একত্র করলে দাঁড়ায় :

$$\left.\begin{array}{ll} E_x'=E_x \quad (a) & E_x=E_x' \quad (d) \\ E_y'=\gamma(E_y-vB_z) \quad (b) & E_y=\gamma(E_y'+vB_z') \quad (e) \\ E_z'=\gamma(E_z+vB_y) \quad (c) & E_z=\gamma(E_z'-vB_y') \quad (f) \end{array}\right\} (6-21)$$

$$\left.\begin{array}{ll} B_x'=B_x \quad (a) & B_x=B_x' \quad (d) \\ B_y'=\gamma\left(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\right) (b) & B_y=\gamma\left(B_y'-\frac{v}{c^2}E_z'\right) (e) \\ B_z'=\gamma\left(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\right) (c) & B_z=\gamma\left(B_z'+\frac{v}{c^2}E_y'\right) (f) \end{array}\right\} (6-22)$$

আমরা দেখলাম যে, তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্রের উপাংশগুলি উপরোক্ত উপায়ে রূপান্তরিত হলে ম্যাক্সওয়েলের দু'টি সমীকরণ (6-1*a*) ও (6-1*d*) লোরেন্টস্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকে ।

যদি ‖ এবং ⊥ পাদাঙ্কগুলি যথাক্রমে ভেক্টরের *S* ও *S*′ কাঠামোর আপেক্ষিক বেগের সমান্তরাল এবং অভিলম্ব দিকের উপাংশ সূচিত করতে ব্যবহার করা হয় তা হলে $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_\parallel$ এবং $(\mathbf{v}\times\mathbf{E}/c^2)_\parallel$ উভয়েই শূন্য অতএব তড়িৎ চৌম্বক ক্ষেত্রের রূপান্তর সমীকরণগুলিকে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায়

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{E}_\parallel'=(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})_\parallel, \quad (a) & \mathbf{E}_\perp'=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})_\perp \quad (b) \\ \mathbf{B}_\parallel'=(\mathbf{B}-\mathbf{v}\times\mathbf{E}/c^2)_\parallel \quad (c) & \mathbf{B}_\perp'=\gamma(\mathbf{B}-\mathbf{v}\times\mathbf{E}/c^2)_\perp \quad (d) \end{array}\right\} (6-23)$$

ফ্যারাডে ( Faraday ) ও এম্পিয়রের ( Ampere ) সূত্র অনুযায়ী তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্রের রূপান্তর সমীকরণ হল

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B} \quad (a) \\ \text{এবং } \mathbf{B}' &= \mathbf{B}-\mathbf{v}\times\mathbf{E}/c^2 \quad (b) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{—}24)$$

(6-23) ও (6-24) তুলনা করলে দেখা যায় যে $\gamma=1$ অর্থাৎ $v\ll c$ হলে দুটি সমীকরণ অভিন্ন। আমরা দেখেছি যে, এক্ষেত্রে লোরেনট্স্ রূপান্তর গালিলীয় রূপান্তরের সঙ্গে অভিন্ন হয়।

**6-2. আধান ও প্রবাহঘনত্বের রূপান্তর সূত্র :** আমরা এখানে স্বীকার্য হিসাবে ধরব যে, কোন বস্তুকণার আধানের পরিমাণ কাঠামো নিরপেক্ষ। তা যদি না হত তা হলে বিভিন্ন মৌল কণিকা যথা ইলেক্ট্রন, প্রোটন ইত্যাদির আধান তাদের বেগের উপর নির্ভর করত।[1] কোন একটি ক্ষুদ্র আয়তন $\Delta V$ এর মধ্যে যদি $n$ সংখ্যক আহিত বস্তুকণা থাকে যাদের আধানের পরিমাণ যথাক্রমে $q_1, q_2\cdots$ $\cdots q_n$ তা হলে ঐ ক্ষুদ্র আয়তনের আধান ঘনত্ব হবে

$$\rho=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\Delta V} \qquad (6-25)$$

যদিও আমাদের পরীক্ষাগারের মাপকাঠিতে $\Delta V$ অত্যন্ত ক্ষুদ্র আয়তন তবুও তাতে যথেষ্ট সংখ্যক পরমাণু বর্তমান যার ফলে স্থূল তত্ত্বে আধান ঘণত্বকে দেশাঙ্কের সন্তত অপেক্ষক ধরা যায়। এই ক্ষুদ্রায়তন $\Delta V$ এর মধ্যস্থিত আধানগুলি গতিশীল হলে ঐ বিন্দুতে তড়িৎপ্রবাহ থাকবে। তড়িৎপ্রবাহের দিকের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত তলের একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে প্রবাহের পরিমাণকে প্রবাহ ঘনত্ব বলা হয়। যদি $\delta \mathbf{i}$ পরিমাণ প্রবাহ একটি $\delta s$ ক্ষেত্রফল সম্পন্ন ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের লম্বভাবে প্রবাহিত হয় তা হহে প্রবাহের ঘনত্ব হবে

$$\mathbf{j}=\frac{\delta\mathbf{i}}{\delta s} \qquad (6\text{—}26)$$

এখানেও অসংখ্য আহিতকণার গতির ফলে প্রবাহের সৃষ্টি হয়।

আমরা প্রথমে একটি সহজ উদাহরণ নেব। মনে করা যাক যে S কাঠামোয়

---

1. আমরা এখন জানি যে, সকল বস্তুই কতকগুলি পরমাণুর সমষ্টি এবং এই পরমাণুগুলির মধ্যে আছে ধনাত্মক আধানযুক্ত নিউক্লিয়াস এবং ঋণাত্মক আধানযুক্ত ইলেক্ট্রন। কোন স্থানাঙ্কে কতকগুলি পরমাণু যদি তাদের কয়েকটি ইলেক্ট্রন হারায় তা হলে সেই স্থানাঙ্কে বৈদ্যুতিক আধান ঘনত্বের সৃষ্টি হয়।

V আয়তনের মধ্যে আহিত কণাগুলি সমভাবে বিস্তৃত। ধরা যাক যে এক ঘন মিটার আয়তনের মধ্যে প্রত্যেকটি $q$ কুলম্ব আধানযুক্ত $n$ সংখ্যক আহিত কণা আছে। মনে করা যাক যে, জাড্যিক কাঠামো S এর সাপেক্ষে প্রত্যেকটি আহিত কণার বেগ **u**, এক্ষেত্রে

$$\rho = nq \qquad (6-17)$$

তড়িৎ প্রবাহের পরিমাণ হবে

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{u} \qquad (6-28)$$

মনে করা যাক যে, S′ কাঠামোয় উপরোক্ত আহিত কণাগুলির আয়তন V′, তাদের সংখ্যা এক ঘনমিটারে $n'$ এবং তাদের বেগ **u′**। S′ কাঠামো S এর সাপেক্ষে $x$ অক্ষের দিকে $v$ বেগে গতিশীল। এখন

$$\rho' = n' q \qquad (6-29)$$

$$\mathbf{j}' = n' q \mathbf{u}' \qquad (6-30)$$

আমরা এখানে $q$ এর মানের কোন পরিবর্তন করি নি কারণ আমাদের স্বীকার্য অনুযায়ী প্রত্যেক বস্তুকণার মোট আধানের পরিমাণ কাঠামো নিরপেক্ষ।

এখন আমরা যদি একটি জাড্যিক কাঠামো S নিই যেখানে আহিত কণাগুলি স্থির তা হলে সেটি S কাঠামোর সাপেক্ষে **u** বেগে গতিশীল হবে। মনে করা যাক যে, উপরোক্ত আহিত কণাগুলির আয়তন $V_0$ এবং $n_0$ এক ঘন মিটার আয়তনে আহিত কণার সংখ্যা। তা হলে $V_0$ আরতনের মোট আধান হবে $n_0 V_0$। দৈর্ঘ্য সঙ্কোচনের ফলে এই আহিত কণাগুলির আয়তন S কাঠামোয় হবে

$$V = V_0(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$$

অতএব S কাঠামোয় মোট আধানের পরিমাণ হবে

$$nV = nV_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} = n_0 V_0$$

অর্থাৎ
$$n = n_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2} \qquad (6-31)$$

অনুরূপে S′ কাঠামোয়

$$n' = n_0 / \sqrt{1 - u'^2/c^2} \qquad (6-32)$$

অতএব
$$n' = n \sqrt{\frac{1 - u^2/c^2}{1 - u'^2/c^2}} \qquad (6-33)$$

সমীকরণ (3—58) থেকে পাওয়া যায়

$$\sqrt{\frac{1-u^2/c^2}{1-u'^2/c^2}}=\frac{1-vu_x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (6-34)$$

সমীকরণ (6—33) এ প্রতিস্থাপন করলে পাওয়া যায়

$$n'=\frac{n(1-vu_x/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma n(1-vu_x/c^2) \qquad (6-35)$$

$q$ দ্বারা গুণ করলে পাই

$$qn'=\gamma\left(qn-\frac{vq\ nu_x}{c^2}\right)$$

সমীকরণ (6-27) ও (6-28) এ প্রতিস্থাপন করলে পাই

$$\rho'=\gamma(\rho-vJ_x/c^2) \qquad (6-36)$$

বেগের রূপান্তর সূত্র (3-57$a$) অনুযায়ী

$$u_x'=\frac{(u_x-v)}{1-vu_x/c^2}$$

$u_x'$ এর এই মান এবং সমীকরণ (6-35) থেকে $n'$-এর মান সমীকরণ (6-30) এ প্রতিস্থাপন করলে পাওয়া যায়

$$j_x'=qu_x'\ n'=\frac{q(u_x-v)}{1-\frac{vu_x}{c^2}}\ n\gamma(1-vu_x/c^2)$$

সমীকরণ (6-27) ও (6-28) থেকে প্রতিস্থাপন করলে পাওয়া যায়

$$j_x'=\gamma(j_x-v\rho) \qquad (6-37)$$

সমীকরণ (3-57b) থেকে পাই

$$u_y'=\frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vu_x/c^2}.$$

$u_y'$ এবং $n'$ এর মান প্রতিস্থাপন করলে সমীকরণ (6·30) থেকে পাওয়া যায়

$$j_y'=qu_y'n'=qu_y\ \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vu_x/c^2}\ n\gamma\left(\frac{vu_x}{c^2}\right)=j_y \qquad (6-38)$$

অনুরূপে $\qquad j_z'=j_z \qquad (6-39)$

এতক্ষণ আমরা একটা সহজ উদাহরণ নিয়ে আধান ও প্রবাহ ঘনত্বের রূপান্তর সূত্র নির্ণয় করেছি। বাস্তব ক্ষেত্রে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় প্রকারের আহিত কণা থাকে এবং বিভিন্ন কণার বেগের বিভিন্ন মান হয়। মনে করা যাক যে,

এক ঘনমিটার আয়তনের মধ্যে $+q$ কুলম্ব আধানযুক্ত এবং u বেগসম্পন্ন আহিত কণার সংখ্যা $n_+(\mathbf{u})$, অনুরূপে $-q$ কুলম্ব আধানযুক্ত এবং u বেগসম্পন্ন আহিত কণার সংখ্যা $n_-(\mathbf{u})$। অতএব সংজ্ঞা অনুযায়ী আধান ও প্রবাহ ঘনত্ব হবে

$$\rho = \sum_{\mathbf{u}} q[n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})] \qquad (6-40)$$

$$j_x = \sum_{\mathbf{u}} q[n_+(\mathbf{u})u_x - n_-(\mathbf{u})u_x] \text{ ইত্যাদি} \qquad (6-41)$$

এখানে u এর প্রত্যেকটি মানের জন্য সমষ্টি নেওয়া হয়েছে। যদি দ্বিগুণ আধানসম্পন্ন আয়ন u বেগে গতিশীল হয় তা হলে তাদের দু'টি একক আধান সম্পন্ন কণা বলে ধরা যায়। প্রবাহ ঘনত্বের এই মানের মধ্যে পরিবহন ও সঞ্চালন উভয়প্রকারের প্রবাহই ধরা হয়েছে। $\rho$ শূন্য হলেও j এর মান শূন্য না হতে পারে। যদি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আয়নগুলি ভিন্ন বেগে গতিশীল হয়, এটি হবে সঞ্চালন প্রবাহ।

অনুরূপে S′ কাঠামোয়

$$\rho' = \sum_{\mathbf{u}'} q[n'_+(\mathbf{u}') - n'_-(\mathbf{u}')] \qquad (6-42)$$

$$j_x' = \sum_{\mathbf{u}'} q[n_+'(\mathbf{u}')u_x' - n'_-(\mathbf{u}')u_x'] \text{ ইত্যাদি} \qquad (6-43)$$

সমীকরণ (6-35) অনুযায়ী

$$n_+'(\mathbf{u}') = n_+(\mathbf{u})\gamma(1 - vu_x/c^2)$$

$$\text{এবং } n_-'(\mathbf{u}') = n_-(\mathbf{u})\gamma(1 + vu_x/c^2)$$

সমীকরণ (6-42) এ প্রতিস্থাপন করে পাওয়া যায়

$$\rho' = \sum_{\mathbf{u}} q\gamma[n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})](1 - vu_x'/c^2)$$

$$= \gamma\left\{\sum_{\mathbf{u}} q[n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})] - \frac{v}{c^2}\sum_{\mathbf{u}} q[n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})]u_x\right\} \qquad (6-44)$$

সমীকরণ (6-40) এবং (6-41) থেকে প্রতিস্থাপন করলে পাওয়া যায়

$$\rho' = \gamma\left[\rho - \frac{v}{c^2}j_x\right]$$

এটি সমীকরণ (6-36) এর সঙ্গে অভিন্ন। এখন

$$j_x' = \sum_{\mathbf{u}'} q[n'_+(\mathbf{u}') - n'_-(\mathbf{u}')]u_x'$$

$$= \sum_{\mathbf{u}} q\gamma[n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})](1 - vu_x/c^2)\ \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}$$

সরল করে পাই

$$j'_x = \gamma(j_x - v\rho)$$

এটি সমীকরণ (6-37) এর সঙ্গে অভিন্ন।

অনুরূপে সাধারণভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $j_y' = j_y$ এবং $j_z' = j_z$.

রূপান্তর সূত্রগুলিকে একত্র করলে দাঁড়ায়

$$\left.\begin{array}{llll} j_x' = \gamma(j_x - v\rho) & (a) & j_x = \gamma(j_x' + v\rho') & (e) \\ j_y' = j_y & (b) & j_y = j_y' & (f) \\ j_z' = j_z & (c) & j_z = j_z' & (g) \\ \rho' = \gamma\left(\rho - \dfrac{v j_x}{c^2}\right) & (d) & \rho = \gamma\left(\rho' + \dfrac{v j_x'}{c^2}\right) & (h) \end{array}\right\} \quad (6\text{—}45)$$

একটি চতুর্মাত্রিক ভেক্টরের রূপান্তর সূত্র (4-76$a$) এর সঙ্গে তুলনা করলে দেখা যায় যে, আমরা একটি চতুর্মাত্রিক ভেক্টর $j_\alpha$ এর সংজ্ঞা এইভাবে দিতে পারি :

$$j_1 = j_x,\ j_2 = j_y,\ j_3 = j_z,\ j_4 = ic\rho \qquad (6\text{—}46)$$

এটিকে বলা হয় চতুর্মাত্রিক প্রবাহ ঘনত্ব ভেক্টর বা চার-প্রবাহ ঘনত্ব।

**6-3. D এবং H এর রূপান্তর সমীকরণ :** আমরা দেখেছি যে, ম্যাক্সওয়েলের দু'টি সমীকরণ (6-1$a$) এবং (6-1$d$) লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় এবং তা থেকে D এবং H এর রূপান্তর সূত্র নির্ণয় করব। সমীকরণ (6-1$b$ ও $c$) এর উপাংশগুলি হল

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial D_x}{\partial t} = j_x \qquad (6\text{—}47)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial D_y}{\partial t} = j_y \qquad (6\text{—}48)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial D_z}{\partial t} = j_z \qquad (6\text{—}49)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \qquad (6\text{—}50)$$

সমীকরণ (6-5) ও (6-45) ব্যবহার করলে সমীকরণ (6-48) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)H_z - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)D_y = j_y'$$

অর্থাৎ $$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\gamma(H_z - vD_y) - \frac{\partial}{\partial t'}\gamma\left(D_y - \frac{v}{c^2}H_z\right) = j_y' \qquad (6-51)$$

S′ কাঠামোয় ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণের গাণিতিক রূপ এক হতে হলে

$$H_x' = H_x \qquad (6-52)$$

$$H_z' = \gamma(H_z - vD_y) \qquad (6-53)$$

$$D_y' = \gamma\left(D_y - \frac{v}{c^2}H_z\right) \qquad (6-54)$$

অনুরূপে (6-5) ও (6-45) ব্যবহার করলে সমীকরণ (6-49) থেকে পাওয়া যায়

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y'} - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)D_z = j_z'$$

অথবা $$\frac{\partial}{\partial x'}\gamma(H_y + vD_z) - \frac{\partial H_x}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial t'}\gamma\left(D_z + \frac{v}{c^2}H_y\right) = j'_z \qquad (6-55)$$

যদি S′ কাঠামোয় ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণের গাণিতিক রূপ অপরিবর্তিত থাকে তা হলে

$$\frac{\partial H_y'}{\partial x'} - \frac{\partial H_x'}{\partial y'} - \frac{\partial D_z'}{\partial t'} = j_z' \qquad (6-56)$$

সমীকরণ (6-55) ও (6-56) তুলনা করলে পাওয়া যায়

$$H_y' = \gamma(H_y + vD_z) \qquad (6-57)$$

$$H_x' = H_x \qquad (6-58)$$

$$D_z' = \gamma\left(D_z + \frac{v}{c^2}H_y\right) \qquad (6-59)$$

সমীকরণ (6-53) ও (6-57) এর বিপরীত সমীকরণগুলি হবে

$$H_z = \gamma(H_z' + vD_y')$$

$$H_y = \gamma(H_y' - vD_z')$$

এখন (6-5), (6-45) ও (6-47) থেকে পাই

$$\frac{\partial}{\partial y'}\gamma(H_z' + vD_y') - \frac{\partial}{\partial z'}\gamma(H_y' - vD_z') - \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)D_x = \gamma(j_x' + v\rho')$$

রাশিগুলি সাজিয়ে লিখলে দাঁড়ায়

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x'}+\frac{\partial D_y'}{\partial y'}+\frac{\partial D_z'}{\partial z'}-\rho'\right)=-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial H_z'}{\partial y'}-\frac{\partial H_y'}{\partial z'}-\frac{\partial D_x}{\partial t'}\right) \quad (6—60)$$

সমীকরণ (6-54) ও (6-59) এর বিপরীত সূত্রগুলি হবে যথাক্রমে

$$D_y=\gamma\left(D_y'+\frac{v}{c^2}H_z'\right)$$

অনুরূপে $D_z=\gamma\left(D_z'-\frac{v}{c^2}H_y'\right)$

সমীকরণ (6-5), (6-45) এবং (6-50) থেকে পাওয়া যায়

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)D_x+\frac{\partial}{\partial y'}\gamma\left(D_y'+\frac{v}{c^2}H_z'\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(D_z'-\frac{v}{c^2}H_y'\right)$$
$$=\gamma\left(\rho'+\frac{v}{c^2}j_x'\right)$$

রাশিগুলি সাজিয়ে এবং $\gamma$ কেটে দিয়ে লেখা যায় :

$$\left(\frac{\partial Dx}{\partial x'}+\frac{\partial D_y'}{\partial y'}+\frac{\partial D'_z}{\partial z'}-\rho'\right)=-\frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial H_z'}{\partial y'}-\frac{\partial H'_y}{\partial z'}-j_x'-\frac{\partial Dx}{\partial t'}\right) \quad (6—61)$$

সমীকরণ (6—61) ও (6—62) তুলনা করে আমরা পাই, যেহেতু $v$ $c$-এর সমান নয় :

$$\frac{\partial D_x}{\partial x'}+\frac{\partial D_y'}{\partial y'}+\frac{\partial D_z'}{\partial z'}=\rho' \quad (6—62)$$

এবং $$\frac{\partial H_z'}{\partial y'}-\frac{\partial H_y'}{\partial z'}-\frac{\partial D_x}{\partial t'}=j_x' \quad (6—63)$$

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি যদি S' কাঠামোয় অপরিবর্তিত থাকে তা হলে

$$\frac{\partial D_x'}{\partial x'}+\frac{\partial D_y'}{\partial y'}+\frac{\partial D_z'}{\partial z'}=\rho' \quad (6—64)$$

এবং $$\frac{\partial H_z'}{\partial y'}-\frac{\partial H_y'}{\partial z'}-\frac{\partial D_x'}{\partial t'}=j_x' \quad (6—65)$$

সমীকরণ (6—62) ও (6—64) অভিন্ন হলে

$$D_x=D_x' \quad (6—66)$$

সব রূপান্তর সমীকরণগুলিকে একত্র করলে দাঁড়ায়

$$\left.\begin{array}{llll} D_x'=D_x & (a) & D_x=D_x' & (d) \\ D_y'=\gamma\left(D_y-\frac{v}{c^2}H_z\right) & (b) & D_y=\gamma\left(D_y'+\frac{v}{c^2}H_z'\right) & (e) \\ D_z'=\gamma\left(D_z+\frac{v}{c^2}H_y\right) & (c) & D_z=\gamma\left(D_z'-\frac{v}{c^2}H_y'\right) & (f) \end{array}\right\} \quad (6-67)$$

$$\left.\begin{array}{llll} H_x'=H_x & (a) & H_x=H_x' & (d) \\ H_y'=\gamma(H_y+vD_z) & (b) & H_y=\gamma(H_y'-vD_z') & (e) \\ H_z'=\gamma(H_z-vD_y) & (c) & H_z=\gamma(H_z'+vD_y') & (f) \end{array}\right\} \quad (6-68)$$

অর্থাৎ ভেক্টর সমীকরণগুলি হবে

$$D'_{\parallel}=\left(D+\frac{1}{c^2}v'\times H\right) \quad \text{এবং } D'_{\perp}=\gamma\left(D+\frac{1}{c^2}v\times H\right)_{\perp} \quad (6-69)$$

$$\text{এবং } H'_{\parallel}=(H-v\times D)_{\parallel} \quad \text{এবং } H'_{\perp}=\gamma(H-v\times D)_{\perp} \quad (6-70)$$

কাজেই উপরের আলোচনায় আমরা দেখলাম যে, তড়িৎ আধানের কাঠামো নিরপেক্ষতাকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে ধরলে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি লোরেন্টস্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়। বস্তুর অস্তিত্ব থাকুক আর না থাকুক একথা সত্য। অতএব ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বের প্রথম স্বীকার্যের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ। কিন্তু আমরা দেখেছি যে, নিউটনের বলবিদ্যার সূত্রগুলির সঙ্গে প্রথম স্বীকার্যের অসঙ্গতি ছিল বলে সেগুলির পরিবর্তন করতে হয়েছিল। আইনষ্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কারের মাত্র এক বছর পূর্বে লোরেন্টস্ E, B, D ও H এর রূপান্তর সমীকরণ (6-21), (6-22), (6-67) ও (6-68) ধরে নিয়ে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণের অপরিবর্তনীয়তা থেকে দেশকালের রূপান্তর প্রমাণ করেন। কিন্তু তিনি বুঝতে পারেন নি যে, $x'$ বা $t'$ এর সঙ্গে প্রকৃত দৈর্ঘ্য ও কালের পরিমাপের কোন সম্পর্ক আছে। পোয়াঁকারে প্রথম এই সমীকরণগুলিকে 'লোরেন্টস্ রূপান্তর সমীকরণ' আখ্যা দেন।

**5-4. শূন্যস্থানে তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্র টেন্সর ঃ** শূন্যস্থানে, যেখানে বস্তুর অস্তিত্ব নেই সেখানে $D=\epsilon_0 E$ ··· (6—71)

এবং $B=\mu_0 H$ ··· (6—72)

যেখানে $\epsilon_0$ এবং $\mu_0$ যথাক্রমে শূন্যস্থানের অপরিবাহিতা ধ্রুবক ও চুম্বকীয় প্রবেশ্যতা। তা ছাড়া $\epsilon_0\mu_0=1/c^2$। সমীকরণ (6-21) ও (6-67) তুলনা

করলে দেখা যায় যে, সেগুলি অভিন্ন। অনুরূপে সমীকরণ (6-22) এবং (6-68) অভিন্ন। শূন্যস্থান না হলে অর্থাৎ বস্তুর অস্তিত্ব থাকলে (6-22) এবং (6-68) অভিন্ন হবে না।

যেহেতু ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি লোরেন্ট্স্ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় এই সমীকরণগুলিকে মিনকভ্স্কি ভেক্টর ও টেন্সরের সমীকরণ হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব হবে। এখন মিনকভ্স্কি জগতের মত (চতুর্থ-পরিচ্ছেদ) $x$, $y$, $z$ ও $ict$-র পরিবর্তে $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ লিখলে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ (6-1b) কে লেখা যায়

$$\frac{\partial H_z}{\partial x_2}-\frac{\partial H_y}{\partial x_3}-\frac{\partial (ic\, D_x)}{\partial x_4}=j_x$$

শূন্যস্থানে অথবা যে মাধ্যমে সমীকরণ (6-71) থেকে (6-73) প্রায় সত্য সেখানে আমরা উপরিলিখিত সমীকরণকে $\mu_0$ দ্বারা গুণ করলে পাই

$$\frac{\partial B_z}{\partial x_2}-\frac{\partial By}{\partial x_3}-\frac{\partial\left(i\dfrac{E_x}{c}\right)}{\partial x_4}=\mu_0\, j_x \qquad (a)$$

অন্য উপাংশগুলি হবে

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x_1}+\frac{\partial B_x}{\partial x_3}-\frac{\partial\left(i\dfrac{E_y}{c}\right)}{\partial x_4}=\mu_0\, j_y \qquad (b)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x_1}-\frac{\partial B_x}{\partial x_2}-\frac{\partial\left(i\dfrac{E_z}{c}\right)}{\partial x_4}=\mu_0\, j_z \qquad (c)$$

সমীকরণ (6-1c) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial\left(i\dfrac{E_x}{c}\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(i\dfrac{E_y}{c}\right)}{\partial x_2}+\frac{\partial\left(i\dfrac{E_z}{c}\right)}{\partial x_3}=i\mu_0\, c\rho \qquad (d)$$

(6—74)

সমীকরণ (6-74) থেকে দেখা যায় যে, তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রের তড়িৎ ও চুম্বকীয় ক্ষেত্র ভেক্টরের উপাংশগুলিকে নিয়ে একটি অপ্রতিসম দ্বিতীয় শ্রেণীর চার-টেন্সর $F_{\mu\nu}$ গঠন করা যায় যার উপাংশগুলি নিচে দেওয়া হল।

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} O & B_z & -B_y & -\dfrac{iE_x}{c} \\ -B_z & O & B_x & -\dfrac{iE_y}{c} \\ B_y & -B_x & O & -\dfrac{iE_z}{c} \\ \dfrac{iE_x}{c} & \dfrac{iE_y}{c} & \dfrac{iE_z}{c} & O \end{bmatrix} \qquad (6—75)$$

সমীকরণ (6-74) এর ডানদিকের রাশিগুলি তড়িৎ প্রবাহ চার ভেক্টর $\mu_0 j_\mu$ গঠন করে ( সমীকরণ 6-46 দেখুন )। অতএব ম্যাক্সওয়েলের দুটি সমীকরণ (6-1 $b$ ও $c$) কে নিম্নলিখিত মিনকভ্স্কি ভেক্টর ও টেন্সরের সমীকরণ হিসাবে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu \qquad (6-76)$$

এখানে $\nu$ এর চারটি মান 1, 2, 3, 4 এর উপর সমষ্টি নেওয়া হয়েছে।

আমরা দেখলাম যে, তড়িৎ ক্ষেত্র ভেক্টর ও চৌম্বক ক্ষেত্র ভেক্টরকে মিলিত করে তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্র টেন্সর গঠন করা হয়েছে অর্থাৎ তড়িৎ ও চুম্বকীয় ক্ষেত্রের এখন আর কোন স্বাতন্ত্র্য রহিল না। এটা এইভাবে সহজেই বোঝা যায়। মনে করা যাক যে, S কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির কতকগুলি আহিত বস্তুকণা আছে কিন্তু কোন তড়িৎ প্রবাহ বা চৌম্বক ক্ষেত্র নেই। ফলে S কাঠামোর নিরীক্ষক মনে করবে যে, তার চারদিকে শুধু তড়িৎস্থিতীয় ক্ষেত্র আছে। S কাঠামোর $x$ অক্ষের দিকে অবিচল $v$ বেগে গতিশীল S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে মনে হবে যে, ঐ আহিত কণাগুলি $x$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকে $v$ বেগে ছুটে চলেছে। কাজেই সে কতকগুলি তড়িৎপ্রবাহের অস্তিত্ব দেখবে। যেহেতু তড়িৎপ্রবাহ চৌম্বক ক্ষেত্রের সৃষ্টি করে অতএব S′ কাঠামোর নিরীক্ষক দেখবে যে, তড়িৎ ও চৌম্বক উভয় ক্ষেত্রই আছে। এটা সমীকরণ (6-21) ও (6-22) থেকে স্পষ্ট। S কাঠামোয় শুধু তড়িৎ বা শুধু চৌম্বক ক্ষেত্র থাকলেও S′ কাঠামোয় উভয় ক্ষেত্রই থাকতে পারে। তা ছাড়া সমীকরণ (6-45) থেকে দেখা যায় যে, S কাঠামোয় $j_x = j_y = j_z = 0$ হলে

$$j_x' = -v\rho,\ j_y' = j_z' = 0 \text{ এবং } \rho' = \gamma\rho$$

যেহেতু আহিত কণাগুলিকে S′ কাঠামোয় $x$ অক্ষের ঋণাত্মক দিকে $v$ বেগে গতিশীল বলে মনে হবে অতএব প্রবাহের $x'$ অক্ষের উপাংশ লোরেন্ট্স্ ইলেকট্রন তত্ত্ব অনুযায়ী হবে $-v\rho$। তড়িৎ আধানের ঘনত্ব S′ কাঠামোয় $\gamma\rho$ হবে। S′ কাঠামোয় আয়তন হবে $\frac{V_0}{\gamma}$ কাজেই মোট আধান হবে $\gamma\rho.\frac{V_0}{\gamma} = V_0\rho$। অতএব আমাদের স্বীকার্য অনুযায়ী মোট আধান কাঠামো নিরপেক্ষ।

$x_\nu$ এর সাপেক্ষে ব্যবকলনকে আমরা কমা দ্বারা সূচিত করতে পারি। অতএব সমীকরণ (6-76) কে নিম্নলিখিতরূপে লিখতে পারি ঃ

$$F_{\mu\nu,\,\nu}=\mu_0\, j_\mu \qquad (6\text{-}76a)$$

আমরা বলেছি যে, $F_{\mu\nu}$ একটি দ্বিতীয় শ্রেণীর চার-টেন্সর কিন্তু তার কোন প্রমাণ দিই নি। সমীকরণ (4-75) এ আমরা এই ধরণের টেন্সরের রূপান্তর সূত্র দিয়েছি। এখন দেখা দরকার যে, $F_{\mu\nu}$ এর উপাংশগুলি সত্য সত্যই এই সূত্রানুযায়ী রূপান্তরিত হয় কি না। আমরা এখন থেকে ল্যাটিন অক্ষরগুলি প্রথম তিনটি সংখ্য (1, 2, 3) এর জন্য এবং গ্রীক অক্ষর-গুলি (1, 2, 3, 4) এর জন্য ব্যবহার করব। তা হলে লেখা যায়

$$\left.\begin{aligned} F_{mn}' &= C_{mi}\, C_{nk}\, F_{ik} + (C_{mi}\, C_{n4} - C_{m4}\, C_{ni})F_{i4} \quad (a)\\ F_{m4}' &= C_{mi}\, C_{4k}\, F_{ik} + (C_{mn}\, C_{44} - C_{m4}\, C_{4i})F_{i4} \quad (b)\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}77)$$

যেখানে $C_{\alpha\beta}$ সমীকরণ (4-73) থেকে পাওয়া যায়

$$C_{\alpha\beta}=\begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$$

সমীকরণ (6—77$a$) থেকে পাওয়া যায়

$$F_{12}'=C_{11}\, C_{22}\, F_{12}-C_{14}\, C_{22}\, F_{24}=\gamma(F_{12}-i\beta\, F_{24})$$

অতএব

$$B_z'=\gamma\left(B_z-\frac{vE_y}{c^2}\right)$$

এটি সমীকরণ (6-22$c$) এর সঙ্গে অভিন্ন। $F_{\mu\nu}$ এর অন্য উপাংশগুলির রূপান্তর থেকে (6-22) এর অন্য সমীকরণগুলি পাওয়া যায়। অনুরূপে (6-77$b$) ব্যবহার করে (6-21) পাওয়া যায়। এইভাবে আমরা দেখলাম যে, $F_{\mu\nu}$ একটি দ্বিতীয় শ্রেণীর চার টেন্সর।

এবার সমীকরণ (6-1$a$) কে লেখা যায় ঃ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x_2}-\frac{\partial E_y}{\partial x_3}+\frac{\partial(icB_x)}{\partial x_4}&=0 \quad (a)\\ -\frac{\partial E_z}{\partial x_1}+\frac{\partial E_x}{\partial x_3}+\frac{\partial(icB_y)}{\partial x_4}&=0 \quad (b)\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}78)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x_1}-\frac{\partial E_x}{\partial x_2}+\frac{\partial(icB_z)}{\partial x_4}=0 \quad (c)$$

অনুরূপে সমীকরণ (6-1$a$) কে লেখা যায় ঃ

$$\frac{\partial(icB_x)}{\partial x_1}+\frac{\partial(icB_y)}{\partial x_2}+\frac{\partial(icB_z)}{\partial x_3}=0 \quad (d) \qquad (6-78)$$

পূর্বের মত আমরা যদি অপর একটি অপ্রতিসম টেন্সর $G_{\mu\nu}$ নিই যার উপাংশগুলি নিচে দেওয়া হল ঃ

$$G_{\mu\nu}=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} & -iB_x \\ \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} & -iB_y \\ -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 & -iB_z \\ iB_w & iB_y & iB_z & 0 \end{vmatrix} \qquad (6-79)$$

'তা হলে সমীকরণ (6-78) কে চার টেন্সর সমীকরণ হিসাবে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায় ঃ

$$G_{\mu\nu,\,\nu}=0 \qquad (6-80)$$

কিন্তু $G_{\mu\nu}$ টেন্সর $F_{\mu\nu}$ এর অনধীন নয়। আমরা লিখতে পারি

$$G_{\mu\nu}=\frac{1}{i2!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F_{\rho\sigma} \qquad (6-81)$$

যেখানে $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ বিন্যাস প্রতীক বা লেভি সিভিটা (Levi Civita) প্রতীক। এটি প্রত্যেকটি পাদাঙ্কের সাপেক্ষে অপ্রতিসম এবং $\epsilon_{1234}=1$, কাজেই পাদাঙ্ক 1234 এর যুগ্মসংখ্যক বিন্যাসের ফলে যে উপাংশগুলি পাওয়া যায় সেগুলির মান +1 এবং অযুগ্ম সংখ্যক বিন্যাসলব্ধ উপাংশের মান −1। যে কোন দুটি পাদাঙ্ক সমান হলে মান হবে 0. মিনকভ্স্কি জগতে প্রমাণ করা যায়, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ একটি চতুর্থ শ্রেণীর টেন্সর।

উদাহরণ স্বরূপ

$$G_{12}=-\frac{E_z}{c}=\frac{1}{2i}(\epsilon_{1234}\,F_{34}+\epsilon_{1243}\,F_{43})$$

$$=\frac{1}{2i}(1.F_{34}-1.F_{43})=\frac{F_{34}}{i} \qquad (6-82)$$

$G_{\mu\nu}$ কে $F_{\mu\nu}$ এর দৈবত টেন্সর বলা হয়।

এখন আমরা সব ক'টি ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণকে $F_{\mu\nu}$ টেন্সরের সম্পর্ক হিসাবে প্রকাশ করতে পারি। সমীকরণ (6-80) এ $\mu=1$ লিখলে পাই

$$\frac{\partial G_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial G_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial G_{14}}{\partial x_4}=-i\left(\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}\right) \quad (6\text{—}83)$$

সাধারণভাবে $\mu$ এর যে কোন মানের জন্য সমীকরণ (6-80) কে এইভাবে লেখা যায়ঃ

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0 \quad (6\text{—}84)$$

অথবা নূতন পদ্ধতিতে লেখা যায়ঃ

$$F_{\mu\nu,\,\lambda}+F_{\nu\lambda,\,\mu}+F_{\lambda\mu,\,\nu}=0 \quad (6\text{—}83a)$$

কাজেই ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলিকে $F_{\mu\nu}$ এর সাহায্যে চতুর্মাত্রিক সমীকরণ (6-76) এবং (6-84) দ্বারা সম্পূর্ণভাবে প্রকাশ করা যায়। লক্ষণীয় যে, সমীকরণ (6-84) এ পাদাঙ্ক $\mu$, $\nu$ ও $\lambda$ এর মধ্যে চক্রীয় বিন্যাস করা হয়েছে।

## 6-5. স্কেলার ও ভেক্টর বিভবের রূপান্তরঃ

সমীকরণ (6-1$d$) থেকে বোঝা যায় যে চুম্বক ক্ষেত্র **B** এর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট চুম্বকীয় বিভব ভেক্টর আমরা সব সময় নির্ণয় করতে পারি নিম্নলিখিত সমীকরণের সাহায্যেঃ

$$\mathbf{B}=\text{curl }\mathbf{A} \quad (6\text{—}85)$$

এখন সমীকরণ (6-1$a$) তে **B** এর মান উপরের সমীকরণ থেকে প্রতিস্থাপিত করলে পাওয়া যায়

$$\text{curl }\left(\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$$

অতএব $\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ কে কোন স্কেলারের গ্র্যাডিয়েন্ট হিসাবে লেখা যায়। কাজেই স্কেলার বিভব $\phi$ এর সংজ্ঞা হিসাবে লিখতে পারি।

$$\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-\text{ grad }\phi$$

অর্থাৎ $$\mathbf{E}=-\text{ grad }\phi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6\text{—}86)$$

উপরের সমীকরণ থেকে E এর মান সমীকরণ (6-1$c$) তে প্রতিস্থাপিত করলে পাই

$$-\nabla^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}\,(\text{div}\,\mathbf{A})=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6—87}$$

অতএব

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6—88}$$

$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)$ সংকারককে $\Box^2$ চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয় এবং এর নাম বাক্স সংকারক (box operator)। সমীকরণ (6-88) কে নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায় ঃ

$$\Box^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6—88a}$$

সমীকরণ (6-85), (6-86) এবং 6 1$b$) থেকে পাই

$$\frac{1}{\mu_0}\,\text{curl curl}\,\mathbf{A}+\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{grad}\,\phi+\frac{\partial A}{\partial t}\right)=\mathbf{j}$$

অর্থাৎ $\text{grad div}\,\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{grad}\,\phi+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\mu_0\mathbf{j}$

অতএব $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{A}+\text{grad}\left(\text{div}\,\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\mu_0\,\mathbf{j}$ (6—89)

অর্থাৎ $\Box^2\,\mathbf{A}+\text{grad}\left(\text{div}\,\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\mu_0\,\mathbf{j}$ (6—89$a$)

চুম্বক ক্ষেত্র ভেক্টর জানা থাকলে সমীকরণ (6-85) এর সাহায্যে চুম্বকীয় বিভব ভেক্টর নির্ণয় করা হয়। কিন্তু এই সমীকরণের কোন সমাধানই অদ্বিতীয় নয়। যে কোন সমাধান A এর সঙ্গে কোন স্কেলারের গ্র্যাডিয়েন্ট যোগ করলে B এর মান অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}&=\mathbf{A}-\text{grad}\,\psi\\ \bar{\phi}&=\phi+\partial\psi/\partial t\end{aligned}\right\} \tag{6—90}$$

লিখলে E ও B এর মানের কোন পরিবর্তন হয় না। ভেক্টর বিভব A র এই ধরণের পরিবর্তনকে গেজ রূপান্তর (gauge transformation) বলা হয়। তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রকে গেজ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় বলা হয়। কাজেই A র মান নির্ণয়ের ব্যাপারে আমাদের খানিকটা স্বাধীনতা আছে।

কাজেই **A** র ডাইভার্জেন্সের (divergence) উপর আমরা শর্ত আরোপ করতে পারি। সমীকরণ (6-88$a$) ও (6-89$a$) কে সরল করার জন্য আমরা **A** র উপর নিম্নলিখিত শর্ত আরোপ করি

$$\text{div } \mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad (6\text{—}91)$$

একে বলা হয় লোরেণ্ট্‌স্‌ শর্ত (Lorentz condition)। এখন সমীকরণ (6-88$a$) ও (6-89$a$) র রূপ দাঁড়ায়

$$\Box^2 \phi=\rho/\epsilon_0 \qquad (6\text{—}92a)$$

$$\Box^2\mathbf{A}=\mu_0\,\mathbf{j} \qquad (6\text{—}92b)$$

শূন্যস্থানে তড়িৎ আধান ও তড়িৎ প্রবাহের ঘনত্ব শূন্য হলে

$$\Box^2 \phi=0 \qquad (6\text{—}92c)$$

$$\Box^2 \mathbf{A}=0 \qquad (6\text{—}9.d)$$

সমীকরণ (6-5) থেকে পাই

$$\frac{\partial}{\partial x}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'},\ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

অতএব

$$\Box^2=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2-\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial y'^2}-\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

যেহেতু $\dfrac{\partial^2}{\partial t'\partial x'}=\dfrac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}$,

$$\Box^2=\frac{\gamma^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-\frac{\partial^2}{\partial y'^2}-\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

$$=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-\frac{\partial^2}{\partial y'^2}-\frac{\partial^2}{\partial z'^2}=\Box'^2 \qquad (6\text{—}93)$$

সমীকরণ (6-45 $h$), (6-93) এবং (6-92$a$) থেকে পাই

$$\Box'^2\phi=\frac{\gamma}{\epsilon_0}\left(\rho'+\frac{v j_x'}{c^2}\right) \qquad (6-94)$$

অনুরূপে (6-45 $e-g$), (6-93) এবং (6-92$b$) থেকে পাই

$$\Box'^2 A_x = \mu_0 \gamma (j_x' + v\rho') \qquad (6-95)$$

$$\Box'^2 A_y = \mu j_y' \qquad (6-96)$$

$$\Box'^2 A_z = \mu_0 j_z' \qquad (6-97)$$

সমীকরণ (6 − 95) কে $v$ দিয়ে গুণ করে (6-94) থেকে বিয়োগ দিলে পাওয়া যায়

$$\Box'^2 (\phi - vA_x) = \frac{\gamma}{\epsilon_0}\left(\rho' + \frac{vj_x'}{c^2}\right) - v\mu_0\gamma (j_x' + v\rho')$$

কিন্তু $1/\mu_0\epsilon = c^2$ অর্থাৎ $\mu_0 = 1/\epsilon c^2$

অতএব $\Box'^2(\phi - vA_x) = \frac{\gamma}{\epsilon_0}\left(\rho' + \frac{vj_x'}{c^2}\right) - \frac{v\gamma}{\epsilon c^2}(j_x' + v\rho')$

$$= \frac{\gamma}{\epsilon_0}[\rho'(1 - v^2/c^2)] = \frac{\rho'}{\gamma\epsilon_0}$$

যেহেতু $v$ এবং $\gamma$ ধ্রুবক অতএব

$$\Box'^2 \gamma (\phi - vA_x) = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \qquad (6-98)$$

সমীকরণ (6—94) কে $\frac{v}{c^2}$ দিয়ে গুণ করে (6—95) থেকে বিয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$\Box'^2\left(A_x - \frac{v}{c^2}\phi\right) = \mu_0\gamma (j_x' + v\rho') - \frac{v}{c^2}\frac{\gamma}{\epsilon_0}\left(\rho' + \frac{vj_x'}{c^2}\right)$$

এখন $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$

অতএব

$$\Box'^2\left(A_x - \frac{v}{c^2}\phi\right) = \mu_0\gamma\left(j_x' + v\rho' - v\rho' - \frac{v^2}{c^2}j'_x\right)$$

অর্থাৎ $\Box'^2 \gamma\left(A_x - \frac{v}{c^2}\phi\right) = \mu_0 j'_x \qquad (6-99)$

এই সমস্ত রূপান্তরিত সমীকরণগুলি একত্র করে লেখা যায়, তা ছাড়া আপেক্ষিকতা তত্ত্বের প্রথম স্বীকার্য অনুযায়ী সমীকরণগুলি অভিন্ন থাকবে।

অতএব

$$\square'^2 \gamma \left(A_x - \frac{v}{c^2}\phi\right) = -\mu_0 j_x' \qquad \square'^2 A_x = \mu_0 j_x'$$

$$\square'^2 A_y = \mu_0 j_y' \qquad \square'^2 A'_y = \mu_0 j_y'$$

$$\square'^2 A_z = \mu_0 j_z' \qquad \square'^2 A_z' = \mu_0 j_y'$$

$$\square'^2 (\phi - vA_x) = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \qquad \square'^2 \phi' = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$$

ডানদিকের ও বামদিকের সমীকরণগুলি অভিন্ন হলে ভেক্টর ও স্কেলার বিভবের রূপান্তর সূত্র হবে ঃ

$$\left.\begin{aligned} A_x' &= \gamma\left(A_x - \frac{v}{c^2}\phi\right) && \text{(a)} \\ A_y' &= A_y && \text{(b)} \\ A_z' &= A_z && \text{(c)} \\ \phi' &= \gamma(\phi - vA_x) && \text{(d)} \end{aligned}\right\} \quad (6-100)$$

একটি চতুর্মাত্রিক ভেক্টরের রূপান্তর সূত্র (4-76$a$) এর সঙ্গে তুলনা করলে দেখা যায় যে, ভেক্টর ও স্কেলার বিভব মিলিয়ে একটি বিভব চার-ভেক্টর $\phi_\mu$ এর সংজ্ঞা দিতে পারা যায়।

$$\phi_1 = A_x,\ \phi_2 = A_y,\ \phi_3 = A_z,\ \phi_4 = \frac{i\phi}{c} \qquad (6-101)$$

পৃষ্ঠা ২৭৮ এ যে উদাহরণ দেওয়া হয়েছে তা থেকে স্পষ্ট যে, S কাঠামোর শুধু তড়িৎস্থিতীয় ক্ষেত্রে পরিলক্ষিত হবে, ফলে সেখানে চৌম্বক ভেক্টর বিভব $A=0$ বিভব $\phi \neq 0$। কিন্তু S′ কাঠামোর চৌম্বক ক্ষেত্রও পরিলক্ষিত হবে, অতএব $A \neq 0$, $\phi \neq 0$। উপরের আলোচনায় দেখা যাচ্ছে যে A এবং $\phi$ অনধীন রাশি নয়, এরা একটি চতুর্মাত্রিক ভেক্টরের বিভিন্ন উপাংশ। অতএব (6-92$a$) এবং (6-92$b$) সমীকরণ দুটিকে চার-ভেক্টর সমীকরণ হিসাবে লেখা যায়

$$\square^2 \phi_\mu = \mu_0 j_\mu \qquad (6-102)$$

এখন লোরেণ্টস্ শর্ত (1-31) কে চতুর্মাত্রিক ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$$\phi_{\mu,\,\mu} = 0 \qquad (6-103)$$

অনুরূপে বিভব চার ভেক্টর থেকে তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্র টেন্সর পাবার সমীকরণ হল

$$F_{\mu\nu}=\phi_{\nu,\,\mu}-\phi_{\mu,\,\nu} \qquad (6-104)$$

এই সমীকরণ থেকে (6-85) ও (6-86) পাওয়া যায়। সমীকরণ (6-104) থেকে স্পষ্ট যে, $F_{\mu\nu}$ অপ্রতিসম টেন্সর। পরিমাপ রূপান্তর চতুর্মাত্রিক জগতে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায়

$$\phi_{\mu}=\phi_{\mu}+\Phi_{,\mu} \qquad (6-105)$$

যেখানে $\Phi$ একটি স্কেলার রাশি এবং $\Phi_{,\mu}$ তার চতুর্মাত্রিক গ্র্যাডিয়েন্ট ( gradient )। (6-104) এ প্রতিস্থাপন করে সহজেই দেখান যায় যে $F_{\mu\nu}$ পরিমাপ রূপান্তরের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয়।

**6-6. তড়িৎচুম্বকীয় ক্ষেত্রের অপরিবর্তনীয় রাশি:** তড়িৎচুম্বকীয় ক্ষেত্র টেন্সর থেকে দু'টি অপরিবর্তনীয় রাশি অর্থাৎ স্কেলার রাশি গঠন করা যায়। একটি হচ্ছে

$$\tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2-\frac{E_x^2+E_y^2+E_z^2}{c^2}\right)$$

$$=(B^2-E^2/c^2) \qquad (6-106)$$

মনে রাখা দরকার যে, এখানে $\mu$ ও $\nu$ এর চারটি মানের জন্য সমষ্টি নেওয়া হয়েছে। অন্য স্কেলারটি গঠন করা যায় চতুর্থ শ্রেণীর টেন্সর $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ এবং $F_{\mu\nu}$ থেকে:

$$\frac{1}{8i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}G_{\mu\nu}=-\frac{1}{c}(E_xB_x+E\ B_y+$$

$$E_z\ B_z)=-\frac{E.B}{c} \qquad (6-107)$$

প্রমাণ করা যায় যে, তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রে এই দু'টির বেশী অপরিবর্তনীয় ( স্কেলার ) রাশি পাওয়া যায় না।

যেহেতু শূন্যস্থানে $B=\mu_0 H$ অতএব E.H অপরিবর্তনীয়। তড়িৎ চুম্বকীয় সমতল তরঙ্গের ক্ষেত্রে $E.H=0$। তা ছাড়া $B.H-D.E=0$, অতএব $B^2-\frac{E^2}{c^2}=\mu_0\ (B H-D.E)=0$। সমীকরণ ( 6-108 ) ও

(6-109) থেকে স্পষ্ট যে, একটি সমতল তির্যক তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ সকল জাড্যিক কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছেই সমতল তির্যক তড়িৎচুম্বকীয় তরঙ্গ বলে মনে হবে। লক্ষণীয় যে, তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রের শক্তি ঘনত্ব $\frac{1}{2}(\mathbf{H.B}+\mathbf{D.E})$ অপরিবর্তনীয় নয় এবং এর মান বিভিন্ন কাঠামোয় বিভিন্ন হবে। যদি $\mathbf{B.H}-\mathbf{D.E}\neq 0$ হয় কিন্তু $\mathbf{E.H}=0$ তা হলে এমন কাঠামো পাওয়া সম্ভব যেখানে E অথবা H শূন্য এবং হয় তড়িৎচুম্বকীয় ক্ষেত্রটিকে বিশুদ্ধ তড়িৎক্ষেত্র বলে মনে হবে (যখন $\mathbf{B.H}<\mathbf{D.E}$) অথবা বিশুদ্ধ চৌম্বক ক্ষেত্র বলে মনে হবে (যখন $\mathbf{B.H}>\mathbf{D.E}$)। যদি $\mathbf{E.H}\neq 0$ হয় তা হলে এমন কাঠামো পাওয়া সম্ভব যেখানে ভেক্টর E এর H ভেক্টরের সমকোণের দিকের উপাংশ শূন্য অর্থাৎ E এবং H পরস্পরের সমান্তরাল। S কাঠামোয় $\mathbf{H}=\mathbf{H}_\parallel+\mathbf{H}_\perp$ যেখানে $\mathbf{H}_\parallel$ E এর সমান্তরাল এবং $\mathbf{H}_\perp$ E এর সঙ্গে লম্ব। S′ কাঠামোয় E′ ও H′ সমান্তরাল অতএব

$$\mathbf{E.H}=\mathbf{E.H}_\parallel+\mathbf{E.H}_\perp=\mathbf{E.H}_\parallel=\mathbf{E}'.\mathbf{H}'$$

## আরও পড়ার জন্য সুপারিশ


1. W.G.V. Rosser : An Introduction to the Theory of Relativity (Butterworths 1964)
2. P.G. Bergmann : Introduction to the Theory of Relativity (Prentice Hall 1969)
3. J. Aharoni : The Special Theory of Relativity (Oxford Clarendon Press 1965)
4. S.N. Gupta : Theory of Relativity (Meenakshi Prakashan, Delhi).

# *সপ্তম পরিচ্ছেদ

## সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব

"কে জানত যে, পঞ্চাশ বছর পরে আমরা এত বেশী জানব কিন্তু তবু এত কম বুঝব।"

—আইনষ্টাইন।

**7-1. বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের পরিধি ঃ** বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বে কেবলমাত্র জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে পদার্থশাস্ত্রের সূত্রগুলির আলোচনা করা হয়েছে। এই তত্ত্ব অজাড্যিক কাঠামোর ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায় না। (1-2) বিভাগে আমরা দেখেছি যে, নিউটনীয় গতিসূত্রগুলি জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে ত্বরণশীল বা ঘূর্ণায়মান কাঠামোয় বলবৎ থাকে না। সেখানে কতকগুলি জাড্যিক বলের অস্তিত্ব কল্পনা করে নিতে হয়। আমরা ইতিপূর্বে বলবিদ্যা ও তড়িৎ গতিবিদ্যার সূত্রগুলিকে সমপরিবর্তনশীল রূপ দিয়েছি, অর্থাৎ এমনভাবে লিখেছি যাতে সকল জাড্যিক কাঠামোয় তাদের অভিন্ন গাণিতিক রূপ থাকে। আইনষ্টাইন এর পর চেষ্টা করতে লাগলেন, সেগুলিকে এমনভাবে লিখতে যাতে তারা অজাড্যিক কাঠামোতেও বলবৎ থাকে। একে বলা হয় সমপরিবর্তনশীলতার নীতি। জাড্যিক কাঠামোর ক্ষেত্রে তারা ইতিপূর্বে আলোচিত সমপরিবর্তনশীল রূপ নেবে অর্থাৎ মিনকভ্স্কি দেশ-কাল জ্যামিতির ভেক্টর ও টেন্সরের সাহায্যে প্রকাশ করা যাবে।

পদার্থশস্ত্রের সূত্রগুলিকে সকল কাঠামোয় সমপরিবর্তনশীল রূপ দেবার জন্য আইনস্টাইনকে সাধারণ টেন্সর শাস্ত্র শিখতে হয় এবং সেটা শিখে প্রয়োগ করতে তাঁর দশ বছর সময় লেগেছিল। এখানে আমাদের পক্ষে এই স্বল্প পরিসরে পুরো রীমানীয় জ্যামিতি ও তার জটিল গণিত নিয়ে আলোচনা করা সম্ভব নয়। আমরা এখানে খুব সংক্ষেপে পাঠকদের সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে একটু ধারণা দেবার চেষ্টা করব। অনুসন্ধিৎসু পাঠক এই পরিচ্ছেদের শেষে বই এর যে তালিকা দেওয়া হয়েছে সেগুলি পড়তে পারেন।

**7-2. তুল্যতার নীতি ঃ** মনে করা যাক যে, এক ব্যক্তি আমেরিকার কোন এক গগনচুম্বী অট্টালিকার উপরের তলা থেকে লিফ্টে নামবার সময় হঠাৎ দড়ি ছিঁড়ে গেল। লিফ্টটি আটকাবার অন্য কোন সতর্কতামূলক ব্যবস্থা না থাকায় সেটি যাত্রীকে নিয়ে সোজা নিচে দিকে পৃথিবীর অভিকর্ষ বলের

প্রভাবে পড়তে লাগল। লিফ্‌টের নিম্নমুখী গতি হবে সমত্বরিত এবং ত্বরণের মান হবে পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণ $g$ এর সমান। ফলে লিফ্‌টের স্থির কাঠামোর নিরীক্ষকের কাছে একটি পতনশীল বস্তুকে স্থির বলে মনে হবে। কাজেই সকল বস্তুকেই ভারশূন্য বলে মনে হবে। আইনষ্টাইন মহাকর্ষক্ষেত্রের এই বিশেষত্ব লক্ষ করেন। অন্য ধরণের ক্ষেত্রে, যথা তড়িৎক্ষেত্রে কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল ঐ বস্তুর তড়িৎ আধানের পরিমানের উপর নির্ভর করে। কিন্তু ঐ বস্তুর ত্বরণ নির্ভর করবে তার ভরের উপর।

$$a = eE/m \tag{7—1}$$

যেখানে $a$ ত্বরণ, $e$ আধান, E তড়িৎক্ষেত্রের তীব্রতা এবং $m$ ভর। মহাকর্ষ ক্ষেত্রে বস্তুর ভর আধানের কাজ করে কাজেই অভিকর্ষজনিত বল হবে $Mg$, এখানে M কে অভিকর্ষীয় ভর বলা যায়। ত্বরণের পরিমাণ যে ভরের উপর নির্ভর করে তাকে বলা যায় জাড্যিক ভর, অর্থাৎ এখানে

$$a = \frac{Mg}{m} \tag{7—2}$$

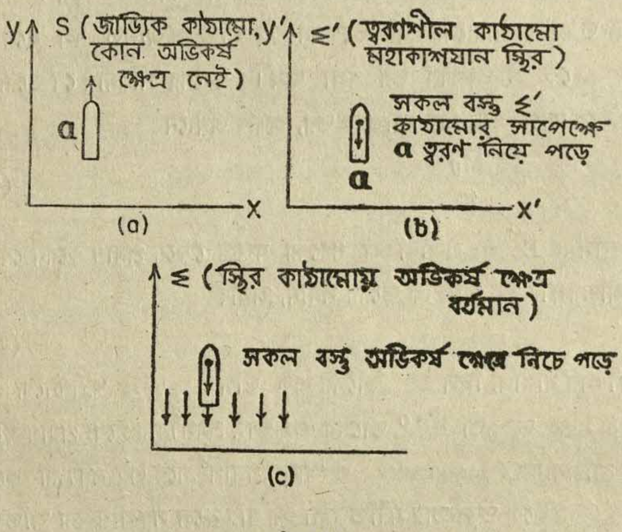
ইয়েটভ্যোস ( Eötvös ) বিভিন্ন ধরণের বস্তুর ক্ষেত্রে প্রমাণ করেন যে সকল ক্ষেত্রে অভিকর্ষীয় ভর জাড্যিক ভরের সমান, অর্থাৎ

$$M = m \tag{7—3}$$

এই পরীক্ষার যাথার্থ্য ছিল $10^8$ ভাগের এক ভাগ। 1975 খৃীষ্টাব্দে ডিকি ( Dicke ) এই তুল্যতা $10^{10}$ ভাগের এক ভাগ ভ্রমসীমার মধ্যে প্রমাণ করেন। এর পর ব্রাজিনস্কি ( Braginsky ) ও আরও যথার্থভাবে এই পরীক্ষা করেন। সমীকরণ (7-3) কে তুল্যতার নীতি বলা হয় যার ফলে সকল বস্তুর অভিকর্ষজ ত্বরণ সমান হবে কিন্তু তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্রে সকল বস্তুর ত্বরণ সমান নয়। তুল্যতার নীতির ফলে কোন বিশেষ দেশাঙ্কে আমরা সব সময় এমন একটি ত্বরণশীল কাঠামো বেছে নিতে পারি যার সাপেক্ষে অভিকর্ষ ক্ষেত্র শূন্য হবে। কিন্তু তড়িৎ বা চৌম্বক ক্ষেত্রে এই ধরণের কাঠামো পাওয়া যাবে না যাতে তড়িৎ বা চৌম্বক ক্ষেত্র শূন্য।

আমরা এ বিষয়টিকে অন্যভাবে দেখতে পারি। মনে করা যাক যে একজন মহাকাশচারী মহাকাশযানে করে এমন স্থানে গিয়ে পৌঁছেছে যেখান থেকে

সকল বস্তু এত দূরে যে তাদের মহাকর্ষ ক্ষেত্রের তীব্রতা উপেক্ষণীয়। মনে করা যাক যে, মহাকাশযানটির চারদিক বন্ধ, কোন জানালা নেই যার ফলে মহাকাশচারী বাহিরের কিছু দেখতে পায় না। তা ছাড়া মহাকাশযানের ভিতর কোন শব্দ শোনা যায় না যা থেকে সে সিদ্ধান্ত করতে পারে যে, মহাকাশ যানটি স্থির আছে কি সচল। মনে করা যাক যে, পৃথিবী থেকে পাঠান কোন সঙ্কেতের নির্দেশে কতকগুলি রকেট ছোঁড়া হল যার ফলে মহাকাশযানটি জাড্যিক কাঠামো S এর সাপেক্ষে সমত্বরিত বেগে $y$ এর ধনাত্মক দিকে চলে। এখন দেখা যাক চিত্র 7-1$(b)$ এ একটি ত্বরণশীল কাঠামো Σ′ যেখানে




চিত্র 7-1

মহাকাশযানটি স্থির সেখানে কি মনে হবে, অর্থাৎ মহাকাশচারীর কাছে কি মনে হবে। সে যদি একটি পিন হাতে নিয়ে ছেড়ে দেয় তা হলে সেটি সমত্বরিত বেগে নিচে পড়বে। যেহেতু সকল বস্তুই বহিঃস্থ বলের অভাবে জাড্যিক কাঠামো S এর সাপেক্ষে সমবেগে ধাবিত হয়, অতএব Σ′ কাঠামোর সাপেক্ষে তাদের ত্বরণের পরিমাণ সমান হবে। যদি ত্বরণ $a$ র পরিমাণ পৃথিবীর উপর মহাকর্ষজ ত্বরণ $g$ এর সমান হয় তা হলে সকল বস্তুর নিচে দিকে $g$ ত্বরণ দেখে মহাকাশচারী মনে করতে পারে যে, সে স্থির আছে কিন্তু মহাকাশযান অভিকর্ষ

ক্ষেত্রের মধ্যে আছে ( চিত্র 7-1($c$) )। কাজেই অভিকর্ষ ক্ষেত্রজনিত বল এবং অজাড্যিক কাঠামোর জাড্যিক বলের মধ্যে কোন পার্থক্য বোঝা সম্ভব নয়।

**7-3. অভিকর্ষ ক্ষেত্রে ঘড়ির চলার হারের হ্রাস : বর্ণালীর অভিকর্ষীয় লাল অপসরণ :** 1915 খ্রীষ্টাব্দে আইনষ্টাইন যখন তাঁর সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রকাশ করেন তখন তার সত্যাখ্যানের জন্য তিনি তিনটি নিষ্পত্তিমূলক পরীক্ষার প্রস্তাব করেন। তার মধ্যে শুধু একটি পরীক্ষার ফল ইতিপূর্বেই জানা ছিল এবং সেটি আইনষ্টাইনের তত্ত্বের অনুকূলে। কিন্তু অন্য পরীক্ষাগুলি তখনও করা হয় নি। প্রথম পরীক্ষাটি হল যে, অভিকর্ষ ক্ষেত্রে অবস্থিত উৎসের আলো কিছুটা লালের দিকে সরে যাবে। আমরা আইনষ্টাইনের পুরো অভিকর্ষক্ষেত্র সমীকরণ ব্যবহার না করেও এই সিদ্ধান্তে পৌঁছতে পারি, তুল্যতার নীতি এবং ভর শক্তি সংরক্ষণ সূত্র ব্যবহার করে। মনে করা যাক যে, একটি পরমাণুকে উত্তেজিত অবস্থায় নিয়ে যেতে E পরিমাণ শক্তি দেওয়া হল, তার সমতুল্য ভর হল $\frac{E}{c^2}$। অতএব পরমাণুটি যদি অভিকর্ষ ক্ষেত্রে থাকে তা হলে এর সঙ্গে স্থিতীয় শক্তি সরবরাহ করতে হবে। যদি কোন তারার উপরে পরমাণুটি থাকে যার ভর M এবং ব্যাসার্ধ R তা হলে এই স্থিতীয় শক্তির পরিমাণ হবে $\frac{E}{c^2}\cdot\frac{GM}{R}$। অতএব উত্তেজিত অবস্থায় শক্তির পরিমাণ হবে সর্বনিম্ন অবস্থার চেয়ে $E\left(1+\frac{GM}{Rc^2}\right)$ বেশী। অভিকর্ষ ক্ষেত্রের বাহিরে এই শক্তির পরিমাণ যদি $E^{\circ}$ হয় তা হলে

$$E\left(1+\frac{GM}{Rc^2}\right)=E^{\circ} \qquad (7-4)$$

যদি অভিকর্ষ ক্ষেত্রের ভিতরে ও বাহিরে নির্গত ফোটনের কম্পাঙ্ক যথাক্রমে $v$ ও $v^0$ হয় তা হলে

$$v\left(1+\frac{GM}{Rc^2}\right)=v^0 \qquad (7-5)$$

অতএব কম্পাঙ্ক অভিকর্ষ ক্ষেত্রে হ্রাস পাবে কাজেই তারার বর্ণালী লালের দিকে সরে যাবে। সমীকরণ (7-5) কে একটু অন্যভাবে লেখা যায় :

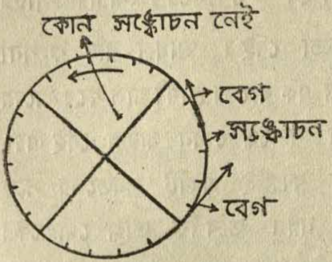
$$\frac{\Delta v}{v^0}=-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^0}=\frac{\Delta\phi}{c^2} \qquad (7-5)$$

যেখানে $\Delta\phi$ স্থিতীয়শক্তির অন্তর সূচিত করে। সূর্যালোকের ক্ষেত্রে এই লাল অপসরণ হয় $\frac{\Delta\lambda}{\lambda^{0}} \sim 2{\cdot}12 \times 10^{-6}$। এটা নীতিগতভাবে আধুনিক যন্ত্র দ্বারা পরিমাপ করা সম্ভব। কিন্তু সূর্য দেহের গ্যাস পরমাণুগুলির ইতস্ততঃ গতির ফলে ডপলার প্রক্রিয়া দ্বারাও এই লাল অপসরণ ঘটতে পারে। কাজেই এই দুই ধরণের লাল অপসরণের মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করা কঠিন। শ্বেতবামন নক্ষত্রগুলির ভরের তুলনায় ব্যাসার্ধ অনেক কম কাজেই $M/r$ এর মান বেশী। অতএব তাদের ক্ষেত্রে লাল অপসরণ অনেক বেশী হবে। উদাহরণ স্বরূপ সিরিয়াস নক্ষত্রের সঙ্গী শ্বেতবামন নক্ষত্রটির আলোর অভিকর্ষীয় লাল অপসরণ হবে সূর্যের প্রায় ত্রিশগুণ। এ ক্ষেত্রেও লাল অপসরণের অন্যান্য কারণ থাকতে পারে। তা সত্ত্বেও মনে করা হত যে, যে লাল অপসরণ দেখা যায় তা সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ।

পৃথিবীর উপরও বিভিন্ন উচ্চতায় যদি দু'টি ঘড়ি থাকে তা হলে ঐ দুই ঘড়ির চলার হারের মধ্যে পার্থক্য $\Delta\phi = gh$ এর উপর নির্ভর করবে। দু'টি পরমাণুর মধ্যে একটি যদি থাকে সর্বোচ্চ শৃঙ্গ এভারেস্টের উপর এবং অন্যটি সমুদ্রতলে তা হলে ঐ দুই পরমাণু থেকে নিঃসৃত ফোটনের কম্পাঙ্কের মধ্যে পার্থক্য হবে মাত্র $10^{12}$ ভাগের 1 ভাগ। আমরা 3-10 বিভাগে দেখেছি যে, ম্যোসবাওয়ার প্রক্রিয়া দ্বারা এত অল্প কম্পাঙ্কের পরিবর্তনেরও পরিমাপ করা যায়। পাউণ্ড (Pound) এবং রেবকা (Rebka) প্রথম অভিকর্ষীয় লাল অপসরণের সত্যাখ্যান করেন। তাদের ক্ষেত্রে পরমাণু দু'টির মধ্যে একটিকে 22 মিটার উচ্চ অট্টালিকার উপরে এবং অন্যটিকে নিচে রাখা হয়েছিল। এক্ষেত্রে লাল অপসারণের পরিমাণ ছিল মাত্র $2.4 \times 10^{-15}$ ভাগ, তা সত্ত্বেও তাঁরা প্রমাণ করেন যে, অভিকর্ষীয় লাল অপসরণ হবে আইনষ্টাইন প্রদত্ত মানের $0{\cdot}97 \pm 0{\cdot}04$ অংশ।

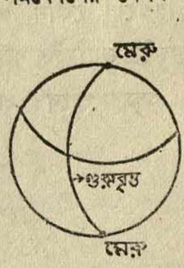
7·4 **দেশকালের বক্রতা এবং আইনষ্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণ ঃ** আইনষ্টাইন লক্ষ করলেন যে অজাড্যিক কাঠামো অর্থাৎ জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে ত্বরণশীল বা ঘূর্ণায়মান কাঠামোয় ইউক্লিডীয় জ্যামিতি বলবৎ নয়। উদাহরণ স্বরূপ একটি নাগরদোলা নেওয়া যাক যেটি বৃত্তাকার পথে ঘুরছে (চিত্র 7-2)। নাগরদোলার আরোহী যদি এই বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাস নির্ণয় করে তা হলে

কি দেখবে ? সে যদি বৃত্তের পরিধির স্পর্শকের সঙ্গে সমান্তরাল ভাবে তার ক্ষুদ্র পরিমাপ দণ্ডটি স্থাপন করে, তা হলে মাটিতে দণ্ডায়মান একজন নিরীক্ষকের কাছে ঐ দন্ডটি সংকুচিত বলে মনে হবে কারণ সেই মুহূর্তে আরোহী স্পর্শকের দিকে গতি সম্পন্ন। এবার যদি সে ঐ দণ্ডটিকে ব্যাসের সঙ্গে সমান্তরালভাবে স্থাপন করে তা হলে তার দৈর্ঘ্যের কোন পরিবর্তন হয়েছে বলে মনে হবে না। কাজেই নাগরদোলার আরোহীর কাছে একটি



চিত্র 7-2

বৃত্তের পরিধিও ব্যাসের অনুপাত $\pi$ এর চেয়ে বেশী হবে। কাজেই সেক্ষেত্রে ইউক্লিডীয় জ্যামিতি প্রযোজ্য নয়। আমরা 4-2 বিভাগে অইউক্লিডীয় জ্যামিতি সম্বন্ধে সামান্য আলোচনা করেছি। আমরা বলেছিলাম যে, এই ধরণের জ্যামিতিতে ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ নয়, এমনকি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ও $\pi$ নাও হতে পারে। এই সব জ্যামিতিকে বক্রতলের জ্যামিতি বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ একটি গোলকের উপরিভাগ নেওয়া যাক। এটির মাত্রা দুই। এই গোলকের উপর দু'টি বিন্দুর মধ্যস্থিত ক্ষুদ্রতম পথ সরলরেখা নয়, কারণ গোলকের উপরে সরলরেখা আঁকা যায় না, এগুলি হবে গুরুবৃত্ত। এই ধরণের রেখাকে বলা হয় লঘিষ্ঠান্তর রেখা। এই ধরণের লঘিষ্ঠান্তর রেখা দ্বারা সৃস্ট ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের বেশী হবে। এখানেব ৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত হবে $\pi$ এর চেয়ে কম (চিত্র 7-3)। তা ছাড়া এখানে যে কোন দু'টি গুরুবৃত্ত বা লঘিষ্ঠান্তর রেখা পরস্পরকে মেরুদ্বয়ে ছেদ করে, কাজেই কোন সমান্তরাল রেখা টানা যায় না, অতএব ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য এখানে সত্য নয়। অতএব গোলকের



চিত্র 7-3

জ্যামিতিকে আমরা দ্বিমাত্রার অইউক্লিডীয় বা বক্রতলের জ্যামিতি বলতে পারি। এখানে রেখানুর বর্গ হবে

$$ds^2 = a^2\ (d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\theta^2) \qquad (7—7)$$

অনেকে হয়ত বলবেন যে, আমরা একটি সমতলের সঙ্গে তুলনা করলেই ত' গোলকের উপরিভাগের বক্রতা সম্বন্ধে সচেতন হব। সেক্ষেত্রে দ্বিমাত্রার তলটির বক্রতা থাকলেও তিন মাত্রার দেশের মধ্যে বক্রতা নেই। আমরা যদি কল্পনা করি যে, গোলকের উপর পিঁপড়ার মত এমন এক ধরণের প্রাণী বাস করে যাদের কাছে দেশ দ্বিমাত্রার। তাদের তৃতীয় মাত্রা সম্বন্ধে কোন ধারণা নেই এবং তারা গোলকের বাহিরে যেতে পারে না। কাজেই একটি সমতলের সঙ্গে গোলকের তুলনা করা তাদের পক্ষেও সম্ভব নয়। তবে কি তারা গোলকের উপরিভাগের উপর পরিমাপ করে তার বক্রতা নির্ণয় করতে পারে না ? নিশ্চয়ই পারে এবং এ ব্যাপারে পথ দেখালেন গাউস (Gauss)। যেমন বক্র দ্বিমাত্রার দেশ সম্ভব তেমন বক্র ত্রিমাত্রার দেশের কথাও কল্পনা করা যায় যেখানে দুই বিন্দুর মধ্যে ক্ষুদ্রতম পথ সরলরেখা নয়। গাউসের মনে সন্দেহ হয়েছিল যে, আমাদের দেশ হয়ত সত্য সত্যই ইউক্লিডীয় জ্যামিতি মেনে চলে না। তাই তিনি পরীক্ষা করে দেখেন যে, জার্মানীর তিনটি পর্বত চূড়া ব্রকেন (Brocken) হোহার হাগেন (Hoher Hagen) এবং ইন্‌সেলবার্গ (Inselberg) এর মধ্যে সংযোজনকারী ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ কি না। পরীক্ষা করে দেখা যায় যে, পরীক্ষার ভ্রমসীমার মধ্যে এর মান দুই সমকোণ।

আমরা দেখেছি যে, ঘূর্ণায়মান অর্থাৎ ত্বরণশীল কাঠামোয় অইউক্লিডীয় জ্যামিতি বলবৎ। যেহেতু ত্বরণশীল কাঠামো এবং অভিকর্ষস্থিত কাঠামোর মধ্যে কোন পার্থক্য করা যায় না, অতএব অভিকর্ষ ক্ষেত্রেও অইউক্লিডীয় জ্যামিতি বলবৎ হবে। আইনষ্টাইন চতুর্মাত্রার বক্র দেশ-কাল নেন। আমরা পূর্বেই বলেছি (সমীকরণ 4-23) যে, এ ক্ষেত্রে রেখাণুর বর্গ হবে

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} \qquad (7—8)$$

এই দেশ-কালের বক্রতা $g_{\mu\nu}$ এর দ্বিতীয় ব্যবকলনের উপর নির্ভর করে। আমরা এখানে আইনষ্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণের বিশদ আলোচনা করতে পারব না। সংক্ষেপে বলা যায় যে, রীমানের বক্রতা টেন্সর একটি চতুর্থ শ্রেণীর

টেন্সর যা $g_{\mu\nu}$, তার প্রথম ও দ্বিতীয় ব্যবকলনের উপর নির্ভর করে। এই রীমান বক্রতা টেন্সরকে সঙ্কুচিত করে একটি দ্বিতীয় শ্রেণীর প্রতিসম টেন্সর পাওয়া যায় যাকে বলা হয় রিচি (Ricci) টেন্সর $R_{\mu\nu}$। আইনষ্টাইনের মতে দেশ-কালের বক্রতা নির্ভর করে বস্তুর বিস্তৃতি বা বণ্টনের উপর। আইনষ্টাইন নিউটনের মত দু'টি বিচ্ছিন্ন বস্তুকণার মধ্যে অভিকর্ষ বল নির্ণয় করেন নি। তিনি সমগ্র দেশ-কালকে একটি অবিচ্ছিন্ন মাধ্যম হিসাবে কল্পনা করেন। এই ধরণের অবিচ্ছিন্ন বস্তু মাধ্যমের গতিবিধি নির্ণয় করে শক্তি ভরবেগ টেন্সর $T_{\mu\nu}$। আইনষ্টাইনের সমীকরণ দেশ-কালের বক্রতার সঙ্গে এই শক্তি ভরবেগের সম্পর্ক স্থাপন করে ঃ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{7—9}$$

যেখানে R $R_{\mu\nu}$ থেকে উদ্ভূত একটি স্কেলার রাশি।

নিউটনীয় বলবিদ্যা অনুযায়ী এইরূপ অবিচ্ছিন্ন মাধ্যমে পোয়াসোঁ (Poisson) সমীকরণ বলবৎ হবে ঃ

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \tag{7—10}$$

এখানে $\phi$ অভিকর্ষীয় বিভব। আইনষ্টাইন প্রমাণ করেন যে, দুর্বল অভিকর্ষ ক্ষেত্রের জন্য (7-9) এবং (7-10) অভিন্ন। এই বক্র দেশ-কালে বস্তুকণার গতিপথ হবে লঘিষ্ঠান্তর রেখা।

7-5. **অভিকর্ষ ক্ষেত্রে আলোর রশ্মির বক্রতা ঃ** আমরা ইতিপূর্বেই বলেছি যে, অভিকর্ষ ক্ষেত্র দেশকালের বক্রতার সৃষ্টি করে, অথবা অন্যভাবে বলতে গেলে বস্তুর অস্তিত্ব দেশকালের বক্রতার কারণ। দেশকালের বক্রতা থাকলে দুই বিন্দুর মধ্যে ক্ষুদ্রতম পথ সরলরেখা না হয়ে হবে বক্ররেখা। এখন যদি আলোর গতিপথকে ধরা হয় তা হলে তা সরলরেখা হবে না। এর আঙ্গিক ব্যাখ্যা দেওয়া যায়, এইভাবে। যে ত্বরিত কাঠামো Σ' এর কথা পূর্বে বলা হয়েছে তার সাপেক্ষে আলোর গতিপথ বক্ররেখা হবে যদি জাড্যিক কাঠামো Σ র সাপেক্ষে তা সরলরেখা হয়। আমরা দেখেছি যে, Σ' কাঠামো এবং Σ কাঠামোর প্রকৃতি অভিন্ন, শেষেরটি স্থির কিন্তু তাতে অভিকর্ষ ক্ষেত্র আছে, প্রথমটি ত্বরিত কিন্তু তাতে অভিকর্ষ ক্ষেত্র নেই। কাজেই বোঝা যাচ্ছে,

অভিকর্ষ ক্ষেত্রে আলোর গতিপথ কেন বক্র হবে। কাজেই সূর্যের গা ঘেঁষে যদি কোন তারার আলো পৃথিবীতে আসে তা হলে সরলরেখা থেকে তার কৌণিক বিচ্যুতি হবে এবং তারাটিকে প্রকৃত অবস্থান থেকে সরে যেতে দেখা যাবে। এই বিচ্যুতির পরিমাণ উপরোক্ত সহজ পদ্ধতিতে নির্ণয় করলে পাওয়া যায় 0".87। এই প্রসঙ্গে উল্লেখ করা যায় যে, 1801 খ্রীষ্টাব্দে জার্মান গণিতজ্ঞ এবং জমি জরিপকারী জোল্ডনার (Soldner) ঠিক এই পরিমাণ বিচ্যুতির কথা বলেছিলেন। তিনি আলোকে নিউটনের মত বস্তুকণার সমষ্টি মনে করে গণনা করেছিলেন।

কিন্তু আইনষ্টাইন যথাযথভাবে গণনা করে দেখালেন যে, এর মান দ্বিগুণ, অর্থাৎ 1".75। পূর্ণগ্রাস সূর্য গ্রহণের সময়েই শুধু তারার আলোকে সূর্যের গা ঘেঁষে আসতে দেখা যায়। 1919 খ্রীষ্টাব্দের পূর্ণগ্রাস সূর্য গ্রহণের সময় প্রথম দেখা গেল যে, আলোর সরলরেখা থেকে বিচ্যুতি আইনষ্টাইন প্রদত্ত মানের কাছাকাছি, পরীক্ষার ভ্রমসীমার মধ্যে। এইভাবে আইনষ্টাইনের দু'টি ভবিষ্যদ্বাণী সফল হল।

আমরা পূর্বেই বলেছি যে, তিনটি নিষ্পত্তিমূলক পরীক্ষার মধ্যে একটির ফল পূর্বেই জানা ছিল। কাছাকাছি গ্রহগুলির মধ্যে বুধ গ্রহের কক্ষপথের উৎকেন্দ্রিকতা সবচেয়ে বেশী। কাজেই এই বুধ গ্রহের কক্ষপথ বহুদিন ধরে গণনার সঙ্গে মেলে না। কেপলার (Kepler) এই বুধ গ্রহের কক্ষপথ গণনার সঙ্গে মেলাতে গিয়ে প্রথম আবিষ্কার করেন যে, গ্রহগুলি বৃত্তাকার পথে ঘোরে না, ডিম্বাকৃতি পথে ঘোরে। ইতিপূর্বে জ্যোতির্বিজ্ঞানীদের ধারণা ছিল যে সব গ্রহ বৃত্তাকার পথে ঘোরে। আরও পরে যথার্থতর যন্ত্র আবিষ্কার হল এবং দেখা গেল যে বুধের কক্ষপথ একটি আবদ্ধ উপবৃত্ত নয়। অন্য গ্রহগুলির আকর্ষণের ফলে বুধ গ্রহের অনুসূরের অয়নচলন হয়। কিন্তু নিউটনীয় তত্ত্ব অনুযায়ী যেটুকু অয়নচলন হওয়া উচিত ছিল তার চেয়ে কিছুটা বেশী হতে দেখা যায়। এক শত বছরে এই পার্থক্যের পরিমাণ দাঁড়ায় 42 কৌণিক সেকেণ্ড। এটুকু ব্যাখ্যা করার জন্য কেউ কেউ এক নূতন গ্রহ ভালকানের (Vulcan) অস্তিত্ব কল্পনা করেছিলেন। কিন্তু তা বহু চেষ্টা সত্ত্বেও দেখা যায় নি। কিন্তু আইনষ্টাইন প্রথম দেখালেন যে তাঁর নূতন তত্ত্ব অনুযায়ী এই 42" পার্থক্যের খুব সুন্দর ব্যাখ্যা দেওয়া যায়।

যদিও 1915 খ্রীষ্টাব্দে আইনষ্টাইনের তত্ত্বের সপক্ষে মাত্র একটি পরীক্ষার ফল জানা ছিল, তবুও তাঁর নূতন তত্ত্বের যৌক্তিকতা সম্বন্ধে এত দৃঢ় বিশ্বাস ছিল যে তিনি সমারফেল্ডকে (Sommerfed) লিখেছিলেন : "সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব পড়লেই আপনি তার সত্যতা সম্বন্ধে নিঃসন্দেহ হবেন। অতএব আমি এর সপক্ষে একটি কথাও বলব না।"

## 7-6. বিশ্বতত্ত্ব

1929 খ্রীষ্টাব্দে হাব্‌ল্‌ (Hubble) দূরের নক্ষত্র জগৎগুলি (galaxy) নিরীক্ষণ করে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে দূরের সকল নক্ষত্র জগৎ আমাদের নিকট থেকে দূরে সরে যাচ্ছে এবং তাদের এই দূরগমণের বেগ দূরত্বের সঙ্গে অনুপাতী। এ থেকে ধরে নেওয়া যায় যে আমাদের বিশ্ব প্রসারণশীল। এটা অনেকটা একটা বায়ুপূর্ণ বেলুনের মত যাতে ক্রমশঃ আরও বায়ু প্রবেশ করান হচ্ছে, যার ফলে তার প্রসারণ ঘটছে। এই বেলুনের উপর কতকগুলি বিন্দু থাকলে তাদের মধ্যের পারস্পরিক দূরত্ব ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায় যেমন বৃদ্ধি পায় নক্ষত্র জগৎগুলির মধ্যস্থ দূরত্ব।

তাঁর ক্ষেত্র সমীকরণের সমাধান হিসাবে সমসত্ব সমদৈশিক এবং প্রসারণশীল বিশ্বকেই আমাদের বিশ্বের প্রতিরূপ বলে সকলে স্বীকার করে নিয়েছে। রবার্টসন এবং ওয়াকার (Robertson and Walker) এই ধরণের বিশ্বের রেখাণুর বর্গ নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বারা সূচিত করেন :

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t)\{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\theta^2\} \qquad (7\text{—}12)$$

এখানে $S(t)$ কালের অপেক্ষক এবং আয়তন বৃদ্ধি সূচিত করে। আইনষ্টাইনের সমীকরণ থেকে প্রমাণ করা যায় যে, অতীতে কোন এক সময় $S=0$ ছিল, যখন বিশ্বের আয়তন ছিল শূন্য অর্থাৎ বস্তুর ঘনত্ব ছিল অসীম। একে বলা হয় প্রাথমিক অনন্যতা। তার পূর্বে কি ছিল আমরা জানি না। হঠাৎ বিশ্ব প্রসারিত হতে শুরু করল ভীম বেগে। একে বলা হয় বিশ্বের 'মহানাদ তত্ত্ব'। প্রথম দিকে বিশ্বে ছিল প্রধানতঃ বিকিরণ, বস্তুর পরিমাণ ছিল সামান্য। বিশ্বের এই ক্ষুদ্র আয়তনের মধ্যে তখন বিকিরণ ছিল সাম্যাবস্থায়, ফলে তার গুণাগুণ ছিল কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণের মত।

বিশ্বের প্রসারণের ফলে কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণের প্রকৃতি পরিবর্তিত হয় না শুধু তার তাপমাত্রা হ্রাস পায়।

1964 খ্রীষ্টাব্দে দু'জন মার্কিন বিজ্ঞানী পেন্‌জিয়াস এবং উইলসন ( Penzias and Wilson ) আবিষ্কার করেন যে, 7 সে. মি. তরঙ্গ দৈর্ঘ্যযুক্ত বিকিরণ চতুর্দিকে বর্তমান এবং তার উজ্জ্বলতা দিক নিরপেক্ষ। পরে আরও অনেক বিজ্ঞানী পরীক্ষা করে দেখেন যে, অন্যান্য তরঙ্গ দৈর্ঘ্যেও এই বিকিরণ বর্তমান এবং লক্ষ করেন যে প্রায় 1 মি. মি. তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে এই বিকিরণের উজ্জ্বলতা সর্বোচ্চ। বিভিন্ন তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে এই বিকিরণের উজ্জ্বলতা দেখে বোঝা যায় যে, এর প্রকৃতি 2·7 ডিগ্রি কেলভিন তাপমাত্রার কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণের অনুরূপ এবং বিভিন্ন দিকে এর উজ্জ্বলতার হাজার ভাগের এক ভাগের চেয়ে বেশী তারতম্য হয় না। ডিকি ( Dicke ) প্রথম বলেন যে, এটি বিশ্বের প্রারম্ভের সেই সর্বব্যাপী বিকিরণের অবশেষ। এর সমদৈশিকতা প্রকারান্তরে আমাদের বিশ্বের সমসত্বতা এবং সমদৈশিকতা সূচিত করে।

যে কাঠামোর সাপেক্ষে এই বিশ্ব সমসত্ব ও সমদৈশিক তার সাপেক্ষে পৃথিবীর কোন গতি থাকলে তার যাত্রার অভিমুখে ফোটনের কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পাবে এবং বিপরীত দিকে হ্রাস পাবে। কাজেই সামনের দিকে কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণের তাপমাত্রা বেশী এবং পিছন দিকে কম বলে মনে হবে। এইভাবে আমরা আবার সেই বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর ধারণায় ফিরে এলাম। 1977 খ্রীষ্টাব্দে স্মুট ( Smoot ) এবং তাঁর সহকর্মীরা 50,000 ফিট উচ্চতায় U2 বিমান থেকে লক্ষ করেন যে, একটি বিশেষ দিকে কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণের তাপমাত্রা গড় তাপমাত্রার তুলনায় ·0035 ডিগ্রি বেশী। তা থেকে তাঁরা সিদ্ধান্ত করেন যে, পৃথিবী সিংহ রাশির রেগুলাস নক্ষত্রের 15 ডিগ্রি পূর্ব দক্ষিণ পূর্ব দিকে সেকেণ্ডে 390 কিলোমিটার বেগে ছুটে চলেছে ঐ বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর সাপেক্ষে।

কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, বর্তমানে আবার এক ধরণের বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত কাঠামোর ধারণায় আমরা ফিরে গেছি। কিন্তু দেখা দরকার, এর ফলে পদার্থবিদ্যার বা বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের কোন কাঠামো এবং তার সাপেক্ষে সরলরেখায় সমবেগে গতিশীল অন্য একটি কাঠামো দুটিতেই পদার্থবিদ্যার

সূত্রগুলি অভিন্ন কি না। প্রথমে লোরেন্ট্স্ এবং পরে আইনষ্টাইন প্রমাণ করেন যে, দু'টি কাঠামোয় ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি সত্য হলে এ দু'টি ঐ কাঠামোর মধ্যে রূপান্তর সমীকরণটি পূর্বের গালিলীয় সমীকরণ হবে না। তারপর দেখা গেল যে, লোরেন্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণের সাপেক্ষে নিউটনের গতি-সূত্রগুলি অপরিবর্তনীয় নয়। এগুলিকে অপরিবর্তনীয় করার জন্য তাদের কিছুটা পরিবর্তিত করতে হল। দেখা গেল যে, বল ও ত্বরণ সব সময় সমান্তরাল হয় না এবং ভর বেগের উপর নির্ভর করে। তারপর গতীয় শক্তির মান থেকে আইনষ্টাইন ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্র অনুমান করেন যা পদার্থবিদ্যায় এক নূতন যুগের প্রবর্তন করেছে।

7-7. উপসংহার: আইনষ্টাইন দেখলেন যে, সব ক'টি পরীক্ষাই তাঁর তত্ত্বের সপক্ষে রায় দিল। এর ফলে তাঁর জ্যামিতির প্রতি আস্থা অত্যন্ত বেড়ে গেল। এবার তিনি চেষ্টা করতে লাগলেন এমন একটি জ্যামিতিক সমীকরণ আবিষ্কার করতে যা সব রকম ক্ষেত্রের ব্যাখ্যা করতে সক্ষম হবে। স্থূল জগতে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হল অভিকর্ষ ও তড়িৎচুম্বকীয় ক্ষেত্র। এই একীকৃত ক্ষেত্র তত্ত্বের সন্ধানে তিনি ব্যয় করলেন তাঁর জীবনের প্রায় শেষ ত্রিশটি বছর। কিন্তু আধুনিক পদার্থবিদ্যার নূতন চিন্তাধারার সঙ্গে তিনি নিজেকে খাপ খাওয়াতে পারলেন না। কোয়াণ্টাম বলবিদ্যার একসময় ভিত্তি স্থাপন করলেও তিনি এই শাস্ত্রের পরবর্তী ক্রমবিকাশের উপর আস্থা হারিয়ে ফেললেন। অনেকের মতে তিনি তাঁর জীবনের শেষ ত্রিশ বছর অপচয় করেছেন। এ পথে ক্রমে তিনি হয়ে গেলেন সাথীহারা। একসময় তিনি দুঃখ করে বলেছিলেন: "এত লোকের পরিচিত হয়েও আমি এত একা।" যা তিনি সত্য বলে মনে করেছিলেন তার অন্বেষণে তিনি জীবনের শেষ দিন পর্যন্ত ব্যয় করলেন। যে রাত্রে তিনি হাসপাতালে চিরবিশ্রাম লাভ করলেন সে সময় তাঁর বিছানার পাশে পড়ে ছিল একীকৃত ক্ষেত্র তত্ত্বের অসমাপ্ত গণনা যা তিনি পরের দিনের জন্য তুলে রেখেছিলেন। তাঁর প্রিয় পদার্থশাস্ত্রের মোহিনী মায়া তাঁকে সারাজীবন কর্মব্যস্ত রেখেছিল। তিনি তাঁর জীবনের অর্ধেক সত্য সত্যই অপচয় করেছিলেন কি না সে বিষয়ে ভবিষ্যৎ ইতিহাস রায় দেবে।

যদি এই রায় তাঁর বিরুদ্ধে যায় তা হলেও তাঁর জীবনের প্রথমার্ধের আবিষ্কারগুলি চিরকাল চরম সত্য সন্ধানের পথে অভূতপূর্ব অগ্রগতি হিসাবে স্বীকৃতি পাবে এ বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই। কিন্তু আইনস্টাইনের মধ্যে কোন-দিন আত্মপ্রসাদের ভাব দেখা যায় নি। তাঁর সত্তর বছর পূর্তি উপলক্ষে যখন সারা বিশ্বের শ্রেষ্ঠ বিজ্ঞানীরা তাঁকে অভিনন্দন জানালেন, তার কয়েকদিন পরেই তিনি সোলোভাইনকে একটি চিঠিতে লিখেছিলেন "তোমরা দূর থেকে মনে কর যে, আমি পরিতৃপ্তির সঙ্গে আমার বিগত জীবনের কাজের কথা চিন্তা করি। কিন্তু কাছে থেকে সব কিছু অন্য রকম দেখায়। এমন একটি বৈজ্ঞানিক ধারণাও নেই যার সম্বন্ধে আমার দৃঢ় প্রত্যয় আছে যে, সেটি চিরকাল অবিচল থাকবে, এবং এ ব্যাপারেও আমি নিশ্চিত নই যে, আমি মোটামুটি ঠিক পথে চলেছি।" এই উক্তির সঙ্গে নিউটনের উক্তির ( পৃষ্ঠা 1 ) তুলনা করা যায়। তবে আইন-ষ্টাইনের বিজ্ঞানের উপর আস্থা কোন দিন কমে নি। তিনি বলেছেন, "আমার দীর্ঘজীবনে একটা অভিজ্ঞতা হয়েছে যে, বাস্তব সত্যের তুলনায় আমাদের সমস্ত বিজ্ঞানকে সেকেলে এবং ছেলেমানুষী বলে মনে হলেও এটিই আমার সবচেয়ে মূল্যবান সম্পদ।"

তবে বিজ্ঞানী হলেও তাঁর নিজের আবিষ্কারের সমাজের উপর প্রভাব সম্বন্ধে তিনি উদাসীন ছিলেন না। তাঁরই আবিষ্কৃত ভর ও শক্তির তুল্যতা সূত্র আজ সমগ্র পৃথিবীকে ধ্বংসের পথে নিয়ে যেতে চলেছে। এক সময় হিটলারের হাতে পারমাণবিক অস্ত্র গিয়ে পড়বে এই আশঙ্কায় তিনি মার্কিন রাষ্ট্রপতিকে পারমাণবিক বোমা তৈরী করতে পরামর্শ দিয়েছিলেন। কিন্তু হিরোশিমার ভয়াবহ তাণ্ডব দেখে তিনি তাঁর ভুল বুঝতে পেরেছিলেন। শেষ জীবনে এই পারমাণবিক অস্ত্রের বিরুদ্ধে তাঁর লেখনী ধারণ করে তিনি সেই পাপের প্রায়শ্চিত্ত করে গেছেন। এই অতিমানবের মধ্যে মস্তিষ্ক ও হৃদয় উভয়ের উৎকর্ষের এক অপূর্ব সমাবেশ দেখা গিয়েছিল, যা কত শতাব্দী অতীত হলে আবার কোন মনীষীর মধ্যে দেখা যাবে জানি না। তাই আমরা কবিগুরুর ভাষায় বলতে পারি ঃ

হিংসায় উন্মত্ত পৃথ্বী, নিত্য নিঠুর দ্বন্দ্ব ;
ঘোর কুটিল পন্থ তার, লোভজটিল বন্ধ ॥

নূতন তব জন্ম লাগি কাতর যত প্রাণী
কর ত্রাণ মহাপ্রাণ, আন' অমৃত বাণী,
বিকশিত কর' প্রেমপদ্ম চির মধুনিষ্যন্দ ।
শান্ত হে, মুক্ত হে, হে অনন্তপুণ্য,
করুণাঘন, ধরণীতল কর' কলঙ্কশূন্য ।

* * * *

লোক লোক ভুলুক শোক, খণ্ডন কর মোহ,
উজ্জ্বল হোক জ্ঞানসূর্য—উদয় সমারোহ—
প্রাণ লভুক সকল ভুবন, নয়ন লভুক অন্ধ ।
শান্ত হে, মুক্ত হে, হে অনন্ত পুণ্য,
করুণাঘন, ধরণীতল কর' কলঙ্কশূন্য ।

## আরও পড়ার জন্য সুপারিশ

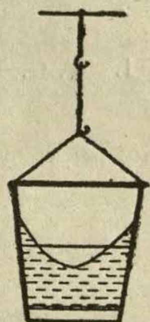

1. P. G. Bergmann—Introduction to the Theory of Relativity (Prentice Hall 1969)
2. R. C. Tolman— Relativity, Thermodynamies and Cosmology (Oxford Clarendon Press 1962)
3. May Born— Einstein' Theory of Relativity (Dover 1962)
4. A. S. Eddington— The Mathematical Theory of Relativity (Camb. Univ. Press 1963)

## *পরিশিষ্ট

### প-1. দেশ ও কাল সম্বন্ধে নিউটন ও গালিলেইর ধারণা :—

নিউটন বিশ্বাস করতেন যে, গতি ও স্থিতির চরম অর্থ আছে। এর কারণ কি ? এ কথার উত্তর আমরা নিউটনের ভাষায়ই দেব ঃ

"যে প্রক্রিয়া দ্বারা চরম গতি ও আপেক্ষিক গতির পার্থক্য বোঝা যায় তা হচ্ছে বৃত্তাকার গতির অক্ষ থেকে অপসরণের বল। কারণ পুরোপুরি আপেক্ষিক বৃত্তাকার গতির ক্ষেত্রে এ ধরণের বল থাকে না, কিন্তু চরম গতির ক্ষেত্রে এই বল গতির পরিমাণের সঙ্গে বাড়ে ও কমে। যদি একটি পাত্র লম্বা দড়ি দিয়ে ঝোলান হয়, তার পর একদিকে ঘোরান হয় যাতে দড়িটা খুব পাকিয়ে যায়, তার পর পাত্রটিতে জল ভরে একটু স্থিরভাবে ধরে রাখা হয়, তার পর হঠাৎ জোরে উল্টোদিকে ঘুরিয়ে দেওয়া হয় ; যতক্ষণ দড়ির পাক খুলতে থাকে ততক্ষণ পাত্রটা ঘুরতে থাকে, পাত্রটা ঘুরতে শুরু করার আগে জলের উপরটা সমতল ছিল, কিন্তু পাত্রটা ঘোরার সঙ্গে সঙ্গে ধীরে ধীরে জলের মধ্যেও গতি সঞ্চারিত হয় এবং জলকেও স্পষ্টভাবে ঘুরতে দেখা যায় এবং অল্প অল্প ক'রে মাঝখান থেকে সরে গিয়ে পাত্রের পাশের দিকে উঁচু হয়ে যায়, যাতে জলের উপরটা অবতলের আকার পায়। ··· " ( চিত্র প-1 )



চিত্র প-1

এই পরীক্ষাকে সাধারণতঃ "নিউটনের বালতি পরীক্ষা" বলা হয়। এ ক্ষেত্রে বালতির ঘূর্ণনের ফলে কেন্দ্রাতিগ বলের সৃষ্টি হয়, যা জলকে কেন্দ্র থেকে সরিয়ে দেয়। যদি আমরা দুটি একই রকমের বালতি একই ধরণের দড়ি দিয়ে ঝোলাই এবং একটিকে স্থির রেখে অন্যটিকে ঘোরাই, তা হলে যেটি ঘোরে সেটাতেই শুধু জলের উপরটা অবতলের আকার পায়, অন্যটিতে সমতল থাকে। নিউটন ভাবলেন যে, গতির যদি শুধু আপেক্ষিক অর্থ থাকে তা হলে যেমন গতিশীল বালতিটি স্থির বালতির সাপেক্ষে ঘুরছে তেমন স্থির বালতিটিও গতিশীল বালতির সাপেক্ষে উল্টো দিকে ঘুরছে বলে ধরা

যায়। কিন্তু একটির মধ্যে কেন্দ্রাতিগ বলের সৃষ্টি হয়, অন্যটির (স্থির বালতিটির) মধ্যে হয় না। সেইজন্য নিউটন মনে করতেন যে, জগতে নিশ্চয়ই একটি বিশেষ কাঠামো আছে যাকে আমরা চরম স্থিতির সংজ্ঞা হিসাবে ধরতে পারি।

কিন্তু আমরা জানি যে, যদি কোন কাঠামো জাড্যিক কাঠামোর সাপেক্ষে সমবেগে সরলরেখায় গতিশীল হয় তাহলে সাধারণ পরীক্ষা দ্বারা এই দুই কাঠামোর মধ্যে পার্থক্য বোঝা যাবে না। এই ব্যাপার সম্বন্ধে নিউটনের পূর্বসূরী গালিলেও গালিলেই সচেতন ছিলেন। তিনি 1632 খ্রীষ্টাব্দে লিখেছিলেন:

"সবশেষে পরীক্ষাগুলির নেতিবাচক ফলাফল দেখাবার জন্য আমি আপনাদের কতকগুলি সহজ পরীক্ষার কথা এখানে বলব। একটা বড় জাহাজের ডেকের নিচে প্রধান কেবিনের মধ্যে দরজা বন্ধ করে আপনি আপনার বন্ধুর সঙ্গে থাকুন এবং সেখানে সঙ্গে করে কয়েকটি মাছি, প্রজাপতি ও অন্যান্য ছোট উড়ন্ত জীব নিয়ে যান। একটা বড় পাত্রে জল ও তাতে কয়েকটা মাছ রাখুন; উপর থেকে একটা জলপূর্ণ বোতল ঝুলিয়ে রাখুন, যা থেকে ফোঁটা ফোঁটা করে জল নিচে একটা চওড়া পাত্রে পড়ে। যখন জাহাজ স্থির ভাবে দাঁড়িয়ে থাকে তখন লক্ষ করুন কি ভাবে উড়ন্ত জীবগুলি কেবিনের সব দিকে সমান বেগে উড়ে। মাছগুলি সর্বদিকে সমানভাবে সাঁতার কাটে; ফোঁটাগুলি নিচের পাত্রে পড়ে এবং আপনার বন্ধুকে কোন জিনিস ছুঁড়ে দেবার সময় একদিকে অন্য দিকের চেয়ে বেশী জোরে ছুঁড়তে হয় না, যদি দূরত্ব সমান থাকে; দুই পা জড় করে লাফালে আপনি প্রত্যেক দিকেই একই দূরত্ব অতিক্রম করেন। এই সব ব্যাপারগুলি ভালভাবে লক্ষ করার পর (যদিও এ বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই যে, জাহাজ দাঁড়িয়ে থাকলে ঘটনাগুলি এই ভাবেই ঘটবে), জাহাজটিকে যত ইচ্ছা বেগে চালাতে বলুন, শুধু গতি যেন অবিচল থাকে এবং এ পাশ ও পাশে না বেঁকে। আপনি দেখবেন যে, যে সব প্রক্রিয়ার কথা বলা হয়েছে তাতে সামান্যতম পরিবর্তনও হয় নি এবং আপনি এই সব পরীক্ষা থেকে বলতে পারবেন না, জাহাজটা স্থির আছে কি চলছে। লাফাবার সময় আপনি মেজের উপর আগের মত একই দূরত্ব অতিক্রম

করবেন, জাহাজ জোরে চললেও আপনি জাহাজের পিছনের দিকে সামনের দিকের চেয়ে বেশী দূর লাফাতে পারবেন না, যদিও যতক্ষণ আপনি শূন্যে রয়েছেন সেই সময়ে আপনার নিচের মেজে আপনার লাফাবার উল্টো দিকে যাচ্ছে। আপনার বন্ধু জাহাজের সামনের দিকেই থাকুন অথবা পিছনের দিকেই থাকুন, তাঁকে কোন জিনিস ছুঁড়ে দেবার জন্য কোন সময়েই পরিশ্রম করতে হবে না। ফোঁটাগুলিও আগের মত নিচের পাত্রে পড়বে এবং পিছন দিকে বেঁকে যাবে না যদিও ফোঁটাগুলি শূন্যে থাকাকালে জাহাজটা অনেক দূর এগিয়ে যায়। জলেও মাছগুলিকে সামনে দিকে সাঁতার কাটতে পিছনের দিকের তুলনায় বেশী পরিশ্রম করতে হয় না, এবং পাত্রের ধারে যে কোন জায়গায় খাদ্য রাখলে তারা সহজে সেখানে পেঁছিতে পারে। সব .শষে প্রজাপতি এবং মাছিগুলিও প্রত্যেক দিকে একই ভাবে উড়বে, জাহাজের গতির সঙ্গে পাল্লা দিতে গিয়ে ক্লান্ত হয়ে তারা কখনও পিছন দিকে জমা হয়ে যায় না যদিও মনে হতে পারে যে, বহুক্ষণ হাওয়ায় উড়ে থাকার জন্য তাদের জাহাজ থেকে সম্পর্ক ছিন্ন হয়ে যায়। ধূপ, ধুনা পুড়িয়ে ধোঁয়া তৈরী করলে সেটা ছোট মেঘ তৈরী করতে দেখা যায়, মেঘকেও এক জায়গায় স্থির থাকতে দেখা যায়, জাহাজের এক দিকে অন্য দিকের চেয়ে বেশী যেতে দেখা যায় না। এই সমস্ত প্রক্রিয়ার কারণ হচ্ছে যে, জাহাজের মধ্যের সমস্ত জিনিস, এমন কি হাওয়াও তার গতির অংশীদার।"

নিউটন গালিলেইর উল্লিখিত রচনা পড়েছিলেন কিন্তু তা সত্ত্বেও তিনি চরম দেশ ও কালের ধারণা ছাড়তে পারেন নি। কারণ তিনি দেখেছিলেন যে, ঘূর্ণায়মান বালতির জলের উপরিভাগ অবতলের এবং ঘূর্ণায়মান তরল পদার্থ-পিন্ড উপগোলকের আকার ধারণ করে। নিউটন তাই ভাবলেন যে, জগতে নিশ্চয়ই একটি বিশেষ অধিকার প্রাপ্ত পরিমাপ কাঠামো আছে যার সাপেক্ষে ঘূর্ণন থাকলে তার পরিমাণ বৈজ্ঞানিক পরীক্ষাদ্বারা নির্ণয় করা যায়। 1686 খ্রীষ্টাব্দে নিউটন প্রিন্সিপিয়া (Principia) পুস্তকে তাঁর এই মত ব্যক্ত করেন ঃ চরম দেশ একটি মহাজাগতিক উপস্তর যার "প্রকৃতিগত বিশেষত্ব হচ্ছে যে, বাহিরের কোন কিছুর সঙ্গে তুলনা ব্যতিরেকেই সব সময় একই রকম এবং স্থিতিশীল থাকে।" নিউটনের মত অনুযায়ী তাঁর সূত্রগুলি এমন একটি

পরিমাপ কাঠামোয় সত্য যা চরম দেশের সাপেক্ষে স্থিতিশীল। গালিলেই এর মত নিউটনও বুঝেছিলেন যে, এই বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত পরিমাপ কাঠামো নির্ণয় করা অসম্ভব। কারণ এই পরিমাপ কাঠামোর সাপেক্ষে অবিচল বেগ সম্পন্ন সরলরৈখিক গতিশীল কাঠামোতেও ঘটনাগুলি একই ভাবে ঘটে এবং কোন যান্ত্রিক পরীক্ষা দ্বারা এই দুই-এর মধ্যে পার্থক্য বোঝা যায় না। তিনি লিখেছেন, "কোন বস্তুর চরম গতি যার অর্থ হচ্ছে, একটা চরম স্থান থেকে অপর চরম স্থান পর্যন্ত সরলরৈখিক গতি, তা কখনও নির্ণয় করা যায় না কারণ সরলরৈখিক গতি নিরূপণ করতে হলে অন্য বস্তুর সঙ্গে তুলনা করতে হয়।" গালিলেইএর নিরীক্ষককে জাহাজের গতি নিরূপণ করতে হলে তার কেবিন থেকে বেরিয়ে বাহিরের দিকে দেখতে হবে ; সমুদ্র উপকূল, বয়া অথবা অন্য কোন বস্তুর সঙ্গে তুলনা করেই তবে সে জানতে পারবে যে, জাহাজের গতি আছে।

অবিচল বেগে সরলরৈখিক গতিসম্পন্ন কাঠামোর গতি নিরূপণ অসম্ভব বুঝেও নিউটন লিখলেন, "আপেক্ষিক দেশ চরম দেশের পরিবর্তনশীল পরিমাপ যা আমাদের ইন্দ্রিয় গ্রাহ্য এবং যা আমরা অন্য বস্তুর সাপেক্ষে অবস্থান থেকে নির্ণয় করতে পারি। এটাকে সাধারণ লোকে অপরিবর্তনীয় দেশ বলে মনে করে।

"কাজেই চরম অবস্থান ও গতির পরিবর্তে আমরা আপেক্ষিক পরিমাপ ব্যবহার করি এবং এতে সাধারণ কাজে কোন অসুবিধা হয় না কিন্তু দার্শনিক আলোচনায় আমাদের ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য বস্তুর বিমূর্তনের প্রয়োজন কারণ আমাদের আসল বস্তুর আলোচনা করতে হবে, শুধু তাদের ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য পরিমাপের কথা বললেই চলবে না। এমন হতে পারে যে, কোন স্থিতিশীল বস্তু নেই যাকে অন্য বস্তুর অবস্থান বা গতির তুলনার মাপকাঠি হিসাবে ব্যবহার করা যায়।"

এই লেখা থেকে বোঝা যায় যে, নিউটনের বালতি পরীক্ষা তাঁকে চরম দেশের যে সিদ্ধান্তে নিয়ে গিয়েছিল, শত অসুবিধা সত্ত্বেও তিনি তা থেকে মুক্ত হতে পারছিলেন না। তিনি এখানে এমন বস্তুর কথা বলেছেন যা আমাদের ইন্দ্রিয়-গ্রাহ্য নয়। "কোন কিছুর সঙ্গে তুলনা ব্যতিরেকে" (পৃঃ ৩০৪) কথাটার কোন অর্থ হয় না কারণ এটা কোন বৈজ্ঞানিক পরীক্ষাদ্বারা নির্ণয় করা যায় না

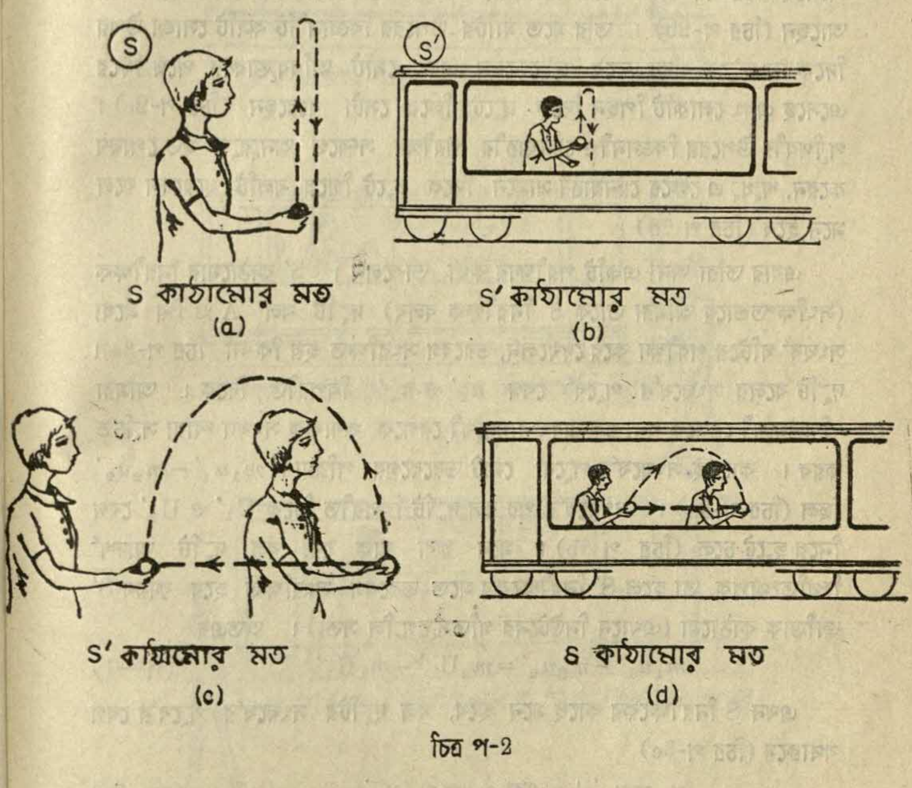
কাজেই এটা বিজ্ঞানের গণ্ডীর বাহিরে। এখানে নিউটন পদার্থবিদ্যার গণ্ডী ছাড়িয়ে অধিবিদ্যার গণ্ডীর মধ্যে চলে গেছেন।

কিন্তু নিউটন প্রিন্সিপিয়ার এই পরিচ্ছেদের শেষে লিখেছেন, "এই গ্রন্থে পরে আরও বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হবে, কি ভাবে আমরা কারণ, ফলাফল ও আপাত পার্থক্য থেকে প্রকৃত গতি নির্ণয় করতে পারি এবং কি ভাবে তার বিপরীত প্রক্রিয়াও সম্ভব। কারণ এই উদ্দেশ্যেই গ্রন্থটির রচনা করেছি।" কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, প্রথম দিকে নিউটন ইন্দ্রিয় গ্রাহ্য পরিমাপগুলিকে অস্বীকার করেছেন আবার পরে বলেছেন যে, সেই পরিমাপের ভিত্তিতে গতি নির্ণয় করা যাবে। কাজেই নিউটনের কথাগুলি পরস্পর বিরোধী। যাই হোক তাঁর বলবিদ্যার ভিত্তিতে যে ত্রুটি আছে সেটা তাঁর মত প্রতিভাবান ব্যক্তির নজর এড়ায় নি'। আইনষ্টাইন লিখেছিলেন, "আমি জোরের সঙ্গে বলতে চাই যে, নিউটন তাঁর উত্তরসূরী বিদ্বান বিজ্ঞানীদের চেয়ে নিজের বুদ্ধিদ্বারা নির্মিত সৌধের ত্রুটিগুলি সম্বন্ধে বেশী সচেতন ছিলেন। এতে তাঁর সম্বন্ধে আমার গভীর শ্রদ্ধার উদ্রেক হয়।" নিউটন সময় সম্বন্ধে বলেন, "চরম, সত্য ও গাণিতিক কাল স্বীয় প্রকৃতি অনুযায়ী এবং বহিঃস্থ কোন বস্তুর সহিত তুলনা ব্যতিরেকে সমবেগে প্রবাহিত হয়।" অর্থাৎ কোন পৌনঃপুনিক প্রক্রিয়া অথবা চিন্তাশীল প্রাণীর অস্তিত্ব থাকুক বা না থাকুক, চরম কালের গতি অভিন্ন হবে। একটু চিন্তা করলেই বোঝা যাবে যে, এই কাল বৈজ্ঞানিক পরীক্ষাদ্বারা নির্ণয়যোগ্য নয়, কাজেই বিজ্ঞানের গণ্ডীর বাহিরে। মনে করা যাক যে, হঠাৎ জগতের সমস্ত ভৌত ও রাসায়নিক প্রক্রিয়ার বেগ এবং সেই সঙ্গে আমাদের চিন্তা ক্রিয়ার বেগও এখনকার দ্বিগুণ হয়ে গেল। কিন্তু এই পরিবর্তন আমরা কোন উপায়েই বুঝতে পারব না। কাজেই বস্তু ও ব্যক্তি নিরপেক্ষ চরম কাল নিরর্থক। নিউটন মনে করেছিলেন যে, বিশ্বের কোথাও একটি আদর্শ ঘড়ি আছে, কিন্তু সেটা আমাদের ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য কোন পরীক্ষাদ্বারা আমরা জানতে পারব না। বিজ্ঞানে এমন কোন বস্তুর স্থানই নেই যা প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষভাবে আমাদের ইন্দ্রিয়গুলির অধিগম্য নয়।

**প-2 গালিলীয় কাঠামোতে গতি সূত্রের অপরিবর্তনীয়তার ফল :** আমরা প—1 বিভাগে দেখেছি যে, গালিলীয় রূপান্তর অনুযায়ী গালিলীয় কাঠামোগুলিতে দৈর্ঘ্যের মান অপরিবর্তনীয়। এটা প্রমাণ করার জন্য আমরা

ধরে নিয়েছি যে, কাল দুই কাঠামোতে অভিন্ন কাজেই কালের মান অভিন্ন না হলে দৈর্ঘ্য অপরিবর্তনীয় নাও থাকতে পারে।

কিন্তু নিউটন ছিলেন গোঁড়া খ্রীষ্টান এবং অতীন্দ্রিয়বাদে বিশ্বাসী ব্যক্তি। কাজেই ঈশ্বরের কাছে স্থিতি ও গতির পার্থক্য থাকলেই তিনি সন্তুষ্ট ছিলেন। নিউটনের আশ্রিত রেভারেণ্ড ক্লার্কের সঙ্গে এই ব্যাপারে তর্কের সময় লাইবনিৎস (Leibnitz) যখন বেশী চেপে ধরেন তখন নিউটনের অনুমতি নিয়েই ক্লার্ক লিখেছিলেন "দেশ ও কাল ঈশ্বর নিরপেক্ষ নয় এবং তাঁর অস্তিত্বের প্রয়োজনীয় ও প্রত্যক্ষ ফল।"




চিত্র প-2

আমরা দেখলাম যে, সকল গালিলীয় কাঠামোতেই নিউটনের গতিসূত্র অপরিবর্তনীয় থাকে। কাজেই একজন বিজ্ঞানী যদি ট্রেনে চড়ে মসৃণ লাইনের উপর দিয়ে সমবেগে সরলরেখায় ছুটে চলেন এবং অপরজন লাইনের ধারে

মাটিতে দাঁড়িয়ে থাকেন তা হলে কে যে স্থির আছে আর কে গতিশীল তা বোঝার কোন উপায় থাকবে না। অনেকে হয়ত বলবেন যে, ট্রেনটা নিশ্চয়ই গতিশীল কারণ ট্রেন ছাড়ার পূর্বে গাছপালা, পাহাড় পর্বত সমস্ত স্থির ছিল, এখন সেগুলিকে গতিশীল মনে হচ্ছে। কিন্তু যদি আমরা একটি চিরকালের জন্য গতিশীল ট্রেনের কথা চিন্তা করি যা বিজ্ঞানীর জীবনে কোনদিন স্থির ছিল না তা হলে ট্রেন যাত্রী মনে করবেন যে, গাছপালা, পাহাড় পর্বত প্রভৃতি চিরদিনই গতিশীল ; আমরা যেমন পৃথিবীর উপর থেকে সূর্য, চন্দ্র, গ্রহ নক্ষত্র সকলকেই গতিশীল বলে মনে করি। মনে করা যাক যে, মাটির উপর বিজ্ঞানীটি একটি বল উপর দিকে ছুঁড়ে দেখালেন যে, সেটি তাঁর হাতে ফিরে আসছে (চিত্র প-2a)। ট্রেনযাত্রী সেই পরীক্ষা করে দেখালেন যে, তিনি স্থির আছেন (চিত্র প-2b)। তাঁর মতে মাটির উপরের বিজ্ঞানীটি বলটি সোজা উপর দিকে না ছুঁড়ে বাঁকা ভাবে ছুঁড়েছেন এবং সেটি অধিবৃত্তাকার পথে ফিরে এসেছে এবং লোকটি পিছন দিকে ছুটে গিয়ে সেটা ধরেছেন (চিত্র প-2c)। পৃথিবীর উপরের বিজ্ঞানীও ট্রেনযাত্রীর পরীক্ষা সম্বন্ধে অনুরূপ মত পোষণ করেন, শুধু এ ক্ষেত্রে ট্রেনযাত্রী সামনে দিকে ছুটে গিয়ে বলটি ধরেছেন বলে মনে হবে (চিত্র প 2d)।

এবার তাঁরা অন্য একটি পরীক্ষার কথা ভাবলেন। S′ কাঠামোর নিরীক্ষক (সংক্ষিপ্তভাবে আমরা তাকে S′ নিরীক্ষক বলব) দুটি বল A ও Bর মধ্যে সংঘর্ষ ঘটিয়ে পরীক্ষা করে দেখলেন, ভরবেগ সংরক্ষিত হয় কি না (চিত্র প-3a)। দুটি বলের সংঘর্ষের পূর্বে বেগ $u_1'$ ও $u_2'$ বিপরীত দিকে। আমরা দক্ষিণমুখী বেগকে ধনাত্মক এবং বামমুখী বেগকে ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা সূচিত করব। কাজেই সংঘর্ষের পূর্বে মোট ভরবেগের পরিমাণ $m_1u_1'-m_2u_2'$ ছিল (চিত্র প-3a)। সংঘর্ষের পর বল দুটি বিপরীত দিকে $U_1'$ ও $U_2'$ বেগ নিয়ে ছুটে চলে (চিত্র প-3b)। মনে করা যাক যে, বল দুটি আদর্শ স্থিতিস্থাপক, তা হলে S′ নিরীক্ষকের মতে ভরবেগ সংরক্ষিত হবে কারণ S′ জাড্যিক কাঠামো (এখানে নিউটনের গতিসূত্রগুলি সত্য)। অতএব

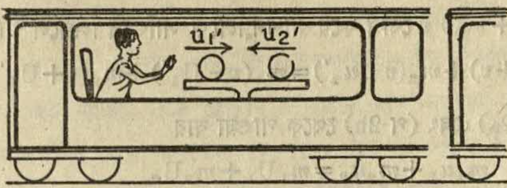
$$m_1u_1'-m_2u_2'=m_2U_2'-m_1U_1' \qquad (প—1)$$

এখন S নিরীক্ষকের কাছে মনে হবে, বল দুটির সংঘর্ষের পূর্বের বেগ যথাক্রমে (চিত্র প-3c)

$$u_1=u_1'+v \text{ এবং } u_2=v-u_2' \qquad (প—2a)$$

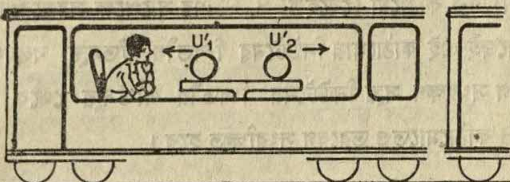
অনুরূপে সংঘর্ষের পরে বেগ যথাক্রমে (চিত্র প-3d)

$$U_1=v-U_1' \text{ এবং } U_2=v+U_2' \qquad (প—2b)$$



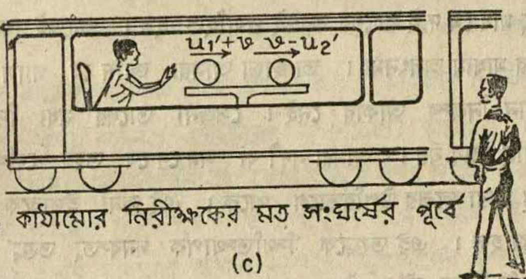

S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের মত সংঘর্ষের পূর্বে

(a)



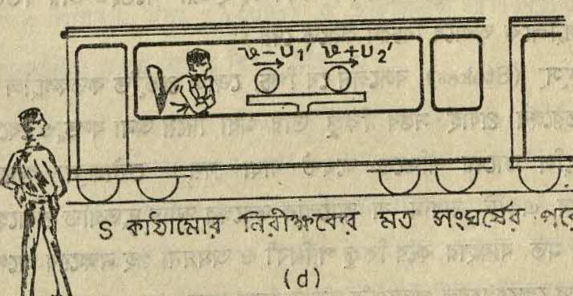

S′ কাঠামোর নিরীক্ষকের মত সংঘর্ষের পরে

(b)




S কাঠামোর নিরীক্ষকের মত সংঘর্ষের পূর্বে

(c)




S কাঠামোর নিরীক্ষকের মত সংঘর্ষের পরে

(d)

চিত্র প-3

এখানে আমরা ধরে নিয়েছি যে, $v > u_2'$ এবং $v > U_1'$। সমীকরণ (প-1) এর দু'দিকে $(m_1 + m_2)\,v$ যোগ করে রাশিগুলিকে সাজিয়ে লিখলে পাওয়া যায়

$$m_1(u_1' + v) + m_2(v - u_2') = m_1(v - U_1') + m_2(v + U_2')$$

সমীকরণ (প-2a) এবং (প-2b) থেকে পাওয়া যায়

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2$$

অতএব S কাঠামোতেও ভরবেগ সংরক্ষিত হবে। এটা কোন আশ্চর্য ব্যাপার নয় কারণ S জাড্যিক কাঠামো (যেহেতু S, S' এর সাপেক্ষে সরলরেখায় সমবেগে গতিশীল), কাজেই এই কাঠামোয় নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র বলবৎ থাকবে। যেহেতু ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্র নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র থেকে প্রমাণ করা যায়, অতএব S কাঠামোতেও ভরবেগ সংরক্ষিত হবে।

**প-3. ইথারতত্ত্ব** এ ব্যাপারে আমরা 1-6 বিভাগে সংক্ষেপে আলোচনা করেছি। আলোর সমবর্তনের আবিষ্কার থেকে জানা গেল যে আলোক তরঙ্গ তির্যক, শব্দ তরঙ্গের মত অনুদৈর্ঘ্য নয়। কিন্তু আমাদের জানা সমস্ত স্থিতিস্থাপক বস্তু মাধ্যমে দুই ধরণের তরঙ্গই প্রবাহিত হয়। কাজেই কল্পনা করা হল যে, ইথার মাধ্যম অসংনম্য। তা ছাড়া আমরা জানি যে গ্যাস ও তরল পদার্থের কোন নিজস্ব আকার নেই। সেজন্য তাদের মধ্য দিয়ে তির্যক কম্পনের প্রবাহ সম্ভব নয়। আমরা নদী বা সমুদ্রে যে তরঙ্গ দেখি সেগুলি তির্যক কিন্তু তারা জলের উপরিভাগে থাকে। এই জন্য ইথারকে ঘন বস্তু বলে মনে করা হল। এই তত্ত্বকে 'স্থিতিস্থাপক ঘনবস্তু তত্ত্ব' বলা হয়। কিন্তু আশ্চর্যের বিষয় এই যে, ইথার ঘনবস্তু হওয়া সত্ত্বেও তার ভিতর দিয়ে গ্রহ নক্ষত্রগুলিকে অবাধে বিচরণ করতে দেয়।

স্টোক্‌স্‌ (Stokes) বললেন যে পিচ, জেলি প্রভৃতি কতকগুলি বস্তুতে তির্যক তরঙ্গের প্রবাহ সম্ভব কিন্তু তার মধ্য দিয়ে অন্য বস্তুও যেতে পারে, কিন্তু এগুলি তাদের গতিতে যথেষ্ট বাধা দেয়। স্টোক্‌স্‌ বললেন যে, ইথার এমন একটি মাধ্যম যা আলোক তরঙ্গের অতি দ্রুতগতি প্রবাহের ক্ষেত্রে ঘনবস্তুর মত ব্যবহার করে কিন্তু পৃথিবী ও অন্যান্য গ্রহ নক্ষত্রের অপেক্ষাকৃত মন্থর গতির ক্ষেত্রে তরল পদার্থের মত ব্যবহার করে।

এখানে বলা দরকার যে, ম্যাক্সওয়েলের জন্মের বহু পূর্বেই ইথার মাধ্যমের

কথা লোকে চিন্তা করেছিল। গ্রীক দার্শনিকরা বিশ্বাস করতেন যে, পৃথিবীর সকল বস্তু চারটি মৌলিক পদার্থ দিয়ে গঠিত যথা, মাটি, জল, অগ্নি এবং বায়ু। এ ছাড়া বায়ুমন্ডলের উপরিভাগে অর্থাৎ গ্রহ নক্ষত্রগুলির মাঝে আছে ইথার। এই মতের সঙ্গে প্রাচীন ভারতীয় দার্শনিকদের মতের মিল আছে। শেষোক্ত ব্যক্তিরা মনে করতেন যে, বিশ্ব ব্রহ্মান্ড পঞ্চভূত দ্বারা সৃষ্ট যথা ঃ ক্ষিতি, অপ, তেজ, মরুৎ ও ব্যোম। বিজ্ঞানে প্রথম ইথারের ধারণা নিয়ে আসেন দে কার্ট (Descartes) (1596-1650)।

নিউটনীয় বলবিদ্যা এবং নিউটনের মহাকর্ষ তত্ত্বের প্রাথমিক সাফল্যের ফলে বিজ্ঞানীরা প্রাকৃতিক ঘটনাগুলিকে বলবিদ্যাদ্বারা ব্যাখ্যা করতে চেষ্টা করেন কারণ তাঁরা বলবিদ্যার ধারণাগুলির সঙ্গে বেশী পরিচিত ছিলেন। দে কার্টের যুগ থেকে শুরু করে ঊনবিংশ শতাব্দীর শেষ পর্যন্ত বিজ্ঞানে এই অবস্থা চলে। এই যুগের শেষের দিকে লর্ড কেলভিন (Lord Kelvin) লিখেছিলেন, "কোন বস্তু বিশ্লেষণ করার সময় তার যান্ত্রিক প্রতিরূপ নির্মাণ না করলে আমি সন্তুষ্ট হই না। আমি তাতে সক্ষম হলে তবে আমি বুঝতে পারি নতুবা পারি না।" শব্দ তরঙ্গের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি সফল হয়েছিল।

দে কার্টের পর রবার্ট হুক এবং তার পর আইজাক নিউটন (1642-1727) ইথারের কথা বলেন। নিউটনের মতানুযায়ী আলোক বস্তুকণার সমষ্টি কিন্তু তিনি মনে করতেন যে, কোন বস্তুর উপর আলোক রশ্মি পড়লে ইথার মাধ্যমে তরঙ্গের সৃষ্টি হয়। তার পরবর্তী যুগে ফ্রেনেল (Fresnel) (1788-1827) ইথার মাধ্যমের গুণাগুণ দ্বারা আলোকের বস্তুর সহিত মিথষ্ক্রিয়া ব্যাখ্যা করেন। ইয়ং (Young) ও হাইগেন্‌জ (Huyghens) আলোকের তরঙ্গতত্ত্বের আরও উন্নতি বিধান করেন।

মাইকেল ফ্যারাডে (1791-1867) প্রথম বলেন যে, ইথার তড়িৎ চুম্বকীয় বলের মাধ্যম হিসাবে কাজ করে। ফ্যারাডে তড়িৎ আহিত বস্তুগুলির মধ্যে সুস্পষ্ট চিত্রবৎ বলরেখার অস্তিত্ব কল্পনা করেন। 1853 খ্রীষ্টাব্দে বার্ণার্ড রীমান (1826-66) প্রস্তাব করেন যে, ইথার মাধ্যম মহাকর্ষ বল, তড়িৎ চুম্বকীয় বল এবং আলোককে একস্থান থেকে অন্যস্থানে প্রেরণ করে। তার পর জেম্‌স্ ক্লার্ক ম্যাক্সওয়েল (James Clerk Maxwell) (1831-79) ও তাঁর

সমসাময়িক বিজ্ঞানীরাও ইথারের গুণাগুণ নিয়ে আলোচনা করেন। ম্যাক্স-ওয়েলও প্রথমদিকে তাঁর খাতাগুলিতে নক্সা দ্বারা সূচিত করেছিলেন কি ভাবে মধ্যবর্তী মাধ্যম তড়িৎ আহিত বস্তুগুলির মধ্যে বল ও অন্যান্য প্রভাব প্রেরণ করে।

উপরের আলোচনা থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, তড়িৎ চুম্বকীয় ঘটনাগুলির যান্ত্রিক প্রতিরূপ দেবার জন্যই ইথারের প্রয়োজন হয়েছিল। আমরা ম্যাক্স-ওয়েলের তড়িৎ ও চুম্বকীয় ক্ষেত্র ভেক্টরগুলিকে ভিত্তি করে তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব আলোচনা করতে পারি। শব্দ তরঙ্গ এবং জলের উপরিভাগের তরঙ্গ উভয় ক্ষেত্রেই বস্তু মাধ্যমের কণাগুলির ভ্রংশ $\xi$ একটি তরঙ্গ সমীকরণ মেনে চলে :

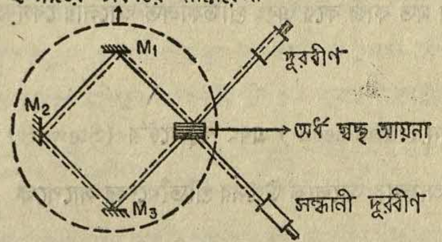
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}-v^2\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=0 \qquad (প—3)$$

এখানে $v$ তরঙ্গের বেগ। বস্তুকণাগুলি মধ্যক অবস্থানের দুই দিকে নড়াচড়া করে, তাদের ভ্রংশ ভেক্টরের মানের পৌনঃপুনিকভাবে হ্রাস বৃদ্ধি ঘটে। অনুরূপে তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের ক্ষেত্রে তড়িৎ ক্ষেত্র ও চুম্বকীয় ক্ষেত্র ভেক্টরের মানের পৌনঃপুনিকভাবে হ্রাস বৃদ্ধি ঘটে এবং সেগুলিও তরঙ্গ সমীকরণ মেনে চলে। কাজেই একেও তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ বলতে কোন আপত্তি নেই। সকল ঘটনারই যে যান্ত্রিক প্রতিরূপ থাকবে, এ ধারণা করার কোন সঙ্গত কারণ নেই। মূলতঃ ইথার 'স্পন্দিত হয়' এই ক্রিয়াপদের কর্তা হিসাবে ব্যবহৃত হয়। পরে আইনষ্টাইন এবং তাঁর পরবর্তী বিজ্ঞানীরা ইথারের ধারণা পরিত্যাগ করতে বাধ্য হলেন। আইনষ্টাইন লিখেছিলেন "এই ইথারকে অন্যপ্রকার বস্তুর সঙ্গে এক ধরণের অশরীরী অস্তিত্ব বজায় রাখতে হয়েছিল।"

**প-4. ইথার টান প্রকল্প :** নেতিবাচক পরীক্ষার অপর একটি ব্যাখ্যা দেওয়া হল যে, পৃথিবী ইথার মাধ্যমকে পুরাপুরি সঙ্গে টেনে নিয়ে যায়, কোন জিনিস আঠা দিয়ে সেঁটে দিলে যেমন হয়। আর একটি উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। স্পঞ্জ যখন জলের মধ্য দিয়ে যায় তখন সঙ্গে অনেকখানি জল নিয়ে যায়। এই অনুমান করলে ইথার মাধ্যমের সাপেক্ষে পৃথিবী স্থির থাকবে। কিন্তু এর বিরুদ্ধে যুক্তি হল যে, তারার অপেরণের মান পৃথিবীর

কক্ষপথের বেগ থেকে গণনা করে পাওয়া যায়। অবশ্য পৃথিবী সংলগ্ন ইথার মাধ্যমকে টেনে নিয়ে গেলে দূরস্থিত ইথার পেছিয়ে পড়বে। ইথারের বিভিন্ন স্তরের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ থাকলে ইথার "বায়ু"র সৃষ্টি হবে। বায়ুপ্রবাহের ফলে যেমন শব্দতরঙ্গ মূল পথ থেকে বিচ্যুত হয় তেমনই ইথার প্রবাহের ফলে তারা থেকে আগত আলোক রশ্মি বেঁকে যেতে পারে এবং অপেরণের সৃষ্টি করতে পারে। কিন্তু ইথারের এমন কোন গতির কথা কল্পনা করা কঠিন যাতে মাইকেলসন-মর্লের পরীক্ষার নেতিবাচক ফলাফল বজায় রেখে সঠিক মানের অপেরণের সৃষ্টি করা যায়। তা ছাড়া আমরা দেখেছি যে, টোমাশেকের পরীক্ষায় (পৃ ৪৯) দেখা গেছে যে, সমুদ্রপৃষ্ঠ থেকে 3457 মিটার উচ্চতায় ও ইথার মাধ্যম ও পৃথিবীর মধ্যে কোন আপেক্ষিক বেগ নেই। আর পৃথিবীর যদি ইথার মাধ্যমকে পুরাপুরি টেনে নিয়ে যাবার ক্ষমতা থাকবে তা হলে মাইকেলসন ও গেলের পরীক্ষা দ্বারা (পৃ ৫২) পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণনের বেগ নির্ণয় কি ভাবে সম্ভব হল? অপরদিকে ফিজোর (Fizeau) পরীক্ষা (পৃ ২৯) প্রমাণ করেছিল যে, জলপ্রবাহ ইথার মাধ্যমকে নিজের আংশিক বেগ প্রদান করে। অবশ্য আমরা পূর্বেই বলেছি যে, লোরেণ্ট্সের ইলেকট্রন তত্ত্ব অনুযায়ী ইথার মাধ্যমকে স্থির রেখেও ফিজোর পরীক্ষার ফল ব্যাখ্যা করা যায়।

ইথার টানের ব্যাপারে আরও আলোকপাত করার জন্য লজ (Loge) একটি পরীক্ষা করেন। একটি ব্যতিচার মাপককে দু'টি 1 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট




চিত্র প-4

ইস্পাতের চাকতির মাঝখানে স্থাপন করা হয় (চিত্র প-4)। চাকতি দু'টি 2·5 সে. মি. ব্যবধানে থেকে একটি সাধারণ অক্ষধুরার চারদিকে উচ্চবেগে

ঘোরে। এই পরীক্ষার সময় ব্যতিচার মাপকটি স্থির ছিল। যদি মধ্যাস্থিত ইথারকে ঘূর্ণায়মান চাকতি দু'টি টানে তা হলে ব্যতিচার মাপকে ব্যতিচার নকশার অপসরণ ধরা পড়বে বলে আশা করা হয়েছিল। কিন্তু কোন অপসরণ দেখা যায় নি'। কাজেই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, ইথার মাধ্যমকে চাকতি দু'টি টানে না।

**প-5. রিৎসের নিক্ষেপ তত্ত্ব ঃ** অপর একটি ব্যাখ্যা হল যে, যদি আলোর বেগ মাধ্যমের উপর নির্ভর না করে এবং উৎসের বেগের উপর নির্ভর করে তা হলে নেতিবাচক ফল বোঝা যায়। সেইজন্য ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলিকে কিছুটা বদলে তিনটি তত্ত্বের প্রস্তাব করা হয়। এদের সকলকেই নিক্ষেপ তত্ত্ব বলা হয়। কোন একটি গতিশীল জাহাজ থেকে নিক্ষিপ্ত গোলার বেগ যেমন গোলার নিজের বেগ এবং জাহাজের বেগের ভেক্টর যোগফল থেকে পাওয়া যায় তেমনি এই তিনটি তত্ত্বেই আলোর বেগ আলোর উৎসের সাপেক্ষে $\frac{c}{n}$ হয়। অর্থাৎ আলোর চরম বেগ উৎসের বেগ ও নিজের বেগের ভেক্টর যোগফল থেকে পাওয়া যায়। নিক্ষিপ্ত বস্তুর সঙ্গে আলোর মিল থাকায় এই তত্ত্বগুলিকে নিক্ষেপ তত্ত্ব বলা হয়। এদের মধ্যে একমাত্র রিৎস্ই একটি সম্পূর্ণ ও সুসংবদ্ধ তত্ত্ব দিতে সক্ষম হন। উৎসের সাপেক্ষে আলোর বেগ তিনটি তত্ত্বেই একরূপ হলেও একটি গতিশীল আয়না থেকে প্রতিফলিত আলোর বেগ সম্বন্ধে এরা একমত নয় ঃ

(1) টলম্যানের ( Tolman ) তত্ত্ব অনুযায়ী আয়নাটি একটি নূতন আলোক উৎসের মত কাজ করে এবং প্রতিফলিত আলোর বেগ আয়নার সাপেক্ষে $\frac{c}{n}$ হবে।

(2) টমসন ( Thomson ) এবং স্টুয়ার্টের (Stewart) তত্ত্ব অনুযায়ী আলোর বেগ আয়নায় আলোক উৎসের প্রতিবিম্বের সাপেক্ষে $\frac{c}{n}$ হবে।

(3) রিৎসের ( Ritz ) তত্ত্ব অনুযায়ী আলোর বেগ প্রতিফলনের পরও মূল উৎসের সাপেক্ষে $\frac{c}{n}$ হবে।

সব কয়টি তত্ত্বই মাইকেলসন-মর্লে পরীক্ষার নেতিবাচক ফল ব্যাখ্যা করে।

যেহেতু আলোক উৎস পৃথিবীর উপর অবস্থিত, অতএব তার ইথারের সাপেক্ষে বেগ v, অর্থাৎ উৎসের সমান। তা ছাড়া উৎসের প্রতিবিম্বের বেগও v। ফলে সব কয়টি তত্ত্ব অনুযায়ী ফেরত পথে আলোর বেগ হবে c-v। অতএব এখনও ব্যতিচার মাপকের নাপেক্ষে বেগ হবে c। ফলে অলোকের যাতায়াত করতে সময় লাগবে $\frac{2l}{c}$। অনুরূপে দেখা যাবে যে, সমকোণে যাতায়াত করতেও সময় লাগবে $\frac{2l}{c}$। কাজেই মাইকেলসন-মর্লে পরিক্ষার নেতিবাচক ফল পাওয়া যায়।

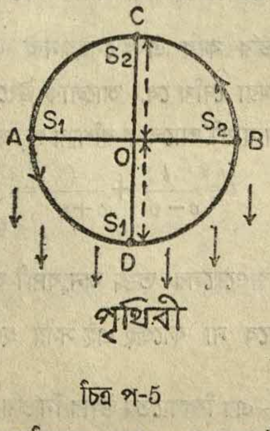
আমরা দেখেছি যে, পৃথিবীর চরম বেগ শূন্য হলে মাইকেলসন-মর্লে পরীক্ষায় যে ফল পাওয়া যেত এখনও সেই ফলই পাওয়া যায়। কাজেই পৃথিবীর উপর অনুষ্ঠিত পরীক্ষায় পৃথিবীর নিজের বেগকে আমরা উপেক্ষা করতে পারি। এবার নিক্ষেপ তত্ত্বগুলিকে প্রতিপাদন করার জন্য আলোর উৎস ও আয়নার পৃথিবীর সাপেক্ষে বিভিন্ন বেগ থাকলে তার ফলাফল পরীক্ষা করা যায়। টমসন (Thomson), মায়োরাণা (Mayorana) এবং স্টুয়ার্ট (Stewart) এই ধরণের পরীক্ষা করে দেখেন যে, তাঁদের ফলাফল প্রথম দুটি তত্ত্বের পরিপন্থী কিন্তু রিৎসের তত্ত্বের সঙ্গে পার্থক্য পরীক্ষার ভ্রমসীমার মধ্যে থাকে। তার কারণ, পার্থিব আলোক উৎস ব্যবহার করলে আমরা পরীক্ষায় আলোর আবদ্ধ পথ ব্যবহার করি। সে ক্ষেত্রে ম্যাক্সওয়েলের তত্ত্ব ও রিৎস তত্ত্বদ্বারা গণিত ফলের মধ্যে পার্থক্য $\frac{v}{c}$ এর দ্বিঘাতের ওপর নির্ভর করে এবং সেইজন্যই এই পরীক্ষায় ধরা পড়ে নি। উদাহরণস্বরূপ আমরা দেখি যে, আলোক উৎসের পৃথিবীর সাপেক্ষে বেগ v হলে রিৎস তত্ত্ব অনুযায়ী আলোক রশ্মির পৃথিবীর উপর $l$ দূরত্ব যাতায়াতে সময় লাগবে

$$t=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2l}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\approx\frac{2l}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (প-4)$$

ম্যাক্সওয়েলের তত্ত্ব অনুযায়ী আলোকরশ্মির বেগ উৎসের বেগের উপর নির্ভর করবে না কাজেই এই সময় হবে $\frac{2l}{c}$। এর সঙ্গে ( প-4 ) এর পার্থক্য $\frac{v}{c}$ এর দ্বিঘাতের উপর নির্ভর করে।

কাজেই পৃথিবীর বাহিরের কোন আলোক উৎস ব্যবহার করলে রিৎসের তত্ত্বের যথার্থ্য পরীক্ষা করা যাবে। 192৷ খ্রীষ্টাব্দে মিলার সূর্যের আলো এবং টোমাশেক তারার আলো ব্যবহার করে মাইকেলসন-মর্লে পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করেন কিন্তু কোন পার্থক্য লক্ষ করেন নি। টলম্যান ও লা রোজা বলেছিলেন, পৃথিবীর সূর্যের সাপেক্ষে গতি থাকার ফলে সূর্যের আলো ব্যবহার করলে ব্যতিচার নকশার কিছুটা অপসরণ লক্ষ্য করা উচিত। তা ছাড়া আমরা জানি যে, সূর্য নিজের অক্ষের চারদিকে ঘুরছে ফলে ব্যতিচার নকশায় আরও অনেক জটিলতার সৃষ্টি হবার কথা। তা ছাড়া রিৎসের তত্ত্ব সাধারণভাবে তরঙ্গতত্ত্বের পরিপন্থী কারণ আলো ছাড়া শব্দ ও অন্যান্য তরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গের বেগ শুধু মাধ্যমের উপরই নির্ভর করে, উৎসের উপর করে না।

কমস্টক (Comstock) 1910 খ্রীষ্টাব্দে বলেন যে, রিৎসের তত্ত্ব সত্য হলে আকাশের যুগ্মতারাগুলির কক্ষপথ পৃথিবী থেকে বিকৃত দেখাবে। তারপর 1913 খ্রীষ্টাব্দে একজন ওলন্দাজ জ্যোতির্বিজ্ঞানী ডি সিটার (De Sitter) কতকগুলি বর্ণালীতে যুগ্মতারার কক্ষপথ নিরীক্ষণ করেন। এই যুগ্মতারাগুলি পরস্পরের এত কাছে যে, তাদের দূরবীনের সাহায্যেও পৃথকভাবে দেখা যায় না কিন্তু তাদের কক্ষস্থ বেগ যথেষ্ট বেশী যাতে ডপলার (Doppler) প্রক্রিয়ার ফলে বর্ণালীতে লাল ও বেগুনীর দিকে অপসৃত যুগ্মরেখাসমূহ দেখা যায় কারণ কোন এক সময়ে একটি তারা পৃথিবীর দর্শকের দিকে এগিয়ে আসে এবং অপরটি দূরে সরে যায়। বর্ণালী বিশ্লেষণদ্বারাই শুধু এই সকল যুগ্মতারার অস্তিত্ব বোঝা যায়; সেজন্য তাদের 'বর্ণালীগত যুগ্মতারা' বলা হয়।



চিত্র প-5

গণনা সহজ করার জন্য আমরা মনে করি যে, যুগ্মতারার দুটি অংশ $S_1$ এবং $S_2$ (চিত্র প-5) তাদের সাধারণ ভরকেন্দ্রের চারদিকে বৃত্তাকার কক্ষপথে পরিক্রমা করে। তারা দুটির

অবস্থান A এবং B এমনভাবে নেওয়া হয়েছে যে, ঐ দুই বিন্দুর সংযোজন-কারী ব্যাস AB দৃষ্টিপথের উপর লম্ব। $S_1$ দর্শকের দিকে এবং $S_2$ দর্শকের বিপরীত দিকে v বেগ সম্পন্ন। পৃথিবী থেকে এই যুগ্মতারার দূরত্ব বেশী অর্থাৎ পৃথিবীর দর্শকের কাছে কক্ষপথের কৌণিক ব্যাস ছোট হলে A ও B এই দুই অবস্থান থেকে পৃথিবীর দূরত্ব কেন্দ্রবিন্দু O থেকে দূরত্বের সমান ধরা যায়। কাজেই A বিন্দুতে $t_{1A}$ কালাঙ্কে আলোকরশ্মি $S_1$ থেকে নির্গত হলে পৃথিবীতে পেঁছিবার কালাঙ্ক হবে

$$t'_{1A}=t_{1A}+\frac{d}{c+v} \qquad (প—5)$$

যেখানে $d$ পৃথিবী থেকে Oর দূরত্ব।

2T যদি তারা দুটির সংক্রমণকাল হয় তা হলে T সময়ের পর $S_2$ A বিন্দুতে এবং $S_1$ B বিন্দুতে থাকবে। সেই ঘটনা পৃথিবীতে দেখা যাবে $t_1{}'_B$ কালাঙ্কে ঃ

$$t'_{1B}=t_{1B}+\frac{d}{c-v}=t_{1A}+T+\frac{d}{c-v} \qquad (প—6)$$

কাজেই পৃথিবীর নিরীক্ষকের কাছে এই অর্ধসংক্রমণ কালের আপাত পরিমাণ হবে

$$T'_1=t'_{1B}-t'_{1A}=T+\left(\frac{d}{c-v}-\frac{d}{c+v}\right)=T+\tau \qquad (প—7)$$

যেখানে

$$\tau=\frac{d}{c-v}-\frac{d}{c+v}=\frac{2vd}{c^2-v^2}\simeq\frac{2vd}{c^2} \qquad (প—8)$$

এবার $S_2$ তারাটির কথা ধরা যাক। যখন $S_2$ B বিন্দুতে অবস্থিত তখন $S_1$ ও A বিন্দুতে অবস্থিত। কাজেই এই দুই কালাঙ্ক সমান হবে, অর্থাৎ $t_{1A}=t_{2B}$ এই কালাঙ্কে $S_2$ থেকে যে আলোকরশ্মি নির্গত হয় তা পৃথিবীর নিরীক্ষকের কাছে পেঁছবে $t_2{}'_B$ কালাঙ্কে

$$t'_2=t_{B2B}+\frac{d}{c-v} \qquad (প—9)$$

অনুরূপে T সময় পরে $S_2$ A বিন্দুতে যাবে এবং সেই ঘটনা পৃথিবীতে দেখা যাবে $t'_{2A}$ কলাঙ্কে :

$$t'_{2A} = t_{2A} + \frac{d}{c+v} = t_{2B} + T + \frac{d}{c+v} \qquad (\text{প}-10)$$

অতএব এই অর্ধ সংক্রমণকালের আপাত পরিমাণ হবে

$$T'_2 = t'_{2A} - t_2{}'_B = T - \tau \qquad (\text{প}-11)$$

কাজেই এই দুই সংক্রমণকালের পরিমাণ সমান নয়। অতএব পৃথিবীর নিরীক্ষকের কাছে যুগ্মতারার কক্ষপথ উৎকেন্দ্রিক বলে মনে হবে। ডপলার অপসরণ থেকে কক্ষপথের বিভিন্ন স্থানে তারার বেগ জানা যাবে, কাজেই কক্ষপথের আপাত আকার এবং বিভিন্ন স্থানে বেগের পরিমাণ কেপলারের সূত্রের ( অর্থাৎ নিউটনের গতিসূত্রের ) পরিপন্থী বলে মনে হবে।

কোন কোন যুগ্মতারার ক্ষেত্রে $\tau$ এর মান Tর সমতুল্য, সে সমস্ত ক্ষেত্রে কক্ষপথের আপাত উৎকেন্দ্রিকতা অত্যন্ত বেশী হবে। এছাড়া অন্য অনেক অদ্ভুত ঘটনা ঘটতে পারে। এবার $S_1$ ও $S_2$র C ও D বিন্দুতে অবস্থানের কথা ধরা যাক। C বিন্দুর পৃথিবী থেকে দূরত্ব $d+a$ এবং D বিন্দুর দূরত্ব $d-a$। এই দুই বিন্দুতে তারার বেগ দৃষ্টিপথের সহিত সমকোণে অবস্থিত কাজেই আলোর বেগ হবে c। অতএব $t_{1D}$ কালাঙ্কে $S_1$ থেকে নির্গত রশ্মি পৃথিবীতে পৌছবে $t'_{1D}$ কালাঙ্কে :

$$t'_{1D} = t_{1D} + \frac{d-a}{c} \qquad (\text{প}-12)$$

অনুরূপে $t_{2C}$ কালাঙ্কে S থেকে নির্গত রশ্মি পৃথিবীতে পৌঁছবে $t'_{2C}$ কালাঙ্কে :

$$t'_{2C} = t_{2C} + \frac{d+a}{c} \qquad (\text{প}-13)$$

এবার সমীকরণ ( প-13 ) থেকে ( প-9) বিয়োগ করলে পাই

$$t'_{2C} - t'_{2B} = (t_{2C} - t_{2B}) + \left(\frac{d+a}{c} - \frac{d}{c-v}\right)$$

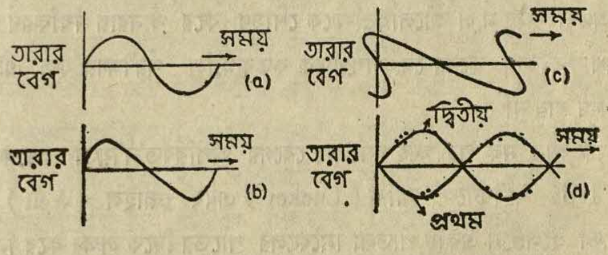
$$= \frac{T}{2} + \frac{a(c-v) - vd}{c(c-v)} = \frac{T}{2} + \frac{a}{c} - \frac{vd}{c^2\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

$$\simeq \frac{T}{2} = \frac{a}{c} - \frac{vd}{c^2} \qquad (\text{প}-14)$$

এখানে আমরা $\frac{v}{c}$ এর দ্বিঘাতকে উপেক্ষা করেছি। যদি $\frac{vd}{c^2} > \left(\frac{a}{c} + \frac{T}{2}\right)$ হয় তা বলে অনেক সময় অদ্ভূত ব্যাপার দেখা যায়। দেখা যাক, $\frac{vd}{c} > \frac{a}{c}$ শর্তের অর্থ কি? এই শর্তকে অন্য ভাবেও লেখা যায়

$$\frac{v}{c} > \frac{a}{d}$$

সাধারণতঃ $\frac{v}{c}$ অত্যন্ত ক্ষুদ্র সংখ্যা কাজেই যুগ্মতারার দূরত্ব $d$ যথেষ্ট বেশী হলে এই শর্ত মানা সম্ভব। আর $\frac{v}{c} - \frac{a}{d}$ যথেষ্ট বেশী হলে $\frac{vd}{c^2} > \frac{a}{c} + \frac{T}{2}$ এবং $t'_{2C} - t'_{2B}$ হওয়া সম্ভব। তখন $S_2$ তারা B থেকে Cর দিকে যাবার পরিবর্তে উল্টো দিকে যাচ্ছে বলে মনে হবে। তা ছাড়া এরকম অবস্থায় একটি তারার পূর্বের ও পরের অবস্থান একসঙ্গে দেখা সম্ভব। পূর্বের অবস্থানকে ভৌতিক প্রতিবিম্ব বলা হয়।




চিত্র প-6

আমরা দেখেছি যে, যুগ্মতারার দূরত্ব বেশী হলে এই ধরনের অদ্ভূত ঘটনা ঘটা সম্ভব। দূরত্ব কম হলে কক্ষপথের আপাত আকার ও প্রকৃত আকারের মধ্যে পার্থক্য কম হবে। চিত্র প-6 (a) এর লেখ একটি নিকটবর্তী যুগ্মতারার একটির বেগের সময়ের সঙ্গে পরিবর্তন সূচিত করে। তারার দূরত্ব কিছুটা বেশী হলে চিত্র প-6 (b) এর মত লেখ পাওয়া যাবে। দূরত্ব আরও বেশী হলে লেখ আরও বিকৃত হয়ে যাবে ( চিত্র প-6 (c) )। কক্ষের

নিরীক্ষকাভিমুখী অংশ থেকে আলো পৃথিবীতে পূর্বে এসে পেঁছায় এবং বিপরীতগামী অংশ থেকে পরে এসে পৌঁছায়। ডি সিটার এই ধরনের বিকৃতি লক্ষ্য করেন নি। পরে জয় এবং স্যানফোর্ড ( Joy & Sanford ) এই পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করেন। উদাহরণস্বরূপ চিত্র প-6 (d) তে Castor C যুগ্মতারার দু'টি সদস্যের বেগের লেখ দেওয়া হয়েছে। কাজেই পরীক্ষার ফলাফল রিৎসের নিক্ষেপ তত্ত্বের পরিপন্থী। যদি নিরীক্ষকাভিমুখে তারার বেগ v হয় এবং তা থেকে নির্গত আলোর বেগ হয়

$$v_{\text{আলো}} = c + Kv_{\text{তারা}} \qquad (\text{প}—15)$$

তাহলে ডি সিটার সিদ্ধান্ত করেন যে, $K < 0.002$।

ফক্স ( Fox ) ডি সিটারের এবং অনুরূপ পরীক্ষাগুলির ফলাফলের অন্য ধরণের ব্যাখ্যা করেন। তাঁর মতে যুগ্মতারাগুলির চারদিকে গ্যাসের মেঘ থাকলে $c+v$ বা $c-v$ বেগে নির্গত আলোকরশ্মি এই মেঘদ্বারা শোষিত ও পুনরায় নিক্ষিপ্ত হয়। ফলে পৃথিবীতে আগত আলোকের বেগ c হবে। এইরূপ যুক্তি দিয়ে ফক্স রিৎসের তত্ত্ব প্রতিপাদন করার জন্য অনুষ্ঠিত অনেকগুলি বৈজ্ঞানিক পরীক্ষার সিদ্ধান্তকে নাকচ ক'রে দেন। তাঁর মতে জানালা, লেন্স অথবা বায়ু মূল আলোকরশ্মিকে শোষণ করে পুনরায় বিকিরণ করে। ফক্স অবশ্য স্বীকার করেন যে, সাম্প্রতিক কতকগুলি পরীক্ষার ফল এইভাবে ব্যাখ্যা করা যায় না।

অনেক আধুনিক পরীক্ষাই আলোর বেগের অপরিবর্তনীয়তার পক্ষে রায় দেয়। 1952 খৃীষ্টাব্দে লাকি (.Luckey ) এবং ওয়াইল (Weil) 310 মি. ই. ভো. ইলেক্ট্রন একটি পাতলা নিকেলের পাতের দিকে লক্ষ্য করে নিক্ষেপ করেন। তা থেকে ব্রেমস্ট্রালুঙের ( Bremsstrahlung ) ফলে 170 মি. ই. ভো. শক্তি সম্পন্ন গ্যামা রশ্মি নির্গত হয় এবং ইলেক্ট্রনের শক্তি কমে 140 মি. ই. ভো. হয়। এই গ্যামা রশ্মির বেগ নির্ণয় করা হয়েছিল ; $2.97 \times 10^{10}$ সে মি./সে $\pm 1$ প্রতিশত। এর পর 1963 খৃীষ্টাব্দে সাদে ( Sadeh ) উচ্চ-শক্তি সম্পন্ন পজিট্রন ( Positron ) একটি লক্ষ্য বস্তুর উপর নিক্ষেপ করেন। সেখানকার ইলেক্ট্রনের সঙ্গে মিলিত হওয়ায় বস্তুকণা দু'টির বিলয় হয় এবং দু'টি ফোটন দু'দিকে নির্গত হয়। পজিট্রনের গতির দিকে নির্গত ফোটনের

বেগ বেশী হবে বলে আশা করা হয়েছিল কিন্তু বিলয়ের অবস্থান থেকে সমদূরবর্তী দু'টি কাউন্টারে ফোটন দু'টি একই সময়ে পেঁছায় অর্থাৎ ফোটন দু'টির বেগ একই হবে। যেহেতু শেষোক্ত পরীক্ষাটিতে ইলেক্ট্রন স্থির থাকে এবং পজিট্রনটি গতিশীল, কাজেই ফলাফলের সহজ ব্যাখ্যা করা মুস্কিল।

ব্যবকক (Babcock) এবং বার্গমান ( Bergman) 1964 খ্রীষ্টাব্দে দু'টি আলোক রশ্মিকে গতিশীল কাঁচের পাতের দু'দিকে প্রেরণ করে একটি ব্যতিচার মাপকে ব্যাতিচার নকশার অপসরণ লক্ষ করেন। তাঁদের পরীক্ষাও রিৎসের তত্ত্বের বিপক্ষে রায় দেয়।

1964 খ্রীষ্টাব্দে ফিলিপাস ( Filippas ) এবং ফক্স ( Fox ) উদাসীন পাই মেশনের ক্ষয়ের ফলে নির্গত গ্যামা রশ্মির বেগ নির্ণয় করে একই সিদ্ধান্তে পেঁছান। একই বছরে সবশেষে আলভেগার ( Alväger ), ফার্লে (Farley), কিয়েলমান ( Kjellman ) এবং ওয়ালিন ( Wallin ) 6 জি. ই. ভো.-র অধিক শক্তি সমন্বিত উদাসীন পাই মেসনের ক্ষয় লক্ষ করেন : $\pi^{\circ}\rightarrow\gamma+\gamma$ এই পায়ন কণিকাগুলির বেগ আলোর বেগের শতকরা 99·98 ভাগ ছিল। এদের 31 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করার সময় নির্ণয় করা হয়। রিৎসের তত্ত্ব অনুযায়ী পায়নের গতির দিকে আলোর বেগ বেশী হওয়া উচিত ছিল। কিন্তু পরীক্ষায় আলোর বেগের মান পাওয়া যায় $2{\cdot}9977\pm0{\cdot}0004\times10^{8}$ মি / সে। এই মান আলোর বেগের আদর্শমানের ( $2{\cdot}9979\times10^{8}$ মি /সে. ) খুব নিকটবর্তী। এই পরীক্ষাটির বিরুদ্ধে প্রায় কোন আপত্তি তোলা যায় না। কাজেই সমীকরণ ( প-15 ) এর Kর সর্বোচ্চ মান হবে $2\times10^{-4}$।

এখন জানা গেছে যে, কতকগুলি যুগ্মতারায় রঞ্জন রশ্মির উৎস আছে। আমরা দেখেছি যে, ডি সিটারের সিদ্ধান্তের বিরুদ্ধে আপত্তি তোলা যায় যে, হয়ত মূল আলোক রশ্মি অন্তবর্তী নভোমন্ডলের অণুগুলি দ্বারা সম্পূর্ণভাবে শোষিত হয় বা বিক্ষিপ্ত হয়ে যায় এবং আমরা পুনরায় বিকীর্ণ আলোক দেখতে পাই। গণনা করে দেখা যায় যে, সাধারণ দৃশ্যমান আলো প্রায় 2 আলোবছর দূরত্বে এসে খুব ক্ষীণ হয়ে পড়ে। সবচেয়ে নিকটবর্তী তারার দূরত্বও এর চেয়ে অনেক বেশী। কিন্তু রঞ্জনরশ্মির কম্পাঙ্ক দৃশ্যমান আলোর চেয়ে অনেক বেশী, কাজেই তা অনেক বেশী দূরত্ব অবাধে অতিক্রম করতে পারে। কাজেই রঞ্জনরশ্মি বিকিরণকারী যুগ্মতারার ক্ষেত্রে উল্লিখিত আপত্তি

টিঁকবে না। তাই 1977 খ্রীষ্টাব্দে ব্রেশার ( Brecher ) তিনটি 70 kev রঞ্জনরশ্মি বিকিরণকারী যুগ্মতারার ক্ষেত্রে ডি সিটার পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করে তাদের দূরত্ব, আবর্তনকাল এবং ডপলার প্রক্রিয়ালব্ধ বেগ নির্ণয় করেন। তিনি দেখেন যে, সমীকরণ ( প-15 ) এর ধ্রুবসংখ্যা Kর মান খুব কম হলেও কক্ষপথের উৎকেন্দ্রিকতা এবং গ্রহণকালের মানের যথেষ্ট পরিবর্তন হবে। পরীক্ষালব্ধ ফলাফলের বিশ্লেষণ করে ব্রেসার ( Brecher ) সিদ্ধান্ত করেন যে, $K<2\times10^{-9}$। এটিই এ ব্যাপারের সবচেয়ে যথার্থ পরীক্ষা। লক্ষ্য করার বিষয় যে, এই বিভাগে বর্ণিত সকল পরীক্ষাই 1905 খ্রীষ্টাব্দে আইন-ষ্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কারের পরে অনুষ্ঠিত হয়। কিন্তু আইনষ্টাইন তাঁর প্রখর স্বজ্ঞার ফলে আলোর বেগের অপরিবর্তনীয়তা অনুমান করেছিলেন এবং তাঁর আপেক্ষিকতা তত্ত্বের অন্যতম ভিত্তিপ্রস্তর হিসাবে ব্যবহার করেন।

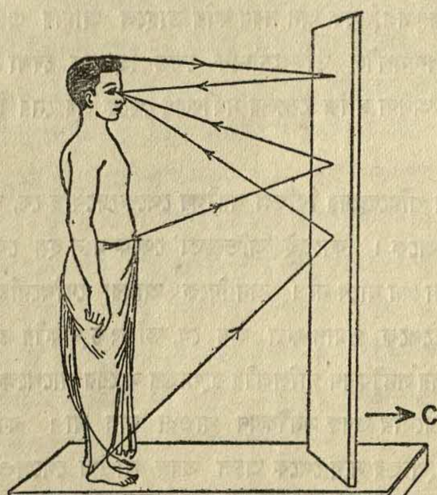
**প-6. ফিট্‌জজেরাল্ড-লোরেণ্ট্‌স্‌ সংকোচন ও তার ব্যাখ্যা ঃ**

লোরেণ্ট্‌স্‌ তাঁর বস্তুর বৈদ্যুতিক তত্ত্বের সাহায্যে এই সংকোচনের ব্যাখ্যা করবার চেষ্টা করেন। কিন্তু তিনি একথা প্রমাণ করতে পারেন নি যে, এই সঙ্কোচন অবশ্যম্ভাবী কাজেই অনেকেরই ধারণা হয়েছিল যে, শুধু মাইকেল-সনের পরীক্ষার নেতিবাচক ফল ব্যাখ্যা করার জন্যই এই সঙ্কোচন প্রকল্প উদ্ভাবিত হয়েছে। লোরেণ্ট্‌সের মতে বস্তু ধনাত্মক ও ঋণাত্মক আধানের সমষ্টি। ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি শুধু ইথার কাঠামোর জন্য সত্য। কাজেই সেই কাঠামোর সাপেক্ষে গতিশীল বস্তুর অভ্যন্তরস্থ আধানগুলি বৈদ্যুতিক:প্রবাহের সৃষ্টি করবে। বিদ্যুৎপ্রবাহ চৌম্বক ক্ষেত্রের সৃষ্টি করে কাজেই নূতন বলের প্রভাবে বস্তুর মধ্যস্থ তড়িৎ আহিত আয়নগুলির সাম্যের অবস্থান পরিবর্তিত হবে এবং লোরেন্ট্‌স্‌ প্রমাণ করেন এইভাবে $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$ অনুপাতে সঙ্কুচিত হতে পারে। লোরেণ্ট্‌সের মতে একটি দণ্ড যদি পৃথিবীর সাপেক্ষে স্থির থাকে এবং ইথারের সাপেক্ষে গতিশীল হয় তা হলে সেটি সঙ্কুচিত হবে। কিন্তু দণ্ডটি যদি ইথারের সাপেক্ষে স্থির থাকে এবং পৃথিবীর সাপেক্ষে গতিশীল হয় তা হলে সেটি সঙ্কুচিত হবে না। লোরেণ্ট্‌স্‌ এই অভিমত ব্যক্ত করার পর মর্লে এবং মিলার মাইকেলসনের ব্যতিচার মাপকের বাহুগুলিকে প্রথমে কাঠের এবং পরে ইস্পাতের তৈরী করে

পরীক্ষাটির পুনরাবৃত্তি করেন কিন্তু তাতেও নেতিবাচক ফল পান। তাঁদের আশা ছিল যে, যেহেতু কাঠ ও ইস্পাত ভিন্ন ধরনের অণুদ্বারা গঠিত, অতএব ইথারের সাপেক্ষে গতির ফলে তাদের সঙ্কোচনের পরিমাণ ভিন্ন রকমের হবে।

লর্ড র‍্যালে (Lord Rayleigh) বলেন যে, সংকোচন যদি সত্য হয় তা হলে ইথারের সাপেক্ষে গতিশীল মাধ্যম দ্বিবিধ প্রতিসারক হবে, একটি কাঁচের খণ্ডের উপর একপার্শ্বিক পীড়ন হলে যে অবস্থা হয়। লর্ড র‍্যালে 1902 খ্রীষ্টাব্দে স্বচ্ছ মাধ্যমের এই গুণ আবিষ্কার করার চেষ্টা করেন কিন্তু বিফল হন। ব্রেস (Brace) 1904 খ্রীষ্টাব্দে যথার্থতর যন্ত্রের সাহায্যে এই পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করেন কিন্তু তিনিও নেতিবাচক ফল পান। অতএব প্রকল্পিত ইথারের সাপেক্ষে গতি টানের সৃষ্টি করে না।

**প—7. আইনষ্টাইন কি ভাবে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কার করলেন ঃ** 'আলবার্ট আইনষ্টাইনের সঙ্গে কথোপকথন' শীর্ষক প্রবন্ধে আর এস শ্যাঙ্কল্যাণ্ড লিখেছিলেন ; "আমি অধ্যাপক আইনষ্টাইনকে জিজ্ঞাসা করেছিলাম,




চিত্র প-7

তিনি 1905 খ্রীষ্টাব্দের কত দিন আগে থেকে বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব নিয়ে কাজ করেছিলেন। তিনি আমাকে বলেছিলেন যে, তিনি 16 বছর বয়সে

শুরু করেছিলেন, প্রথমে তিনি ছাত্র ছিলেন, কাজেই স্বভাবতঃ অল্প কাল এই কাজে লাগাতে পারতেন, কিন্তু এই সমস্যাটা সব সময় তাঁর মনে ছিল। বহু নিষ্ফল চেষ্টার পর 'অবশেষে আমার খেয়াল হল যে, সময়ই সন্দেহভাজন !' ” কিন্তু 16 বছর বয়সে তিনি কোন সমস্যা সমাধান করার চেষ্টা করছিলেন ? তিনি কল্পনা করলেন যে, তিনি একটি আয়নার সামনে দাঁড়িয়ে নিজের মুখ দেখছেন। এখন যদি তিনি তাঁর আয়নাটি নিয়ে একটি রকেটের উপর থাকেন, যেটি সামনের দিকে আলোর বেগে ছুটে চলেছে, তা হলে তিনি আয়নায় নিজের মুখ দেখতে পাবেন কি ? তাঁর শরীরের বিভিন্ন অংশ থেকে আলোক রশ্মি গিয়ে আয়না থেকে প্রতিফলিত হয়ে তাঁর চোখে আসে বলে তিনি আয়নায় নিজের চেহারা দেখতে পান। গালিলেওর মত অনুসারে $c$ বেগে আয়নাটি সামনে দিকে ছুটে চললে সেই গাড়ীর কাঠামোয় আলোক রশ্মি স্থির থাকবে, সামনে দিকে এগোবে না এবং আয়নায় তিনি নিজের মুখ দেখতে পাবেন না। আইনস্টাইন লিখেছেন ঃ "আমি যদি $c$ বেগে (শূন্যস্থানে আলোর বেগ) একটি আলোক রশ্মিগুচ্ছকে অনুসরণ করি তাহলে আমার এই রশ্মিগুচ্ছকে অচল, দেশে স্পন্দনশীল তড়িৎচৌম্বক ক্ষেত্র হিসাবে দেখা উচিত। কিন্তু অভিজ্ঞতা থেকে অথবা ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ থেকে এধরনের জিনিস পাওয়া যায় না।

আমরা প্রথম পরিচ্ছেদের বিভিন্ন পরীক্ষা থেকে দেখেছি যে, আলোর শূন্যের বেগ সব সময় $c$ থাকে। কাজেই 'অভিজ্ঞতা' থেকে মনে হয় যে, অচল তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ পাওয়া যাবে না। অন্যদিকে আমরা দেখিয়েছি যে, ম্যাক্সও-ওলের সমীকরণ থেকে প্রমাণ করা যায় যে, তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গের বেগ $c$। কিন্তু ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ গালিলীয় রূপান্তর সূত্রের সাপেক্ষে অপরিবর্তনীয় নয় এবং সব কাঠামোয় তরঙ্গ সমীকরণ পাওয়া যায় না। কাজেই মনে হয় যে, গালিলীয় রূপান্তর সূত্র থেকে অচল তরঙ্গ পাওয়া গেলেও ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ থেকে এ ধরনের তরঙ্গ সমীকরণ পাওয়া যায় না। কাজেই হয় ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলি ভুল, অথবা গালিলীয় রূপান্তর সূত্র ভুল, অথবা কোন নিরীক্ষকের পক্ষে আলোর বেগে যাওয়া সম্ভব নয়। আমরা ভবিষ্যতে দেখব যে, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সম্ভাবনা দু'টি সত্য।

**প—৪. বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব বিষয়ে আইনষ্টাইন ও অন্যান্য বিজ্ঞানী-দের অবদানের তুলনা ঃ** আমরা আইনষ্টাইনের যুগান্তকারী আবিষ্কারের কথা সংক্ষেপে আলোচনা করেছি। সে যুগে প্রথমে এই আবিষ্কারকে অতি অল্প বিজ্ঞানীই মেনে নিতে পেরেছিলেন। এমন কি, মাইকেলসন যাঁর পরীক্ষার ফলাফল আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব এত সুন্দরভাবে ব্যাখ্যা করেছিল, তিনিও এই তত্ত্ব মেনে নিতে পারেন নি। তিনি আইনষ্টাইনকে বলেছিলেন, তিনি দুঃখিত যে, তাঁর কাজ এই "দানবের" সৃষ্টি করেছে।[1]

মাক্স প্লাঙ্ক ( Max Planck ) 1906 খ্রীষ্টাব্দে বার্লিনে অনুষ্ঠিত একটি বিজ্ঞানী সম্মেলনে আইনষ্টাইনের 1905 খ্রীষ্টাব্দে লেখা প্রবন্ধের দিকে সকলের দৃষ্টি আকর্ষণ করেন। পরে ক্রমশঃ অনেক বিজ্ঞানীই আইনষ্টাইনের মত গ্রহণ করতে লাগলেন। প্রায় পঞ্চাশ বছর পরে 1953 খ্রীষ্টাব্দে প্রসিদ্ধ গণিতজ্ঞ হুইট্যাকার (Whittaker ) ইথার ও তড়িৎ বিজ্ঞানের ইতিহাস সম্বন্ধে পুনরীক্ষণমূলক পুস্তক রচনা করেন যার নাম "History of the Theories of Aether and Electricity"। তাতে তিনি লিখেছিলেন "1905 খ্রীষ্টাব্দের হেমন্তকালে……আইনষ্টাইন একটি প্রবন্ধ প্রকাশ করেন যাতে তিনি লোরেন্টস্ ও পোয়াঁকারের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব কিছুটা সম্প্রসারিত করে আলোচনা করেন, এটি প্রচুর লোকের দৃষ্টি আকর্ষণ করেছিল।" হুইট্যাকারের এই উক্তি প্রসিদ্ধ হয়ে গেছে কারণ এখানে তিনি আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কারের কৃতিত্ব অস্বীকার করেন। এই প্রসঙ্গে দার্শনিক শোপেনহাওয়ারের কথা মনে পড়েঃ "কোন বৈজ্ঞানিক সত্য বিকাশের তিনটি পর্যায় আছে, প্রথম পর্যায়ে এটিকে অদ্ভুত বলে প্রত্যাখ্যান করা হয়, দ্বিতীয় পর্যায়ে স্বীকার করা হয় যে, এটি একটি সম্ভাব্য প্রকল্প যা পূর্বে বহুবার প্রস্তাবিত হয়েছে। তৃতীয় পর্যায়ে এটিকে স্বতঃসিদ্ধ বলে গ্রহণ করা হয়।"

এখন আমরা আলোচনা করব, আইনষ্টাইনের পূর্বে যাঁরা আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে আলোচনা করেছিলেন তাঁদের অবদান কতখানি গুরুত্বপূর্ণ ছিল এবং হুইট্যাকেরর ঐ উক্তি সমর্থনযোগ্য কি না।

---

1. Conversations with Albert Einstein by R. S. Shankland—Am. J. Phy. 31, 47-57 (1963)—পৃষ্ঠা 56.

আমরা দেখেছি যে, আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বের মূল ভিত্তি ছিল লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ। আমরা এও দেখেছি যে, কাঠামোর বেগ আলোর বেগের তুলনায় খুব কম হলে এই রূপান্তর সমীকরণ গালিলীয় রূপান্তর সমীকরণে পরিণত হয়। লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণের মত বিকল্প সমীকরণ প্রথম প্রকাশ করেন জার্মান বিজ্ঞানী ভোইগ্ট্ (Voigt) 1887 খ্রীষ্টাব্দে। তিনি তখন ইথারের ধারণা নিয়েই আলোর ডপলার প্রক্রিয়া সম্বন্ধে গবেষণা করছিলেন। তিনি চেষ্টা করছিলেন এমন একটি রূপান্তর সমীকরণ আবিষ্কার করতে, যাতে নিম্নলিখিত তরঙ্গ সমীকরণ

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0 \qquad (\text{প}-16)$$

এর রূপ অপরিবর্তিত থাকে। স্মরণ থাকতে পারে যে, এটা শূন্য স্থানে আলোক তরঙ্গের সমীকরণ

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda x+(1-\lambda)\alpha_1(\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z)-v\alpha_1 t \\ y' &= \lambda y+(1-\lambda)\alpha_2(\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z)-v\alpha_2 t \\ z' &= \lambda z+(1-\lambda)\alpha_3(\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z)-v\alpha_3 t \\ t' &= t-\frac{v}{c^2}(\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z) \end{aligned}\right\} \qquad (\text{প}-17)$$

যেখানে $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ তিনটি ধ্রুব সংখ্যা এবং $\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2=1$, $\lambda=(1-v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$

মাইকেলসনের পরীক্ষার ফলে দেখা গিয়েছিল যে, প্রত্যেক কাঠামোতে আলোর শূন্যের বেগ সমান, কাজেই প্রত্যেক কাঠামোতে তরঙ্গ সমীকরণের রূপ অভিন্ন হওয়া দরকার। আগামী পরিচ্ছেদে আমরা দেখব যে, আইনষ্টাইন এই ধরণের পদ্ধতি অনুসরণ করেই লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ আবিষ্কার করেন। কিন্তু এই সমীকরণে ভোইগ্ট্ ধরে নিয়েছিলেন যে, $\frac{\partial t'}{\partial t}=1$ অতএব এই সমীকরণ কাল প্রসারণ ব্যাখ্যা করতে পারবে না। সাধারণ লোরেণ্ট্স্ সমীকরণের [ সমীকরণ 3-79 ] সঙ্গে অন্য তিনটি সমীকরণের মিল আছে।

কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, ভোইগ্ট্ ধরে নিয়েছিলেন যে, কালের এককের কোন পরিবর্তন হয় না। যদি তিনি এই অনুমান না করতেন তা হলে এভাবে লোরেণ্ট্স্ রূপান্তর সমীকরণ আবিষ্কার করতে পারতেন। কিন্তু ভোইগ্ট্

জানতেন না যে, $t'$ অথবা $x'$, $y'$, $z'$ এর সঙ্গে প্রকৃত দেশ ও কালের পরিমাপের কোন সম্পর্ক আছে। কাজেই ভোইগ্‌টের আবিষ্কৃত $x'$, $y'$, $z'$ ও $t'$ গাণিতিক চিহ্নমাত্র।

ভোইগ্‌ট্‌ ছাড়া লারমরও ( Larmor ) 1900 খ্রীষ্টাব্দে লোরেণ্টস্‌ সমীকরণের পূর্বাভাস দেন। কিন্তু তাঁরও কাল রূপান্তরে কিছুটা ভুল ছিল। লোরেণ্ট্‌সের সমীকরণ থেকে তার পার্থক্য বেগের দ্বিঘাতের উপর নির্ভরশীল। তবে লারমরের সমীকরণেই প্রথম কালের এককের পরিবর্তন সূচিত হয়েছে।

1904 খ্রীষ্টাব্দে লোরেণ্ট্‌স্‌ এমন একটি রূপান্তর সূত্র আবিষ্কার করেন যা ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলিতে অপরিবর্তিত রাখে। এইভাবে তিনি সঠিক রূপান্তর সূত্র আবিষ্কার করেন[1] কিন্তু তিনিও ইথারের সাপেক্ষে গতির ধারণা ছাড়তে পারেন নি। লোরেণ্টস্‌ $t'$ কে 'স্থানীয় কাল' বলে অভিহিত করেন, কিন্তু তিনিও বুঝতে পারেন নি যে এর সঙ্গে প্রকৃত কালের কোন সম্পর্ক আছে। লোরেণ্ট্‌সের নিজের কথায়ই তা প্রকাশ পেয়েছে।

লোরেণ্ট্‌স্‌ 1915 খ্রীষ্টাব্দে তাঁর "Theory of Electrons" পুস্তকে মন্তব্য করেন ঃ "আমাকে এখন যদি শেষ পরিচ্ছেদ লিখতে হত তা হলে আমি নিশ্চয়ই আইনষ্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্বকে বিশিষ্ট স্থান দিতাম। এই তত্ত্বে তড়িৎ চুম্বকীয় ঘটনাগুলি গতিশীল কাঠামোয় খুব সহজ রূপ ধারণ করে যা আমি পূর্বে বুঝতে পারিনি। আমার অক্ষমতার প্রধান কারণ ছিল যে, আমি এই ধারণা আঁকড়ে ধরেছিলাম যে চল রাশি $t$ কেই শুধু প্রকৃত কাল হিসাবে ধরা যায় এবং আমার 'স্থানীয় কাল' একটি সহায়ক গাণিতিক রাশি ছাড়া কিছুই নয়। বিপরীত পক্ষে আইনষ্টাইনের তত্ত্বে $t'$ ও $t$ এর একই ভূমিকা, আমরা সকল ব্যাপার যদি $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ এর মাধ্যমে লিখতে চাই, আমাদের এই চল রাশিগুলিকে $x$, $y$, $z$ ও $t$ র মতই ব্যবহার করতে হবে।"

এর বারো বছর পরে 1927 খ্রীষ্টাব্দে লোরেণ্ট্‌স্‌ লেখেন ঃ "কালের রূপান্তরের প্রয়োজন হয়েছিল, তাই আমি 'স্থানীয় কালের' ধারণার প্রবর্তন করি, যার মান পরস্পরের সাপেক্ষে গতিশীল বিভিন্ন পরিমাপ কাঠামোয় বিভিন্ন।

---

1 লারমর ও লোরেণ্ট্‌সের মূল প্রবন্ধে যে রূপান্তর সূত্রগুলি আছে তাতে $x$ এর পরিবর্তে $x-vt$ লিখলে আমাদের সমীকরণ (2—3) পাওয়া যায়, কারণ তাঁরা প্রথমে গালিলীয় রূপান্তর সমীকরণ অনুযায়ী $x$ এর পরিবর্তন করেছিলেন।

কিন্তু আমি কখনও মনে করি নি যে এর সঙ্গে প্রকৃত কালের কোন সম্পর্ক আছে। আমার তখনও প্রকৃত কাল সম্বন্ধে প্রাচীন চরম কালের ধারণা ছিল যা কোন পরিমাপ কাঠামোর উপর নির্ভর করে না। আমার কাছে তখন একটি মাত্র প্রকৃত কালের অস্তিত্ব ছিল। আমি আমার কালের রূপান্তরকে কেবল মাত্র অনুসন্ধান মূলক কার্যকরী প্রকল্প হিসাবে মনে করেছিলাম। কাজেই আপেক্ষিকতা তত্ত্ব পুরোপুরি আইনষ্টাইনেরই আবিষ্কার এবং এ বিষয়ে কোন সন্দেহ থাকতে পারে না যে, তিনি এর কথা চিন্তা করতেন যদি এ বিষয়ে তাঁর পূর্বসূরীরা কেউ কোন কাজ নাও করতেন। এই ব্যাপারে তাঁর কাজ সমস্ত পূর্ববর্তী তত্ত্বগুলির উপর অনধীন।"

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণগুলিকে বিভিন্ন জাড্যিক কাঠামোতে অপরিবর্তনীয় প্রমাণ করার জন্য লোরেণ্ট্স্‌কে তড়িৎ ক্ষেত্র, চুম্বকীয় ক্ষেত্র এবং অন্যান্য রাশির রূপান্তর সূত্র আবিষ্কার করতে হয়েছিল। তিনি আধান ও তড়িৎ প্রবাহের ঘনত্বের সঠিক রূপান্তর সূত্র আবিষ্কার করতে পারেন নি। তাই তিনি দেখিয়েছিলেন যে, কেবলমাত্র তড়িৎ আধান ও প্রবাহবিহীন স্থানেই ম্যাক্স-ওয়েলের সমীকরণের গাণিতিক রূপ অপরিবর্তনীয় থাকে। পরে পোয়াঁকারে ও আইনষ্টাইন সঠিক রূপান্তর সূত্র নির্ণয় করেন। লোরেণ্ট্স্‌ 1921 খৃীষ্টাব্দে এ কথা স্বীকার করেন: "কয়েকটি ভৌতিক রাশির ক্ষেত্রে আমি সবচেয়ে উপযুক্ত রূপান্তর সূত্র নির্ণয় করি নি। সেটা করেছিলেন পোয়াঁকারে এবং তারপর আইনষ্টাইন ও মিনকভ্স্কি (Minkowski)।"

লোরেণ্টসের প্রায় সমসাময়িক ফরাসী বিজ্ঞানী পোয়াঁকারে ( Poincare ) আইনষ্টাইনের পূর্বসূরীদের মধ্যে আধুনিক আপেক্ষিকতা তত্ত্বের ধারণার সবচেয়ে কাছাকাছি এসেছিলেন। 'লোরেণ্টস্‌ রূপান্তর সমীকরণ' এই নামটি প্রথম ব্যবহার করেন পোয়াঁকারে। পোয়াঁকারের এই প্রবন্ধটি ও আইনষ্টাইনের 1905 খৃীষ্টাব্দের ঐতিহাসিক প্রবন্ধটি প্রায় একই সময়ে লেখা। এই প্রবন্ধে পোয়াঁকারে লোরেণ্ট্সের প্রবন্ধের রূপান্তর সূত্র সম্বন্ধীয় কয়েকটি ভুল সংশোধন করেন।[1] এখানে উল্লেখযোগ্য যে, পোঁয়াকারে প্রবন্ধের মুখবন্ধে লিখেছিলেন: "অতএব আমি এই অসম্পূর্ণ ফলাফলগুলি প্রকাশ করতে ইতস্ততঃ করিনি .।"

1 এই প্রবন্ধে পোয়াঁকারে 'লোরেণ্ট্স্‌ গ্রুপ' ( Lorents Group ) কথাটিও প্রথম ব্যবহার করেন।

কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, পোয়াঁকারের নিজেরও সমস্ত সমস্যা সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা ছিল না। কিন্তু অপর পক্ষে আইনষ্টাইনের প্রবন্ধে একটি সম্পূর্ণ তত্ত্ব প্রকাশিত হয়েছে।

দেখা যাক, 'আপেক্ষিকতা তত্ত্বের' কথা কে প্রথম বলেছিলেন। 1902 খ্রীষ্টাব্দে পোয়াঁকারে প্রথম এই কথা ব্যবহার করেন এই অর্থে যে, 'একমাত্র বস্তুসমূহের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করা সম্ভব'। তিনি আরও বলেছিলেন যে, 'চরমকাল' নেই। এর পূর্বে 1900 খ্রীষ্টাব্দে পোয়াঁকারে লিখেছিলেন : "আমাদের ইথার, সত্যসত্যই কি এর অস্তিত্ব আছে ? আমি বিশ্বাস করি না যে, যথার্থতর পরীক্ষাদ্বারা আপেক্ষিক ভ্রংশ ছাড়া আর কিছু নির্ণয় করা যাবে।"

পোয়াঁকারে আলোক রশ্মি ব্যবহার করে দূরবর্তী ঘড়ি মেলাবার একটি উপায় বর্ণনা করেন। তিনি একটি স্থির এবং একটি সচল কাঠামোর কথা আলোচনা করে বলেন যে, শেষোক্ত ক্ষেত্রে আমরা 'প্রকৃত কাল' নিরূপণ করতে পারি না এবং যা নির্ণয় করি সেটা হচ্ছে 'স্থানীয় কাল'। কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, পোয়াঁকারে তখনও মনে করতেন যে, প্রাচীনযুগের 'প্রকৃত কাল' বা চরম কাল দুই কাঠামোতে বর্তমান কারণ তার বিরুদ্ধে তিনি কোন কথাই বলেন নি। পোয়াঁকারে প্রাচীন নিউটনীয় কালকে প্রত্যাখ্যান করেন নি কাজেই তাঁর কাছে 'কাল' কথাটির দু'টি অর্থ ছিল। তিনি অবশ্য সিদ্ধান্ত করেছিলেন যে, "নিরীক্ষক কোন উপায়ই জানতে পারবে না, যে সে স্থির আছে অথবা তার চরম গতি আছে।"

এ বিষয়ে ডিঙ্গল্ ( Dingle ) বলেন : "প্রথম বিশ্বযুদ্ধের পূর্বে তিনটি স্বতন্ত্র ধারণাকে 'আপেক্ষিকতা তত্ত্ব' বলা হত। সেগুলি হচ্ছে :

"1. গতিসূত্রগুলি অচল অবস্থা ও অবিচল বেগের মধ্যে কোন পার্থক্য স্বীকার করে না ( নিউটন, রিৎস্ এবং প্রথম দিকে পোয়াঁকারে )

"2. সূত্রগুলি এই পার্থক্য স্বীকার করে কিন্তু গতির প্রকৃত ( শুধুমাত্র কল্পিত নয় ) ফলাফল এমন যে, বাহিরের বস্তুর সঙ্গে তুলনা ব্যাতিরেকে কাহারও পক্ষে তার নিজের গতি নির্ণয় করা অসম্ভব (লোরেন্ট্স্ এবং পরে পোয়াঁকারে )।

"3. কোন স্বাভাবিক স্থির অবস্থা বিচারের মাপকাঠি নেই, যার ফলে

কোন একটি বস্তুর এক ধরনের গতি আছে এবং অন্য ধরণের নেই এ কথা বলার কোন অর্থ নেই ( আইনষ্টাইন )।

"প্রথম যুগে যখন তড়িৎ গতি বিজ্ঞান আবিষ্কৃত হয়নি তখন প্রথমোক্ত ধারণায় সকলে বিশ্বাসী ছিলেন। তার পর একাধারে ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণের আবিষ্কার এবং অন্যধারে মাইকেলসন প্রমুখ বিজ্ঞানীদের পরীক্ষার চলতিবাচক ফলাফল থেকে দ্বিতীয় ধারণার উৎপত্তি হল। কিন্তু আইনষ্টাইন ছাড়া কেহই তৃতীয় সিদ্ধান্তে পেঁছিতে পারেন নি। কাজেই কোন একটি আপেক্ষিকতার ধারণা কোন একজন আবিষ্কার করেন নি। এই ধারণার ক্রমবিবর্তন ঘটেছে।"

উপরের আলোচনা থেকে স্পষ্ট যে, চরম কালের বিরুদ্ধে বৈজ্ঞানিক পরীক্ষাগুলি রায় দেওয়া সত্ত্বেও পোয়াঁকারে চরম কালের ধারণা পরিত্যাগ করতে পারেন নি। তাঁর মতে দ্বিবিধ কাল আছে কিন্তু তিনি কোথাও বলেন নি যে কি ভাবে আমরা এই দু'টি কালকে স্বতন্ত্রভাবে দেখব এবং কথার মধ্যে থেকে অস্পষ্টতা দূর করব। অন্যদিকে আইনষ্টাইন ছিলেন সংস্কারমুক্ত, প্রথমেই তিনি চরমকালের ধারণা অবাস্তব বলে পরিত্যাগ করেছেন।

পোয়াঁকারে 1906 খ্রীষ্টাব্দে লিখিত পুনরীক্ষণমূলক প্রবন্ধে দৈর্ঘ্য সঙ্কোচনেরও উল্লেখ করেন। লোরেণ্ট্সের মতে ইলেকট্রনের সাপেক্ষে গতিশীল নিরীক্ষকের কাছে গোলকাকার ইলেক্ট্রনকে উপগোলকাকার বলে মনে হবে। পোয়াঁকারে মন্তব্য করেন, "যদি আমরা লোরেণ্ট্সের তত্ত্বকে অপরিবর্তিত রাখতে চাই তা হলে অসহ্য অসঙ্গতি এড়াতে হলে আমাদের এক বিশেষ ধরণের বলের অস্তিত্ব কল্পনা করতে হবে যা সঙ্কোচন এবং অন্য দুই অক্ষের অপরিবর্তনীয় দৈর্ঘ্যের সৃষ্টি করে।" পোয়াঁকারে শেষে মন্তব্য করেছেন যে, মহাকর্ষ তত্ত্ব এবং তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব দুই স্থানেই আলোর বেগ একটি ধ্রুব সংখ্যা হিসাবে আসে। এর কারণ "হয়ত আমাদের পরিমাপ করার পদ্ধতির মধ্যে খুঁজে পাওয়া যাবে।" অথবা হয়ত "বিশ্বে সব কিছুরই উৎস তড়িৎ চুম্বকীয় ক্ষেত্র।" এই আলোচনা থেকে বোঝা যায় যে, পোয়াঁকারের মনে অনেকগুলি সম্ভাবনার কথা এসেছিল যার মধ্যে একটি ছিল আইনষ্টাইন প্রদত্ত ব্যাখ্যা। পোয়াঁকারের মনে দ্বন্দ্ব ছিল এবং তিনি আধুনিক আপেক্ষিকতা তত্ত্বে অর্ধেক বিশ্বাসী ছিলেন কাজেই পুরো বিষয়টিকে অবিসংবাদিত সত্য হিসাবে পাঠকদের সামনে তুলে ধরতে পারেন নি। কিন্তু আইনষ্টাইনের মনে

কোন দ্বিধা ছিল না। তিনি প্রথম থেকেই বুঝেছিলেন যে, আমাদের দৈর্ঘ্য এবং কালের পরিমাপ সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা থাকা প্রয়োজন। যদি একথা আমরা মেনে নিই যে, আলোর বেগ কাঠামো-নিরপেক্ষ তা হলে যুগপত্তার একটি মাত্র সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব। তারপর তিনি দেখান যে, আপেক্ষিকতা তত্ত্বের অন্যান্য সিদ্ধান্তগুলি এর অবশ্যম্ভাবী ফল হিসাবে পাওয়া যায়। আইনষ্টাইনের এই দ্বিধা ও সংশয়হীন আলোচনা তাই সমসাময়িক বিজ্ঞানীদের উপর পোয়াঁকারের প্রবন্ধগুলির চেয়ে বেশী প্রভাব বিস্তার করেছিল।

পোয়াঁকারে 1904 খ্রীষ্টাব্দে সেন্ট লুই-এ তাঁর বক্তৃতায় আইনষ্টাইনের দ্বিতীয় স্বীকার্যের পূর্বাভাস দেন, "হয়ত এইভাবে আমরা একটি সম্পূর্ণ বলবিদ্যার সৃষ্টি করতে পারব, যার আমরা এখন শুধু আভাস পাচ্ছি। এখানে জাড্য বেগের সঙ্গে বাড়বে এবং আলোর বেগ একটি অলঙ্ঘনীয় সীমা হবে।" এখানে পোয়াঁকারে আলোর বেগকে বস্তুর সর্বোচ্চ বেগ হিসাবে কল্পনা করেছেন এবং কল্পনা করেছেন যে, বস্তুর ভর তার বেগ বাড়ার সঙ্গে বাড়ে। আমরা ভবিষ্যতেআপেক্ষিকতা তাত্ত্বিক বলবিদ্যার আলোচনার সময় দেখেছি যে, আইনষ্টাইনের তত্ত্বেও বেগের বৃদ্ধির সঙ্গে ভরের বৃদ্ধির কথা বলা হয়েছে। লোরেন্ট্সের 1904 খ্রীষ্টাব্দের প্রবন্ধেও ভরের এই পরিবর্তনের কথা বলা হয়েছিল।

পোয়াঁকারে বিশ্বাস করতেন যে. লোরেন্ট্সের 1904 খ্রীষ্টাব্দের প্রবন্ধ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের শেষ কথা নয়। কিন্তু তিনিও কোন উন্নততর তত্ত্ব দিতে পারেন নি। এক কথায় বলতে গেলে পোয়াঁকারে একটি কর্ম পরিকল্পনার খসড়া তৈরী করেছিলেন কিন্তু সমস্যার সমাধান দেন নি। আইনষ্টাইন প্রথম এই সমাধান দিয়েছিলেন।

আইনষ্টাইন সম্বন্ধে ৎস্যুরিক পলিটেকনিকের প্রোফেসরের পদের জন্য সুপারিশ করতে গিয়ে পোয়াঁকারে 1911 খ্রীষ্টাব্দে লিখেছিলেন: "আইন-ষ্টাইন আমার পরিচিতদের মধ্যে সবচেয়ে সৃজনী শক্তি সম্পন্ন ব্যক্তিদের অন্যতম, অল্পবয়স সত্ত্বেও তিনি ইতিমধ্যেই এ যুগের শ্রেষ্ঠতম বিদ্বানদের মধ্যে একটি গৌরবময় স্থান অধিকার করে নিয়েছেন। তার সবচেয়ে প্রশংসনীয় গুণ হচ্ছে যে, তিনি অতি সহজে নূতন ধ্যান ধারণার সঙ্গে নিজেকে খাপ খাইয়ে নিতে পারেন এবং তা থেকে সকল ফলাফল নির্ণয় করেন। তিনি পুরাতন তত্ত্বকে

আঁকড়ে ধরে থাকেন না এবং পদার্থবিদ্যার কোন সমস্যার সম্মুখীন হলে, তার সমস্ত সম্ভাবনা শীঘ্রই বুঝতে পারেন......।"

কাজেই দেখা যাচ্ছে যে, লোরেন্‌ট্‌স্‌ ও পোয়াঁকারে উভয়ই আইনষ্টাইনের অবদানের গুরুত্ব স্বীকার করেছিলেন, যদিও তাঁদের শিষ্যদের মধ্যে কেহ কেহ বহুদিন পর্যন্ত আইনষ্টাইনকে তাঁর প্রাপ্য সম্মান দিতে অস্বীকার করেছিলেন।

যেখানে লোরেন্‌ট্‌স্‌ ও পোয়াঁকারের মত লব্ধপ্রতিষ্ঠ বিজ্ঞানী বিফল হয়েছিলেন সেখানে আইনষ্টাইনের মত অল্পবয়সী অনভিজ্ঞ ব্যক্তি সফল হলেন তার কারণ হল যে, লোরেন্‌ট্‌স্‌ এবং পোয়াঁকারে পদার্থবিদ্যার পূর্বসূরীদের মতামত দ্বারা এত বেশী প্রভাবিত হয়েছিলেন যে, তাঁদের পক্ষে সেগুলি সম্পূর্ণরূপে ত্যাগ করা প্রায় অসম্ভব হয়েছিল। এঁদের উভয়ের বয়সই ছিল পঞ্চাশের কাছাকাছি এবং এঁরা পদার্থবিদ্যা ও গণিত সম্বন্ধে একটু বেশী জেনে ফেলেছিলেন! অন্যদিকে আইনষ্টাইনের বয়স ছিল মাত্র 26, এবং পদার্থবিদ্যা ও গণিত সম্বন্ধে তাঁর জ্ঞানও বেশী ছিল না। পেটেন্ট অফিসে কেরানীর কাজ করার ফলে তিনি সমসাময়িক বিজ্ঞানীদের লেখাও বিশেষ পড়েন নি, ফলে তাঁদের মতামতের প্রতি তাঁর কোন পক্ষপাতিত্ব জন্মায় নি। সেজন্য তত্ত্বীয় পদার্থ বিদ্যার অধিকাংশ যুগান্তকারী আবিষ্কার বিজ্ঞানীরা ত্রিশ বছর বয়সের পূর্বেই করেছেন। আইনষ্টাইন বলেছেন, "পদার্থবিদ হতে গেলে গণিতের জ্ঞান থাকা দরকার, কিন্তু খুব বেশী নয়, পূর্বের তত্ত্বগুলির ছিদ্রান্বেষী হতে হবে, কিন্তু খুব বেশী নয়, মৌলিক চিন্তার ক্ষমতাসম্পন্ন হতে হবে, কিন্তু খুব বেশী নয়।"

**প-9 বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের বিষয়ে আইনষ্টাইনের উপর তাঁর পূর্বসূরীদের প্রভাব ঃ** আমরা এই বইএ যে তত্ত্বের কথা আলোচনা করব তার প্রায় সম্পূর্ণটাই একজন বিজ্ঞানী একাই লিখেছেন। ম্যোলার (Moller) আপেক্ষিকতা তত্ত্ব সম্বন্ধে বলেন, "বিজ্ঞানের ইতিহাসের সুন্দরতম পরিচ্ছেদগুলির মধ্যে অন্যতম, যা প্রধানতঃ একজন ব্যক্তিদ্বারা লিখিত হয়েছে...।" এই বিজ্ঞানী সম্বন্ধে সকলে এক বাক্যে স্বীকার করেছেন যে, তিনি বিংশ শতাব্দীর সর্বশ্রেষ্ঠ বিজ্ঞানী এবং তার সঙ্গে একমাত্র নিউটনের তুলনা করা যায়। আমরা এখন আমাদের মূল বক্তব্য থেকে কিছুটা সরে গিয়ে এই অতিমানবের জীবনী সম্বন্ধে সংক্ষেপে আলোচনা করব।

মাত্র 26 বছর বয়সে বার্ণে ( Bern ) সুইৎজারল্যান্ডের পেটেন্ট অফিসের একজন সামান্য কেরানী এক বছরে তিনটি যুগান্তকারী আবিষ্কার করলেন যার প্রত্যেকটারই জন্য একটা করে নোবেল পুরস্কার দেওয়া যেত। অথচ কেরানীর কাজের সারাদিনের হাড়ভাঙ্গা পরিশ্রমের পর তিনি মাত্র কয়েকখানি বিজ্ঞানের বই পড়বার সুযোগ পেতেন, সে যুগের গবেষণামূলক প্রবন্ধসম্বলিত সাময়িক পত্রিকাগুলি ছিল তাঁর নাগালের বাইরে। যে বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব তিনি 26 বছর বয়সে আবিষ্কার করেন সে সম্বন্ধে তিনি চিন্তা করতে আরম্ভ করেন দশ বছর পূর্বে, অর্থাৎ মাত্র 16 বছর বয়সে। এর আরও দশ বছর পরে তিনি সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রকাশ করেন যাকে মানববুদ্ধির সবচেয়ে বড় কীর্তি বললেও অত্যুক্তি হয় না। এই সাফল্য আইনষ্টাইনের মনের উপর গভীর রেখাপাত করেছিল, এটা তাঁকে দেখিয়েছিল যে, অণুপ্রাণিত গাণিতিক দূর-কল্পনা যে গগনচুম্বী শিখরে নিয়ে যায় সেখানে শুধুমাত্র পরীক্ষা নিরীক্ষা কোনদিন পেঁাছতে পারে না।

অথচ আইনষ্টাইনের চারপাশের লোকেরা তাঁর প্রতিভার কোন খবর পায় নি। 1909 খ্রীষ্টাব্দে মাত্র ত্রিশ বছর বয়সে যখন তিনি পেটেন্ট অফিসের মালিককে গিয়ে বলেন যে, তিনি চাকুরী ছেড়ে জ্যুরিক বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রোফেসরের পদে যোগ দিতে যাচ্ছেন তখন তাঁর মালিক রেগে বলেন ঃ "আপনার এই সব নির্বুদ্ধির ঠাট্টা বন্ধ করুন। এই অদ্ভুত কথা কেউ বিশ্বাস করবে না।" কিন্তু এই অদ্ভুত কথা সত্য ছিল, যেমন ছিল তাঁর জীবনের অনেক অদ্ভুত কথা।

অথচ এই লোকটির শৈশবে কথা বলতে এত দেরী হয়েছিল যে, তাঁর পিতামাতা তাঁকে দুর্বল মস্তিষ্ক বলে আশঙ্কা করেছিলেন। তাঁর একজন শিক্ষক বলেছিলেন, "তুমি জীবনে কখনও কিছু করতে পারবে না।" আমাদের দেশের রবীন্দ্রনাথের মত তাঁরও স্কুলের পড়া ভাল লাগত না এবং শেষে তিনি স্কুল থেকে বিতাড়িত হন। তারপর তিনি জ্যুরিকের পলিটেকনিকে ভর্তি হবার পরীক্ষায় ফেল করেন।

তাঁর প্রতিভার কথা কেহই জানতে পারেন নি। এক কথায় তিনি ছিলেন স্বাধীনচেতা, কোন বাঁধাধরা ছকের মধ্যে কাজ করতে তিনি পছন্দ করতেন না। পেটেন্ট অফিসের কেরানী থাকার সময় তাঁর শিক্ষা জগতের সঙ্গে কোন সম্পর্ক

ছিল না। অনেক বছর পরে তিনি তাঁর ছাত্র ইনফেল্ডকে ( Infeld ) বলে ছিলেন যে, ত্রিশ বছর বয়সের পূর্বে তাঁর কোন প্রকৃত তত্ত্বীয় পদার্থবিদের সঙ্গে সাক্ষাৎ হয় নি। ইনফেল্ড এর সঙ্গে যোগ করেছিলেন, "আয়নার মধ্যে ছাড়া।"

আইনষ্টাইনের কথা যদি বিশ্বাস করতে হয় তা হলে 1904 খ্রীষ্টাব্দের লোরেন্টসের প্রবন্ধ তিনি পড়েন নি। তিনি প্রথম থেকে শুরু করে স্বতন্ত্র-ভাবে লোরেন্টসের রূপান্তর সমীকরণ প্রমাণ করেছিলেন। পোয়াঁকারের লেখা-গুলি সম্বন্ধেও তিনি ছিলেন সম্পূর্ণ অনভিজ্ঞ।[1] তিনি তাঁর 1905 খ্রীষ্টাব্দের প্রবন্ধে পূর্ববর্তী কোন বিজ্ঞানীর গবেষণামূলক প্রবন্ধের উল্লেখ করেন নি। তবে তিনি লিখেছিলেন, " 'আলোর মাধ্যমের' সাপেক্ষে পৃথিবীর বেগ নির্ণয়ের নিষ্ফল চেষ্টা আমাদের ইঙ্গিত দেয় যে, তড়িৎ গতিবিদ্যা এবং বলবিদ্যার বিষয়-গুলিরচরম স্থিতির ধারণার পরিপোষক কোন গুণাগুণ নেই।" বহু বছর পরে যখন আইনষ্টাইনকে জিজ্ঞাসা করা হয় যে তিনি কোন কোন পরীক্ষা দ্বারা প্রভাবিত হয়েছিলেন। তখন তিনি বলেন যে, তিনি ব্র্যাডলের অপেরণের পরীক্ষা এবং ফিজোর জলপ্রবাহের পরীক্ষার কথা জানতেন।[2] তিনি আরও বলেন যে, তিনি লোরেন্টসের লেখা পড়েছিলেন। কিন্তু আইনষ্টাইন একটি প্রশ্নের উত্তরে মৃত্যুর মাত্র দু'মাস পূর্বে 1955 খ্রীষ্টাব্দের জুন মাসে জানান যে, তিনি 1895 খ্রীষ্টাব্দের লোরেন্টসের লেখা পড়েছিলেন কিন্তু পরবর্তী প্রবন্ধ পড়েন নি। মাইকেলসনের পরীক্ষার বিষদ বিবরণ তিনি পড়েন নি কিন্তু লোরেন্টসের লেখা পড়ে এই পরীক্ষার ফলাফলের কথা জানতে পেরেছিলেন। 1952 খ্রীষ্টাব্দের 19শে ডিসেম্বর ক্লীভল্যান্ড সহরে অনুষ্ঠিত মাইকেলসনের জন্ম-শতবার্ষিকী উৎসবে এক বিবৃতিতে আইনষ্টাইন বলেন: "এই গুরুত্বপূর্ণ মাইকেলসন–মর্লে পরীক্ষার আমার গবেষণার উপর প্রভাব ছিল পরোক্ষ। আমি এর কথা জানতে পারি এইচ. এ. লোরেন্টসের (1895) গতিশীল বস্তুর

1. এবিষয়ে আলোচনা করেছেন: Gerald Holton—"On the Origins of the Special Theory of Relativity"—Am. J. Phys 28, 627-36(1960)

2. নিম্নলিখিত প্রবন্ধগুলি দেখুন; R. S. Shankland; Conversations with Einstein—Am. J. Phys. **31**, 47—57 ( 1963 ) এবং R. S. Shankland : Michelson Morley Experiment—Am. J. Phys. **32**, 16—35 (1964).

তড়িৎ গতিবিদ্যা সম্বন্ধীয় নিশ্চিত গবেষণার মাধ্যমে যার সঙ্গে আমি বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব আবিষ্কারের পূর্বেই পরিচিত ছিলাম। লোরেন্ট্‌সের স্থির ইথারের মূল অনুমান আমার কাছে বিশ্বাসজনক বলে মনে হয় নি এবং তা ছাড়া মাইকেলসন-মর্লে পরীক্ষার এই ব্যাখ্যা কৃত্রিম বলে মনে হয়েছিল। …ফিজোর পরীক্ষার ফল এবং অপেরণের ঘটনাও আমার পথনির্দেশ করেছে।” উপরোক্ত আলোচনা থেকে স্পষ্ট বোঝা যায় যে, আইনষ্টাইনের অন্তর্দৃষ্টি ছিল গভীর এবং প্রকৃতির মাত্র একটি দুটি ইঙ্গিত তাঁকে সঠিক উত্তর পেতে সাহায্য করেছে। আলোর তড়িৎপ্রক্রিয়া ব্যাখ্যা করবার জন্য ফোটন প্রকল্প উদ্ভাবন করেও তিনি এই অন্তর্দৃষ্টির পরিচয় দিয়েছেন। আলোর তড়িৎ প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যার জন্যই (বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের জন্য নয়) তাঁকে 1921 খ্রীষ্টাব্দে নোবেল পুরস্কার দেওয়া হয়। এই নোবেল পুরস্কারের প্রশস্তিপত্র অদ্ভুত: “রাজকীয় সুইডিশ একাডেমী ৯ই নভেম্বর 1922 এর সম্মেলনে আলফ্রেড নোবেলের 27শে ডিসেম্বর 1895 সনের ইচ্ছাপত্রের নির্দেশ অনুযায়ী সিদ্ধান্ত করেন: যে / (পরিশেষে প্রমাণিত হলে) আপেক্ষিকতা তত্ত্ব এবং মহাকর্ষ তত্ত্বের জন্য / যে কৃতিত্ব অর্জিত হবে তা ব্যতিরেকে / সেই পুরস্কার / যা 1921 খ্রীষ্টাব্দে পদার্থবিদ্যার সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার ও উদ্ভাবনের জন্য দেওয়া হয় / আলবার্ট আইনষ্টাইনকে দেওয়া হবে কারণ তিনি তত্ত্বীয় পদার্থবিদ্যা ক্ষেত্রে সবচেয়ে যোগ্য / বিশেষ করে তাঁর আলোক তড়িৎ প্রক্রিয়ার সূত্র আবিষ্কারের জন্য।” এই অদ্ভুত প্রশস্তিপত্র থেকে বোঝা যায় যে, 1921 খ্রীষ্টাব্দেও বহু বিজ্ঞানীর মনে বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্বের সত্যতা সম্বন্ধে সন্দেহ ছিল।

আমরা দেখেছি যে, আইনষ্টাইনের তত্ত্ব পূর্ববর্তী পরীক্ষার ফলাফল সুন্দরভাবে ব্যাখ্যা করতে সক্ষম হয়েছিল। কিন্তু এটাই তাঁর একমাত্র কৃতিত্ব নয়। আমরা দেখেছি যে, এই তত্ত্ব যে সমস্ত ফলাফলের ভবিষ্যদ্বাণী করেছিল সেগুলিও পরীক্ষাদ্বারা প্রমাণিত হয়েছে। তাই প্রসিদ্ধ জার্মান বিজ্ঞানী মাক্স প্লাঙ্ক তাঁর সম্বন্ধে লিখেছিলেন “যদি আইনষ্টাইনের তত্ত্ব (বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব) সত্য বলে প্রমাণিত হয় এবং আমি আশা করি যে তা হবে, তা হলে তিনি বিংশ শতাব্দীর কোপারনিকাস বলে স্বীকৃত হবেন।”

অন্য বিজ্ঞানীদের সঙ্গে আইনস্টাইনের পার্থক্য ছিল এই যে, তিনি

বিজ্ঞানের সত্যগুলি সম্বন্ধে সন্দেহ প্রকাশ করেন নি, বরং বিজ্ঞানের স্বতঃসিদ্ধগুলি সম্বন্ধে আপত্তি তুলেছিলেন এবং বিজ্ঞান তাঁর কাছে নতি স্বীকার করেছে।

আইনষ্টাইনের এই অভূতপূর্ব সাফল্য সত্ত্বেও তিনি কোনদিন পূর্বসূরীদের সম্মান দিতে কার্পণ্য করেন নি। ম্যাক্সওয়েল সম্বন্ধে ছিল তাঁর উচ্চ ধারণা। আইনষ্টাইন সারাজীবন এই মত ব্যক্ত করেছিলেন যে, তাঁর চেয়ে ম্যাক্সওয়েলের অবদান বেশী গুরুত্বপূর্ণ। আইনষ্টাইন তাঁর আত্মজীবনীতে নিউটনীয় বলবিদ্যার সমালোচনা করে শেষে লিখেছেন, "এই যথেষ্ট, নিউটন, আমাকে ক্ষমা করুন, আপনি আপনার যুগে যে পথ খুঁজে পেয়েছিলেন তা তখনকার যুগের শ্রেষ্ঠতম বুদ্ধি ও সৃজনী শক্তিসম্পন্ন ব্যক্তির পক্ষেই সম্ভব ছিল। আপনি যে ধারণাগুলির সৃষ্টি করেছিলেন তা আজ পর্যন্ত আমাদের পদার্থ বিদ্যার চিন্তাকে পরিচালিত করছে যদিও আমি এখন জানি যে, সম্পর্কগুলিকে আরও সম্যকরূপে উপলব্ধি করতে হলে সেগুলিকে অন্য এমন ধারণা দ্বারা প্রতিস্থাপিত করতে হবে যা আমাদের অভিজ্ঞতার গণ্ডী থেকে আরও দূরে।"

# পরিভাষা

aberration—অপেরণ
abscissa—ভুজ
absolute—চরম
absorption—শোষণ
abstraction—বিমূর্তন
accelerated—ত্বরণশীল
acceleration—ত্বরণ
acceleration due to gravity—অভিকর্ষজ ত্বরণ
accuracy—যাথার্থ্য
achromatic—অবার্ণ
acute angle—সূক্ষ্ম কোণ
aether—ইথার
altitude—উন্নতি
angular—কৌণিক
annihilation—বিলয়
annular—বলয়াকৃত
anomalous—ব্যতিক্রান্ত
anticlockwise—বামাবর্ত
antimatter—প্রতিবস্তু
antineutrino—এন্টিনিউট্রিনো
antisymmetric—অপ্রতিসম
apparent—আপাত
approximate value—আসন্ন মান
astronaut—নভোচারী, মহাকাশচারী
asymptote—অনন্তস্পর্শী রেখা
atom—পরমাণু
atomic weight-পারমাণবিক ভর
at rest—স্থির নিশ্চল
axiom—স্বতঃসিদ্ধ
axis—অক্ষ
axle—অক্ষধুরা
azimuthal—দিগংশিক
base—ভূমি
beam—রশ্মিগুচ্ছ, জ্যোতিরেখা
big bang—মহানাদ
binary star—যুগ্মতারা
binding energy—বন্ধন শক্তি
binomial theorem—দ্বিপদ উপপাদ্য
black body—কৃষ্ণ বস্তু
bremsstrahlung—ব্রেম্‌স্‌ স্ট্রালুংগ্‌
brightness—উজ্জ্বলতা
cartesian—কার্টেজীয়
causal influence—কার্যকর প্রভাব
causality—কার্যকারণ সম্পর্ক
celestial pole—খ-মেরু
centrifugal—কেন্দ্রাতিগ
centripetal—কেন্দ্রাভিগ
charge—আধান
charged—আহিত
chronometer—ক্রনোমিটার
classical—প্রাচীন

clockwise—দক্ষিণাবর্ত
closed ellipse—আবদ্ধ উপবৃত্ত
cloud chamber—মেঘ প্রকোষ্ঠ
coefficient—সহগ
coincidence—সমাপতন
coincident—সমস্থানিক
collimation—অক্ষিকরণ
column—স্তম্ভ
compensating plate—ক্ষতি পূরণকারী প্লেট
component—উপাংশ
concave surface—অবতল
concentric—সমকেন্দ্রিক
condenser—বিদ্যুৎ সঞ্চয়ী
condition—শর্ত
conduction—পরিবহন
conductivity—পরিবাহিতা
cone—শঙ্কু
conservative force—সংরক্ষণশীল বল
constant—ধ্রুবক, ধ্রুবসংখ্যা
constellation—নক্ষত্রপুঞ্জ
continuous—সন্ততি
continuum—সন্ততি
convection—পরিচলন, সঞ্চালন
convention—রীতি
conventional—রীতিগত
convergent—অভিসারী
conversion factor—পরিবর্তনের গুণনীয়ক
coordinate—স্থানাঙ্ক
corollary—অনুসিদ্ধান্ত
cosine—কোসাইন
cosmic—মহাজাগতিক
cosmic rays—মহাজাগতিক রশ্মি
couple—দ্বন্দ্ব
covariant (-ce)—সমপরিবর্তনশীল (-তা)
crystal—কেলাস
cyclic permutation—চক্রীয় বিন্যাস
cylinder—বেলন
data—উপাত্ত
definition—সংজ্ঞা
denominator—হর
density—ঘনত্ব
detector—সন্ধানী যন্ত্র
determinant—ছক
deviation—চ্যুতি, বিচ্যুতি
diagonal—কর্ণ
diagonal element—কর্ণস্থ উপাংশ
dielectric constant—অপরিবাহিতা ধ্রুবক
differentiation—ব্যবকলন
dilation—প্রসারণ
dimension—মাত্রা
dimensional—মাত্রিক

discharge tube—ক্ষরণ নল
disintegration—ক্ষয়
dispersion—বিচ্ছুরণ
dispersive medium—বিচ্ছুরক মাধ্যম
displacement—ভ্রংশ
diurnal—আহ্নিক
divergent—অপসারী
doubly refracting—দ্বিবিধ প্রতিসারক
dual tensor—দ্বৈত টেন্সর
eccentric (-ity)—উৎকেন্দ্রিক (-তা)
ecliptic—ক্রান্তি বৃত্ত
elastic—স্থিতিস্থাপক
electrodynamics—তড়িৎ গতিবিদ্যা
electromagnet—তাড়িৎ চুম্বক
electromagnetic—তড়িৎ চুম্বকীয়
electromotive force—তড়িচ্চালক বল
electron capture—ইলেকট্রন বন্দীকরণ
electrostatic—তড়িৎ স্থিতীয়
elementary particle—মৌল কণা
ellipse—উপবৃত্ত
ellipsoid of revolution—উপগোলক
elliptical—উপবৃত্তীয়
emission—নিক্ষেপণ
emission theory—নিক্ষেপ তত্ত্ব
equation—সমীকরণ
equator—বিষুব রেখা
equilibrium—সাম্য
equilibrium position—সাম্যাবস্থান
error—ভ্রম
ether—ইথার
ether drag coefficient—ইথার টান গুণাঙ্ক
even function—যুগ্ম অপেক্ষক
excited state—উত্তেজিত অবস্থা
exotherml—তাপদায়ক
eyepiece—অভিনেত্র
factor—গুণনীয়ক
field—ক্ষেত্র
fine structure—সূক্ষ্ম গঠন
fine structure constant—সূক্ষ্ম গঠন ধ্রুবক
finite—সসীম
fission—বিভাজন
fixed—স্থির, নিশ্চল
float—ভেলা
fluorescence—প্রতিপ্রভা
force—বল
form—রূপ
formal form—বাহ্যরূপ
frame of reference—পরিমাপ কাঠামো, কাঠামো
free electron—মুক্ত ইলেকট্রন
function—অপেক্ষক
fusion—সংযোজন
galaxy—নক্ষত্র জগৎ
galilean—গালিলীয়

gas—গ্যাস
gauge—মানদণ্ড, পরিমাপ
gauge transformation—পরিমাপ রূপান্তর
general form—সামান্য রূপ
generalisation—সামান্যীকরণ
geodesic—লঘিষ্ঠান্তর রেখা
ghost image—ভৌতিক প্রতিবিম্ব
gradient—গ্র্যাডিয়েণ্ট
graph—লেখ
gravitational mass—অভিকর্ষীয় ভর
great circle—গুরুবৃত্ত
ground state—সর্বনিম্ন স্তর
group—গ্রুপ
gyromagnetic ratio—আবর্তন চৌম্বক অনুপাত
gyroscope—জাইরোস্কোপ
half life—অর্ধায়ু
headlight effect—সম্মুখ বাতি প্রক্রিয়া
homogeneous—সমসত্ব
horizontal—আনুভূমিক
yhperbola—পরাবৃত্ত
hyperbolic—পরাবৃত্তীয়
hyperboloid of revolution—পরাগোলক
hypersphere—অধিগোলক
hypothesis—প্রকল্প
imaginary—কল্পিত
incidence—আপতন
inclination—নতি
incompressible—অসংনম্য
indefinite—অনির্দিষ্ট
induction—আবেশ
inertia—জাড্য
inertial force—জাড্যিক বল
inertial frame—জাড্যিক কাঠামো
inertial mass—জাড্যিক ভর
infinitesimal—ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র, নিঃসীম ক্ষুদ্র
infrared—অবলোহিত
in motion—সচল, গতিশীল
instantaneous—ক্ষণিক, তাৎক্ষণিক
intensity—তীব্রতা
integration—সমাকলন
interaction—মিথষ্ক্রিয়া
interference—ব্যতিচার
interference fringe—ব্যতিচার নকশা
interferometer—ব্যতিচার মাপক
intersection—ছেদ
interval—অন্তর
invariant—অপরিবর্তনীয়
inverse—বিপরীত
ion—আয়ন
isotope—আইসোটোপ
isotropic—সমদৈশিক, দিকনিরপেক্ষ
kinetic energy—গতীয় শক্তি
kinetic theory—গতিবিদ্যা
laboratory—পরীক্ষাগার
lattice—জাফরি
law—সূত্র
law of causality—কার্যকারণ সূত্র
law of motion—গতিসূত্র
lefthanded—বামাবর্তে
Levi Civita symbol—লেভি সিভিটা প্রতীক
lens—লেন্স

level—স্তর
light-like—আলোকতুল্য
limit—সীমা
linear—রৈখিক
line element—রেখাণু
lines of force—বলরেখা
liquid—তরল
locus—সঞ্চার পথ
logical cycle—যৌক্তিক চক্র
longitudinal—অনুদৈর্ঘ্য
luminiferous aether—আলোক পরিবাহী ইথার
macroscopic—স্থূল
magnetic—চুম্বকীয়
magnetic permeability—চুম্বকীয় প্রবেশ্যতা
magnitude—মান
major axis—পরাক্ষ
mass—ভর
mass defect—ভরাভাব
mass number—ভরসংখ্যা
mean—গড়, মধ্যক
mean life—গড় আয়ু
mechanical—যান্ত্রিক
mechanics—বলবিদ্যা
median—মধ্যমা
medium—মাধ্যম
metaphysics—অধিবিদ্যা
metric tensor—পরিমাপ টেন্সর
milky way—ছায়াপথ
million electron volt (Mev)—এম. ই. ভি.
minor axis—উপাক্ষ
model—নকশা
moment—ভ্রামক
momentum—ভরবেগ
monochromatic—একরঙা
motion—গতি
muon—মিউয়ন
nautical almanac—নৌসারণী
negative—ঋণাত্মক, না-ধর্মী, নেতিবাচক
negligible—উপেক্ষণীয়
neutral—উদাসীন
neutrino—নিউট্রিনো
non-Euclidean—অ-ইউক্লিডীয়
normal—অভিলম্ব
nucleon—নিউক্লিয়ন
nucleus—নিউক্লিয়স
numerator—লব
numerical—সংখ্যা সূচক
oblique—তির্যক
objective lens—অভিলক্ষ্য লেন্স
observation—নিরীক্ষণ
observatory—মান মন্দির
observer—নিরীক্ষক
operator—সংকারক
orbit—কক্ষপথ
orbital—কাক্ষিক
osder—ক্রম
ordinate—কোটি
orthogonal—সমকোণীয়
oscilloscope—অসিলোস্কোপ
overlap—প্রাবরণ
packing fraction—বন্ধনাংশ
pair creation—যুগ্ম সৃষ্টি

parabola—অধিবৃত্ত
paradox—আত্মবিরোধী সত্য
parallax—লম্বন
parameter—স্থিতিমাপ
partial differentiation—আংশিক ব্যবকলন
particle—বস্তুকণা
pendulum—দোলক
perfect—আদর্শ
perihelion—অনুসূর
period—পর্যায়কাল
periodic—পৌনঃপুনিক
period of revolution—সংক্রমণ কাল
permutation symbol—বিন্যাস প্রতীক
perpendicular—লম্ব
persistence of vision—দৃষ্টি নির্বন্ধ
phase—দশা,
physical—ভৌত, ভৌতিক
plane—সমতল
plumb line—লম্ব সূত্র
polar axis—ধ্রুবাক্ষ
polar coordinate—ধ্রুবীয় নির্দেশাঙ্ক
polarisation—সমাবর্তন
pole—মেরু
positive—ধনাত্মক, হাঁ ধর্মী, অস্তি-বাচক
positive definite—নির্দিষ্ট ধনাত্মক
postulate—স্বীকার্য
potential—বিভব
potential energy—স্থিতীয় শক্তি
power—ক্ষমতা
power (of an expression)—ঘাত
precession—অয়নচলন
principle of equivalence—তুল্যতার নীতি
prism—প্রিজম্
privileged—বিশেষ অধিকারপ্রাপ্ত
projection—অভিক্ষেপ
projective—অভিক্ষেপমূলক
proper frame—প্রকৃত বা যথার্থ কাঠামো
proper frequency—যথার্থ কম্পাঙ্ক
proper length—প্রকৃত বা যথার্থ দৈর্ঘ্য
proper time—যথার্থ কাল
proportional—অনুপাতী
pseudo—ছদ্ম
pseudo angle—ছদ্মকোণ
qualitative—গুণীয়, আঙ্গিক
quantitative—মাত্রিক
quantity—রাশি
radiation—বিকিরণ
radioactive—তেজস্ক্রিয়
range—আভোগ, পাল্লা
rank—শ্রেণী
rate—হার
real—বাস্তব
reciprocal—পারস্পরিক
recoil—প্রতিক্ষেপ
record—নিবেশন
reflection—প্রতিফলন
refraction—প্রতিসরণ
refractive index—প্রতিসরাঙ্ক

reinterpretation principle—পুনর্ব্যাখ্যার নীতি
relativity—আপেক্ষিকতা
representation—প্রতিরূপ
resonance—অনুরণন
rest—স্থিতি
rest mass—স্থিতি ভর
rest energy—স্থিতি শক্তি
restoring force—পুনরানয়নকারী বল
resultant—লব্ধি
retardation—মন্দন
retina—অক্ষিপট
review—পুনরীক্ষণ
revolution—পরিক্রমণ
righthanded—দক্ষিণাবর্তে
rigid body—দৃঢ় বস্তু
rigid rotation—দৃঢ় আবর্তন
row—সারি
scalar—স্কেলার
scattering—বিক্ষেপণ
science fiction—বৈজ্ঞানিক কাহিনী
scintillation counter—স্ফুলিঙ্গায়নকারী কাউণ্টার
semiclassical—অর্ধপ্রাচীন
semimajor axis—পরাক্ষার্ধ
semiminor axis—উপাক্ষার্ধ
shock wave—অভিঘাত তরঙ্গ
simultaneity—যুগপত্তা, সমকালীনতা
simultaneous—যুগপৎ, সমকালীন
sine—সাইন
singular (-ity)—অনন্য (-তা)
skewsymmetric—অপ্রতিসম
slit—বিদার
solar system—সৌরমণ্ডল, সৌর জগৎ
solid—ঘন
solid angle—ঘনকোণ
solution—সমাধান
space coordinate—দেশাঙ্ক
space-like—দেশতুল্য
space-time coordinates—দেশ-কালাঙ্ক
spatial—দৈশিক
spectroscopic binary—বর্ণালীগত যুগ্মতারা
spectrum—বর্ণালী
speculation—দূর কল্পনা
speed—দ্রুতি
sphere—গোলক
spherical polar coordinate—গোলীয় ধ্রুবীয় নির্দেশাঙ্ক
spheroid—উপগোলক
square—বর্গ
square root—বর্গমূল
stable—সুস্থিত
standard—মানদণ্ড প্রমাণ
standard deviation—প্রমাণ বিচ্যুতি
storage ring—সঞ্চায়ক বেষ্টনী
strain—টান
stress—পীড়ন
subgroup—উপগ্রুপ
subscript—পাদাঙ্ক

substitute—প্রতিস্থাপন করা
substratum—উপস্তর
suffix—অন্ত্যাক্ষর
surface—তল
symbol—প্রতীক
symmetric—প্রতিসম
symmetry—প্রতিসাম্য
synchronise—সমলয় করা
tangent—স্পর্শক
tangential velocity—স্পর্শিনী বেগ
telescope—দূরবীন
temporal—কালিক
tensor—টেন্সর
theorem—উপপাদ্য
theory—তত্ত্ব
thermonuclear—তাপ নিউক্লীয়
thought experiment—মনোগত পরীক্ষা
threshold frequency—প্রারম্ভ কম্পাঙ্ক
time—সময়, কাল
time coordinate—কালাঙ্ক
time-like—কালতুল্য
time order—কালক্রম
trajectory—পথ
transformation—রূপান্তর
transition—সংক্রমণ
translatory—সরলরৈখিক
transverse—তির্যক, অনুপ্রস্থ
trough—দ্রোণী
ultraviolet—অতি বেগুনী
unbounded—অনন্ত
uncertainty—অনির্দেশ্যতা
unifield field theory—একীকৃত ক্ষেত্র তত্ত্ব
uniformly accelerated—সমত্বরিত
uniform velocity—সমবেগ, অবিচল বেগ
unique—অদ্বিতীয়
unit vector—একক ভেক্টর
universe—বিশ্ব
vacuum—শূন্যস্থান
variable—চল
vector—ভেক্টর
vega—অভিজিৎ
velocity—বেগ
verification—সত্যাখ্যান
verify—প্রতিপাদন করা, সত্যাখ্যান করা
vertical—উল্লম্ব রেখা
viewer—দর্শক
viscosity—সান্দ্রতা
volume—আয়তন
wave crest—তরঙ্গ শীর্ষ
wave front—তরঙ্গ মুখ
wave packet—তরঙ্গগুচ্ছ
wedge—কীল
work—কাজ
world—জগৎ
world line—জাগতিক রেখা
world point—জাগতিক বিন্দু
x-ray—রঞ্জন রশ্মি
zenith—সুবিন্দু

# বর্ণানুক্রমিক বিষয়সূচী

# শুদ্ধিপত্র

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ৫ | ১৬ | দৈর্ঘ | দৈর্ঘ্য |
| ৫ | ২৯ | দৈর্ঘ | দৈর্ঘ্য |
| ৬ | সমীকরণ (1-12) | $\ddot{x} = \ddot{x} - a$ | $\ddot{x}' = \ddot{x} - a$ |
| ৭ | সমীকরণ (1-15) | $\mathbf{r}^=$ | $\mathbf{r} =$ |
| ৯ | ২৩ | শধু | শুধু |
| ১০ | ২২ | থাকে | যাকে |
| ১৫ | ৪ | জ্যোতিবর্জ্ঞানী | জ্যোতির্বিজ্ঞানী |
| ১৯ | ৩ | ব্র্যাডলে। | । ব্র্যাডলে |
| ১৯ | চিত্র 1-12 | w | $\omega$ |
| ১৯ | ১৭ | মদি | যদি |
| ২১ | ৪ | যাথার্য্য | যাথার্থ্য |
| ২২ | ১৫ | $f<।$ | $f<1$ |
| ২২ | সমীকরণ (1-37) | $\frac{v}{nc}$ | $\frac{v}{nc}$ |
| ২৩ | পাদটীকার ২য় লাইন | (Butterworths 1964 | (Butterworths 1964) |
| ২৫ | চিত্র 1-15 | উপরের ও নিচের বড় বড় কোণ দু'টি $r$ | উপরের ও নিচের বড় কোণ দু'টি $r$ |
| ২৬ | সমীকরণ 1-47 | $\frac{\sin i}{\text{sis } r}$ | $\frac{\sin i}{\sin r}$ |
| ২৮ | ১২ | ; | : |
| ৩০ | ২০ | তরঙ্গ দৈর্ঘ | তরঙ্গ দৈর্ঘ্য |
| ৩০ | ২২ | জলেব | জলের |
| ৩৩ | ৯ | বিষদ | বিশদ |
| ৩৬ | ১৮ | করেকটি | কয়েকটি |
| ৩৭ | ৩ | $\Delta t - \overline{t}_1 = \overline{t}_2$ | $\Delta t = \overline{t}_1 - t_2$ |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ৩৭ | ১৭ | $=6000$ এ° | $\lambda=6000$ এ° |
| ৪০ | ১২ | (চিত্র 1-21) | (চিত্র 1-21)। |
| ৪১ | সমীকরণ 1-67 | $\mathbf{r}^2=c^2t^{2'}$ | $\mathbf{r}^2=c^2t^2$ |
| ৪২ | সমীকরণ 1-75 | $t_2=\frac{2l_2}{c}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}}{1^{-\frac{v^2}{c^2}}}$ | $t_2=\frac{2l_2}{c}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ |
| ৪৩ | ৯ | নক্সার | নকশার |
| ৪৩ | ৯ | কোসাইল | কোসাইন |
| ৪৩ | পাদটীকা | Me Cuskey | Mc Cuskey |
| ৪৫ | ২১ | ধরনের | ধরণের |
| ৫২ | ২৪ | হে | হলে |
| ৫২ | ২৫ | $l_1$ | $l_{10}$ |
| ৫২ | সমীকরণ (1-37) | $(l_{10}-l_2)$ | $(l_{10}-l_{20})$ |
| ৫৫ | ৩ | 19 4 | 1904 |
| ৫৫ | ১৬ | Ma Born | Max Born |
| ৫৮ | ২০ | ব্যখ্যা | ব্যাখ্যা |
| ৫৯ | ৬ | $x'>x$ | $x'<x$ |
| ৫৯ | ৬ | $t'>t$ | $t'<t$ |
| ৬০ | ১৮ | পরি মাপ | পরিমাপ |
| ৬১ | ৮ | এথন | এখন |
| ৬১ | ১০ | সময়ে | সময় |
| ৬২ | পাদটীকার ২য় লাইন | Methnen | Methuen |
| ৬২ | ২০ | পেঁছায় | একই সময়ে পেঁছায় |
| ৬৮ | ১৫ | দ'জনে | দু'জনে PB র দৈর্ঘ্য |
| ৭১ | ২৩ | বীজণিতের | বীজগণিতের |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ৭২ | ১৭ | PB′A″ | PB′P″ |
| ৭২ | ১৯ | B′A″ | B′P″ |
| ৭৩ | ৭ | $z^2=\frac{k^2}{c^2}(c^2-v^2)$ | $z^2=\frac{k^2}{c^2}(c^2-v^2)^2$ |
| ৮৭ | ৪ | রূপান্তর্তরিত | রূপান্তরিত |
| ৮৭ | ৬ | অপরবর্তিত | অপরিবর্তিত |
| ৮৮ | পাদটীকার ৬ষ্ঠ লাইন | $\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g\mu\nu dx^{\mu} dx^{\nu}$ | $\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}$ |
| ৮৮ | পাদটীকার ৭ম লাইন | $\sum_{\mu',\nu'=1}^{4} g\mu'\nu' dx^{\mu'} dx^{\nu'}$ | $\sum_{\mu',\nu=1}^{4} g_{\mu'\nu'}\, dx_{\mu'}\, dx_{\nu'}$ |
| ৮৯ | পাদটীকার ১২শ লাইন | $\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g\mu\nu dx^{\mu} dx^{\nu}$ | $\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}$ |
| ৯০ | চিত্র 3—2 | | O′O র দিকে X′ অক্ষরেখা |
| ৯১ | চিত্র 3—3 (b) | | S কাঠামোর মূলবিন্দু O |
| ৯২ | ১৩ | $\frac{y'}{y'}=a_{22}$ | $\frac{y'}{y}=a_{22}$ |
| ৯২ | ১৬ | $a_{32}=1$ | $a_{33}=1$ |
| ৯৪ | ৮ | (3-2 | (3-20) |
| ৯৯ | ১ | $t\left(1+\frac{uv}{V^2}\right)$ | $t\left(1+\frac{uv}{U^2}\right)$ |
| ১০৫ | সমীকরণ (3-51) | $\frac{c}{n}\pm\left(1-\frac{\lambda}{n^2}-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$ | $\frac{c}{n}\pm v\left(1-\frac{\lambda}{n^2}-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$ |
| ১০৫ | ১৭ | $s'$ | $S'$ |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ১০৬ | সমীকরণ (3-57c) | $u'=\frac{dz'}{dt'}$ | $u'_z=\frac{dz'}{dt'}$ |
| ১০৭ | সমীকরণ (3-63) | $\frac{u_x, u_y\ u_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u^2}}$ | $\frac{u_x, u_y, u_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}$ |
| ১০৮ | সমীকরণ 3-66 | $-(1-l^2)v^2/c^2$ | $+(1-l^2)v^2/c^2$ |
| ১০৯ | প্রথম সমীকরণ | ( − 70 ) | ( 3-70 ) |
| ১০৯ | (3-70)এর ৫ম সমীকরণ | $u_y'=u'\sin\chi'\cos\psi$ | $u_y'=u'\sin\chi'\cos\psi'$ |
| ১০৯ | (3-70)এর ৬ষ্ঠ সমীকরণ | $u'_z=u'\sin\chi'\sin\psi$ | $u_z'=u'\sin\chi'\sin\psi'$ |
| ১১৩ | সমীকরণ (3-80) | $\mathbf{r}=\mathbf{r}-\mathbf{v}t$ | $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{v}t$ |
| ১১৭ | সমীকরণ (3-94) | $\sin\alpha'=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2\sin\alpha}}{1-v/c\cos\alpha}$ | $\sin\alpha'=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\sin\alpha}{1-v/c\cos\alpha}$ |
| ১১৯ | ১০ | $v$ | $\nu$ |
| ১১৯ | ১১ | $\frac{v}{1-\frac{v}{c}}$ | $\frac{\nu}{1-\frac{v}{c}}$ |
| ১২২ | সমীকরণ 3-104 | $\nu=\nu_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1-x/c}}$ | $\nu=\nu_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$ |
| ১২৩ | চিত্র 3-13 | X অক্ষের সঙ্গে কোণ $\theta$ | X অক্ষের সঙ্গে কোণ $\theta'$ |
| ১২৫ | ২৬ | $vx$ | $v\ \ x$ |
| ১২৬ | প্রথম সমীকরণ | $\frac{v}{c}$ cosee $(\pi+\alpha_1)$ | $\frac{v}{c}$ cosec$(\pi+\alpha_1)$ |
| ১২৮ | সমীকরণ (3-122) | $(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$ | $(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)$ |
| ১৩২ | পাদটীকার ১ম লাইন | উহটেন | উইটেন |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ১৩২ | ৯ | স্থিব | স্থির |
| ১৩৫ | চিত্র 3-17 | $14\times10^{-7}$ সে. | $1{\cdot}4\times10^{-7}$ সে. |
| ১৩৬ | চিত্র | চিত্র 3- 8 | চিত্র 3-18 |
| ১৩৮ | ৯ | $Hg^{19}$ | $Hg^{195}$ |
| ১৩৮ | ২২ | $47\times13^{-9}$ | $4{\cdot}7\times10^{-9}$ |
| ১৩৯ | শেষ লাইন | $(1+\frac{1}{2}R_1{}^2\omega^2/c)$ | $(1+\frac{1}{2}R_1{}^2\omega^2/c^2)$ |
| ১৪১ | ৭ | চারদিক | চারদিকে |
| ১৪২ | ৬ | $\dfrac{t_L}{2}+\dfrac{\frac{vt_L}{2}+x_0}{}$ | $\dfrac{t_L}{2}+\dfrac{\frac{vt_L}{2}+x_0}{c}$ |
| ১৪২ | সমীকরণ (3-144) | $t\left(1+\frac{v}{c}\right)$ | $t_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$ |
| ১৪৩ | ১ | $\frac{t_L}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right)=\frac{v't_N'}{2}\frac{K}{v'}$ | $\frac{t_L}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right)=\frac{v't_N'}{2}\cdot\frac{K}{v'}$ |
| ১৪৩ | ২ | $t_L\left(1-\frac{v}{c}\right)=K\,t_N{}^L$ | $t_L\left(1-\frac{v}{c}\right)=K\,t_N'$ |
| ১৪৩ | সমীকরণ (3-148) | $v_N'=v_0$ | $v'_N=v_0$ |
| ১৪৩ | ২৩ | অনুদৈর্ঘ | অনুদৈর্ঘ্য |
| ১৪৪ | সমীকরণ(3-155)এরপর | ... | পাউন্ড এবং রেবকা পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করেন যে, $\frac{\Delta v}{v_0}=-(2{\cdot}09\pm0{\cdot}24)\times10^{-15}\Delta T$ |
| ১৪৫ | ৪ | অপরিবর্তনীয় হয় | অপরিবর্তনীয় নয় |
| ১৪৮ | চিত্র 3-23 (b) | | নিচে B থেকে C অভিমুখে তীর চিহ্ন হবে |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ১৫২ | ২০ | যাত্রাকালে | যাত্রাকাল |
| ১৫৩ | ৩ | আইষ্টাইনের | আইনষ্টাইনের |
| ১৫৩ | ২১ | (পৃষ্ঠা 4) | (পৃষ্ঠা ৩০২) |
| ১৫৪ | ২২ | পৃষ্ঠা 110 | পৃষ্ঠা ৬৩ |
| ১৫৮ | ১৬ | $T^{\circ}$ | $T_0$ |
| ১৫৮ | সমীকরণ(3-175) | $N_R = N_0 e_{-} \; t_R/\gamma T_0$ | $N_R = N_0 e^{-t_R/\gamma T_0}$ |
| ১৬১ | ৫ | নিদিষ্ট | নির্দিষ্ট |
| ১৬২ | ৫ | উষ্ণতার | উচ্চতার |
| ১৬৩ | ২৫ | চোরে | চোখে |
| ১৬৫ | ২১ | A D F E | A B F E |
| ১৬৬ | চিত্র 3-27 (*a*) | X অক্ষ | X' অক্ষ |
| ১৬৮ | চিত্র 3-29 (*a*) | | লেখচিত্রের কোটির দিকে 'আপাত ঘূর্ণন α-α'' |
| ১৭২ | ৪ | $s'$ | S |
| ১৭৩ | সমীকরণ (3-197) | $\tan(\theta_v - \theta_1)$ | $\tan(\theta_2 - \theta_1)$ |
| ১৭৪ | পাদটীকার ৩য় লাইন | Relativistie | Relativistic |
| ১৭৪ | পাদটীকার ৩য় লাইন | (Pergamon 1966( | (Pergamon 1966) |
| ১৭৪ | পাদটীকার ৪র্থ লাইন | Meehanics | Mechanics |
| ১৭৪ | পাদটীকার ৫ম লাইন | একে | এক |
| ১৭৫ | ৫ | অণুপাতের | অনুপাতের |
| ১৭৮ | সমীকরণ (3-218) | $v = \frac{z e^2}{nh(4\pi\epsilon)}$ | $v = \frac{z e^2}{n\hbar(4\pi\epsilon_0)}$ |
| ১৭৮ | সমীকরণ (3-218) | $r = \frac{n^2 h^2 (4\pi\epsilon_0)}{mze^2}$ | $r = \frac{n^2 \hbar^2 (4\pi\epsilon_0)}{mze^2}$ |
| ১৭৯ | সমীকরণ (3-220) | $\frac{mz^4 e^8}{4\pi n^2 h^5 c^2 (4\pi\epsilon_0)^4}$ | $\frac{mz^4 e^8}{4\pi n^2 \hbar^5 c^2 (4\pi\epsilon_0)^4}$ |
| ১৭৯ | ১৪ | উপেক্ষনীয় | উপেক্ষণীয় |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ১৮০ | ২ | তাত্বিক | তাত্ত্বিক |
| ১৮২ | 4-1 বিভাগের ৪র্থ লাইন | দৈর্ঘ্য ও কাঠামো | দৈর্ঘ্যও |
| ১৮৭ | ফুটনোটের ১ম লাইন | Rend·del Cirec | Rend.del Circ. |
| ১৮৮ | ১০ | $x_1^{''}$ অক্ষের | $x_1'$ অক্ষের |
| ১৮৯ | ৯ | ক্রুশ চিহ্নিত | চিহ্নিত |
| ১৯১ | ৫ | জ্যামিতি | জ্যামিতির |
| ১৯১ | ২৫ | বায় | যায় |
| ১৯২ | ১ | সকলরেখা | সরলরেখা |
| ১৯২ | ২৭ | ধার | ধরে |
| ১৯৪ | সমীকরণ (4-23) | $ds^2=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ | $ds^2=g_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}$ |
| ১৯৫ | ১১ | আলোচমা | আলোচনা |
| ১৯৭ | সমীকরণ (4-27b) | $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$ | $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ |
| ১৯৮ | ২ | একক একক | একক |
| ১৯৮ | চিত্র 4-7 | | C বিন্দুর মধ্য দিয়ে DO-র সমান্তরাল রেখার OX অক্ষের সঙ্গে ছেদবিন্দু E |
| ২০২ | ৫ | $x_1=x_4\ (\xi=0)$ | $x_1=-x_4\ (\xi=0)$ |
| ২১১ | ১১ | OC>OA | OD>OA |
| ২১৩ | সমীকরণ (4-59′) | $x_i'=c_i\ x_k$ | $x_i'=c_{ik}\ x_k$ |
| ২১৪ | ২ | $\delta_{\ l}$ | $\delta_{kl}$ |
| ২১৪ | চিত্র 4-17 | O′P=r | O′P=r′ |
| ২১৪ | সমীকরণ (4-61) | $x_i'=c_{ik}\ \dot{x}_k+x_i'$ | $x_i'=c_{ik}x_k+\dot{x}_i'$ |
| ২১৪ | সমীকরণ (4-62) | $\Delta x_i'=c_{ik}\ \Delta x$ | $\Delta x_i'=c_{ik}\ \Delta x_k$ |
| ২১৭ | ১৩ | ভেক্টবের | ভেক্টরের |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ২২২ | সমীকরণ (4-8?) | $(x_4 \text{ OM} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$ | $(x_4)_{\text{OM}} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$ |
| ২২৩ | ২ | $(xy)_{\text{OS}}$ | $(x_4)_{\text{OS}}$ |
| ২২৫ | ৬ | ফরছে | করছে |
| ২২৭ | ২০ | Itrnoduction | Introduction |
| ২২৮ | ১ | Speeial | Special |
| ২২৮ | ৩ | Speeial | Special |
| ২২৮ | ৮ | Speeial | Special |
| ২৩০ | ১২ | (পৃ—2) | (পৃ ৩০৭—৩১০) |
| ২৩১ | শেষ লাইন | $u_i^2 = \left(\frac{dx_{i1}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_{z2}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_{i3}}{dt}\right)^2$ | $u_i^2 = \left(\frac{dx_{i1}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_{i2}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_{i3}}{dt}\right)^2$ |
| ২৩২ | প্রথম সমীকরণ | $\Sigma_{i,\beta} m_i c'_{\alpha\beta} \times \frac{dx_i'^{\beta}}{d\tau} \sqrt{1-u_i^2/c^2}$ | $\Sigma_{i,\beta} m_i c'_{\alpha\beta} \frac{dx'_{i\beta}}{d\tau} \times \sqrt{1-u_i^2/c^2}$ |
| ২৩২ | সমীকরণ (5-7) | $\Sigma_i m_i \frac{dx'_{i\beta}}{d\tau} \times \sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}}$ | $\Sigma_i m_i c'_{\alpha\beta} \frac{dx'_{i\beta}}{d\tau} \times \sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}}$ |
| ২৩২ | সমীকরণ (5-10) | $m = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ | $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ |
| ২৩৩ | ২৫ | $\underset{\mu}{x}$ | $x_\mu$ |
| ২৩৪ | ৭ | $dx\mu$ | $dx_\mu$ |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ২৩৯ | ৭ | ধ্রবসংখ্যা | ধ্রুবসংখ্যা |
| ২৪৪ | ১১ | $-v\left(\Delta mv+\frac{\Delta E_2}{c^3}\right)$ | $-v\left(\Delta m+\frac{\Delta E_2}{c^2}\right)$ |
| ২৪৪ | ১৯ | (তু. 8, চিত্র 4-8) | ( তু. চিত্র 4-8 ) |
| ২৪৫ | সমীকরণ (5-44) | $E'1\frac{E\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ | $E'=\frac{E\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ |
| ২৪৮ | ৯ | কণিকাগ্লির | কণিকাগুলির |
| ২৪৯ | ৩ | বেকে | বেঁকে |
| ২৪৯ | ২১ | $OP, OE=BO^2$ | $OP.OE=BO^2$ |
| ২৫০ | ৬ | যমি | যদি |
| ২৫১ | তালিকার পর ৫ম লাইন | বেপসম্পন্ন | বেগসম্পন্ন |
| ২৫২ | ৫ | ইলেকট্রন গলিকে | ইলেকট্রনগুলিকে |
| ২৫২ | শেষ লাইন | আণুপাতিক | আনুপাতিক |
| ২৫৩ | ১ | বস্তুকণিকা | বস্তুকণিকা |
| ২৫৫ | ৯ | ইলেক্টনের | ইলেকট্রনের |
| ২৫৫ | সমীকরণ (5-61) | $P_e=eB_pr_m$ | $P_e=eB_er_m$ |
| ২৫৫ | সমীকরণ (5-64) | $m_e=\left(\frac{B_p}{B_p}\right)^2m_p$ | $m_e=\left(\frac{B_e}{B_p}\right)^2m_p$ |
| ২৫৬ | ২ | $m_0\sqrt{1+\left(\frac{P_e}{mc}\right)^3}$ | $m_0\sqrt{1+\left(\frac{P_e}{m\ c}\right)^2}$ |
| ২৬০ | ৩ | আপেক্ষিকতা | আপেক্ষিকতা |
| ২৬০ | ৯ | পূপান্তরিত | রূপান্তরিত |
| ২৬০ | ১৮ | প্রারম্ভ কম্পাঙ্ক | প্রারম্ভ কম্পাঙ্ক |
| ২৬১ | ১৩ | পরমানু | পরমাণু |
| ২৬৬ | সমীকরণ (6-5a) | $\lambda$ | $\gamma$ |
| ২৬৬ | সমীকরণ (6-5d) | $\lambda$ | $\gamma$ |
| ২৬৭ | সমীকরণ (6-13) | $\frac{\partial Bx'}{\partial x}$ | $\frac{\partial Bx}{\partial x'}$ |

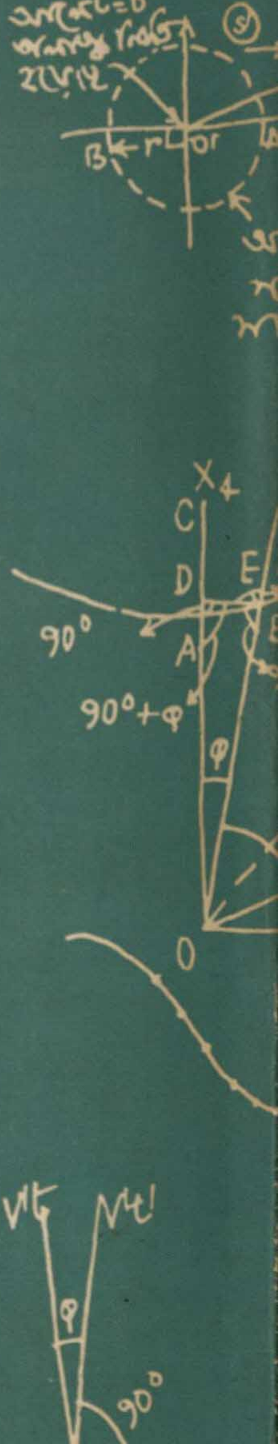
| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ২৬৭ | সমীকরণ (6-15) | $\frac{\partial Bx}{\partial x'}+\frac{\partial Bz'}{\partial y'}+\frac{\partial Br'}{\partial z'} = \frac{1}{v'}\left(\frac{\partial Ez'}{\partial E}-\frac{\partial Ey'}{\partial z'} + \frac{\partial Bx}{\partial t'}\right)$ | $\frac{\partial Bx}{\partial x'}+\frac{\partial By'}{\partial y'}+\frac{\partial Bz'}{\partial z'} = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial Ez'}{\partial y'}-\frac{\partial Ey'}{\partial z'} + \frac{\partial Bx}{\partial t'}\right)$ |
| ২৬৯ | ১৬ | ঘণত্বকে | ঘনত্বকে |
| ২৬৯ | ২১ | হহে | হলে |
| ২৭০ | ৫ | (6-17) | (6-27) |
| ২৭০ | ১৫ | মিরপেক্ষ | নিরপেক্ষ |
| ২৭০ | ১৬ | S | $S^{\circ}$ |
| ২৭০ | ১৭ | u | − u |
| ২৭১ | সমীকরণ (6-38) | $n\gamma\left(\frac{vu_x}{c^2}\right)$ | $n\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)$ |
| ২৭২ | ১৮ | $n'_-(u') = n_-(u)\gamma \left(1+\frac{vu_x}{c^2}\right)$ | $n'_-(u') = n_-(u) \gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)$ |
| ২৭৬ | ২৪ | 5-4 | 6-4 |
| ২৮১ | ৯ | ( −84) | (6 − 84) |
| ২৮১ | ১৯ | গ্র্যাভিয়েণ্ট | গ্র্যাডিয়েণ্ট |
| ২৮২ | ১ | সনীকরণ | সমীকরণ |
| ২৮৪ | সমীকরণ (6-96) | $\Box'^2 A_y = \mu j_y'$ | $\Box'^2 A_y = \mu_0 j_y$ |
| ২৮৪ | ৮ | $1/\mu_0\epsilon = c^2$ | $1/\mu_0\epsilon_0 = c^2$ |
| ২৮৪ | ৮ | $\mu_0 = 1/\epsilon c^2$ | $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ |
| ২৮৪ | ৯ | $-\frac{v\gamma}{\epsilon c^2}(j_x'+v\rho')$ | $-\frac{v\gamma}{\epsilon_0 c^2} \times (j_x'+v\rho')$ |
| ২৮৫ | ২ | $\Box'^2 A_x = \mu_0 j_x'$ | $\Box'^2 A_x' = \mu\ j_x'$ |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ২৮৫ | ৪ | $\square'^2 A_z' = \mu_0 j_y'$ | $\square'^2 A_z' = \mu_0 j_z'$ |
| ২৮৫ | ৫ | $\square'^2 (\phi - vA_x) = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$ | $\square'^2 \gamma(\phi - vA_x) = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$ |
| ২৮৫ | ১৬ | কাঠামোর | কাঠামোয় |
| ২৮৫ | ১৭ | ক্ষেত্রে | ক্ষেত্র |
| ২৮৫ | ১৮ | কাঠামোর | কাঠামোয় |
| ২৮৬ | ১৯ | $-\frac{1}{c}(E_{\bullet}B_x + E\ B_y + E_zB_z)$ | $-\frac{1}{c}(E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z)$ |
| ২৮৭ | ১০ | $E'.H'$ | $E'.H_{u}'$ |
| ২৯২ | ২৪ | আখনষ্টাইনের | আইনষ্টাইনের |
| ২৯৩ | ১৭ | দ'টি | দু'টি |
| ২৯৩ | ২০ | এখানেবৃ ত্তের | এখানে বৃত্তের |
| ২৯৪ | সমীকরণ (7-8) | $g_{\mu\nu}dx^{\mu}\ dx^{\nu}$ | $g_{\mu\nu}\ dx_{\mu}\ dx_{\nu}$ |
| ২৯৬ | ২ | থেছে | থেকে |
| ২৯৭ | ৩ | Sommerfed | Sommerfeld |
| ২৯৮ | ৯ | কৃষ্ণ বস্তুর | কৃষ্ণ বস্তুর |
| ২৯৯ | ২ | এ দু'টি ঐ | ঐ দু'টি |
| ৩০১ | ১৫ | Thermodynamies | Thermodynamics |
| ৩০১ | ১৭ | May | Max |
| ৩০১ | ১৭ | Einstein' | Einstein's |
| ৩০৫ | শিরোনাম | সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব | পরিশিষ্ট |
| ৩০৭ | শিরোনাম | সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব | পরিশিষ্ট |
| ৩০৮ | সমীকরণ (প-1) | $m_2U' - m_1U_1'$ | $m_2U_2' - m_1U_1'$ |
| ৩০৯ | শিরোনাম | সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব | পরিশিষ্ট |
| ৩১১ | শিরোনাম | সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব | পরিশিষ্ট |

| পৃষ্ঠা | লাইন সংখ্যা/স্থান | অশুদ্ধ | শুদ্ধ |
|---|---|---|---|
| ৩১৩ | শিরোনাম | সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব | পরিশিষ্ট |
| ৩১৩ | ১৭ | (Loge) | (Lodge) |
| ৩১৪ | ২২ | (Thomeon) | (Thomson) |
| ৩১৫ | শিরোনাম | সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব | পরিশিষ্ট |
| ৩১৬ | ২ | যথার্থ্য | যাথার্থ্য |
| ৩১৭ | শিরোনাম | সাধারণ আপেক্ষিকতা তক্তব | পরিশিষ্ট |
| ৩১৭ | সমীকরণ (প-8) | $= \frac{d}{c-v} - \frac{d}{c+v}$ | $\tau = \frac{d}{c-v} - \frac{d}{c+v}$ |
| ৩১৭ | সমীকরণ (প-9) | $t_2' = t_{\mathrm{B}\ 2\mathrm{B}} + \frac{d}{c-v}$ | $t'_{2\mathrm{B}} = t_{2\mathrm{B}} + \frac{d}{c-v}$ |
| ৩১৯ | শিরোনাম | সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব | পরিশিষ্ট |
| ৩২০ | ১০ | লি সিটারের | ডি সিটারের |

বিজোড় সংখ্যক পৃষ্ঠাগুলির উপরে "সাধারণ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব" এর স্থানে "পরিশিষ্ট" হবে

| | | | |
|---|---|---|---|
| ৩২২ | ৬ | ব্রেসার | ব্রেশার |
| ৩৩১ | ১৪ | তাত্তিবয় | তাত্ত্বিক |
| ৩৩৪ | ১২ | গুলিরচরম | গুলির চরম |
| ৩৩৪ | ১৯ | বিষদ | বিশদ |
| ৩৩৪ | ২৪ | (189 ) | (1895) |
| ৩৩৪ | পাদটীকার ৩য় লাইন | মিম্নলিখিত | নিম্নলিখিত |



$X_4$
C
D
E
A
90°
90°+φ
φ
O